Cvičení 1-2 opakování středoškolské matematiky

M1100F

Podzim 2022

Pracovní list

1 Elementární funkce a jejich vlastnosti

1.1 Polynomy a mnohočleny

Vzorce

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \text{binomická věta}
\end{aligned}
$$

(A) Otázky

- Přesvědčte se že platí $x^2 \geq 0$, pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.
- Dokažte si, že platí vztah $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Při řešení kvadratických rovnic $ax^2 + bx + c = 0$ pomocí diskriminantu co se stane když je diskriminant nulový nebo záporný?

(B) Příklady

- Vyřešte kvadratickou rovnici $x^2 - 6x - 7 = 0$
- Vyřešte nerovnici $x^2 - 2x - 3 \leq 1$ a nerovnici $\frac{(5x-3)(x+4)}{x(6-x)} \leq 0$. Jaký bude interval řešení $x \in \mathbb{R}$ pokud budeme požadovat aby obě nerovnosti platili najednou?
- Upravte na čtverec následující výrazy: $x^2 + 4x + 7, -x^2 + 3x + 1, x^2 - 4x + 4$
- Využijte výsledků předchozího bodu a zakreslete grafy těchto funkcí.

(C) Složitější příklady

- Dokažte si, že platí vztah $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pomocí obrázků. Využijte toho, že ab je plocha obdélníka o stranách a a b. Zvládnete pomocí obrázku dokázat i že, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$?
- Vyřešte rovnice $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ a $x^3 - 2x - 1 = 0$
- Převeďte na čtverec obecný kvadratický polynom $ax^2 + bx + c$. Využijte tohoto tvaru a nakreslete graf toho obecného výrazu, jak bude tento graf záviset na hodnotách koeficientů (a, b, c)?

1.2 Mocniny a absolutní hodnoty

Vzorce

$$a^0 = 1, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad a^{1/r} = \sqrt[r]{a}$$
$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

Definice: Odmocnina z reálného čísla x (kterou označíme $\sqrt{x}$) je takové $R \geq 0$, pro které platí $R^2 = x$.

(A) Otázky

- Z definice výše je vidět, že $\sqrt{x} \geq 0$, ale co platí pro x? Dává výraz $\sqrt{x}$ smysl pro všechna reálná x?
- Odmocnina a umocnění na druhou jsou vůči sobě funkce inverzní ale čemu se přesně rovná $\sqrt{x^2}$ a čemu $(\sqrt{x})^2$?
- Pozor vztah $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ **NENÍ PLATNÝ**, dokažte si to. Naopak vztah $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ platí, ale musíme nějak omezit hodnoty x, y a jak?
- Přesvědčte se, že platí $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ a také $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

(B) Příklady

- Vyřešte následující rovnice

  $$\sqrt{x+1} = 2 \quad \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+7} = -4, \quad \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 1, \quad \sqrt{x-1} = 5 - \sqrt{x+4}$$

  Nezapomeňte provést zkoušku, u rovnic s odmocninou můžete dostat "falešné" řešení.
- Rovnice s absolutní hodnotou $|8 - 5x| = 5x - 8, \quad |x+1| - |x-3| = 2$
- Načrtněte grafy funkcí $y = 3\sqrt{x-1} + 2$, $y = 2|x-3| + 1$, $y = \frac{1}{x-1} + 3$ a $y = |\frac{x+1}{x-2}|$
- Upravte tyto výrazy (upravte na tvar kde se nevyskytují mocniny pouze čísla, zlomky a odmocnina)

  $$2^3,\ 2^{-2},\ 2^0,\ 2^{\frac{3}{2}},\ 2^{-\frac{7}{3}}$$

(C) Složitější příklady

- Jak byste definovali mocninu a^x, pro iracionální $x \in \mathbb{Q}$? Zkuste si to třeba na příkladu 2^π.
- Upravte tento zlomek (tj. odstraňte všechny odmocniny z jmenovatele). Tomuto se říká usměrnění zlomku.

  $$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

1.3 Logaritmy a exponenciála

Vzorce

$$\log_a x = y \leftrightarrow x = a^y, \quad \log a^b = b \log a, \quad \log(ab) = \log a + \log b$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \quad \log_a b = \frac{\log a}{\log b}, \quad \ln x = \log_e x, e = 2.718..$$

Definice: Logaritmus je funkce, která je inverzní k mocninné funkci — tedy „vrátí zpátky“ to, co udělala. Označujeme ho symbolem $\log_a x$ a definujeme ho takto: řekneme, že $\log_a x = L$ právě tehdy, když $a^L = x$. Tomu $\log_a x$ se říká „logaritmus při základu a. I zde pořád požadujeme $a > 0$.

(A) Otázky

- Z definice odvoďte, že platí $\log_a(a^x) = x$ a $a^{\log_a x} = x$
- Co je definiční obor a obor hodnot funkce $y = \log_e x = \ln x$? Také nakreslete graf.

(B) Příklady

- Vypočítejte tyto základní hodnoty abyste pochopili definici.

$$\log_2 4, \quad \log_3 \frac{1}{3}, \quad \log_4 1, \quad \log_2 \sqrt{8}, \quad \log_{\frac{1}{2}} 2$$

- Použijte definici a odvoďte následující vztahy (v závorce je nápověda, kterou byste měli použít)

$$\log a^b = b \log a \quad \left((z^a)^b = z^{ab}\right)$$
$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \left(z^a z^b = z^{a+b}\right)$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad \left(\frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}\right)$$
$$\log_a b = \frac{\log a}{\log b}$$

Kdekoliv kde není u logaritmu psán základ znamená, že příslušný vzorec platí pro libovolný základ.

- Vyřešte rovnice $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a $\log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = -2$
- Vyřešte rovnice $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$ a $\log_2(x + 7) - \log_2 x = 3$

(C) Složitější příklady

- Vyřešte rovnice $x^{\log_7 x^2} = 49x^3$ a $\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}$

1.4 Goniometrické funkce

Vzorce

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

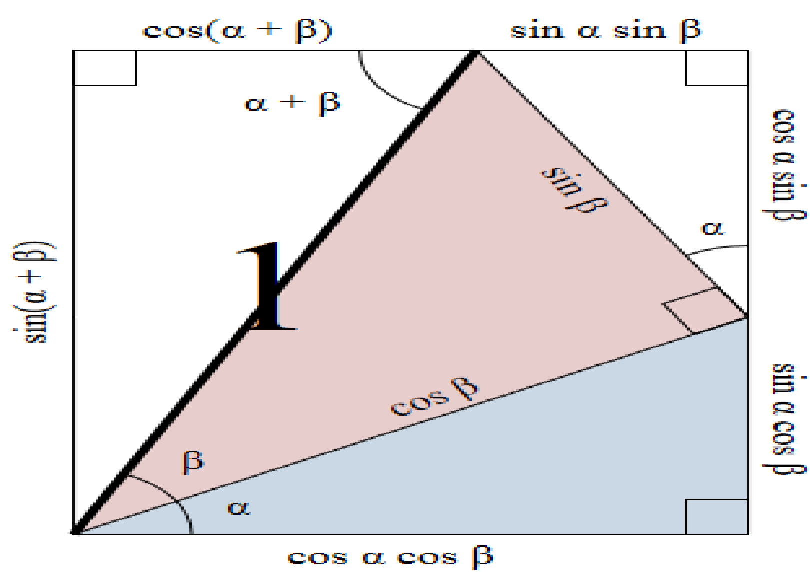
(A) Otázky

- Z definice se přesvědčte že funkce sin a cos jsou periodické. Tedy, že platí $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ a $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- Připomeňte si hodnoty funkcí $\sin, \cos, \tan$ a cot pro úhly $\phi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ a π. Pokud si tyto hodnoty nepamatujete, stačí si nakreslit dva trojúhelníky a použít Pythagorovu větu a definice goniometrických funkcí! Prvně si nakreslete čtverec o straně jedna a rozdělte ho úhlopříčkou na dva pravoúhlé trojúhelníky poté si nakreslete rovnostranný trojúhelník a rozdělte ho výškou na dva pravoúhlé.

(B) Příklady

- Nakreslete graf funkce $\tan x$. Jaký je definiční obor a obor hodnot této funkce?
- Pomocí následujícího obrázku dokažte součtové vzorce

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$



- Nakreslete grafy následujících funkcí, určete periodu a definiční obor.

$$y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1, \quad y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

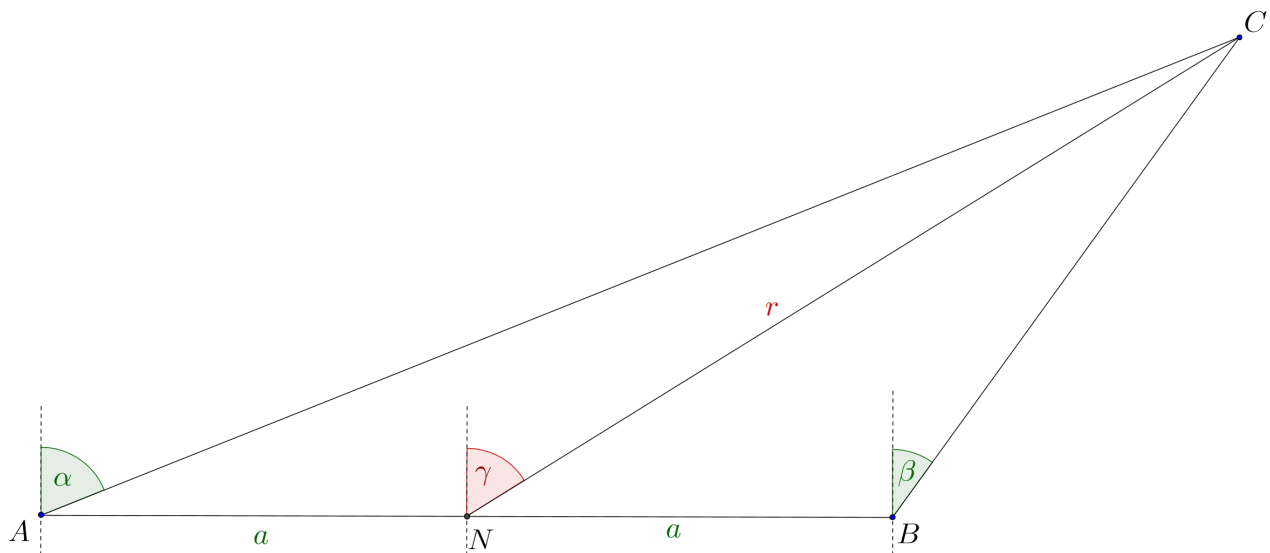
- Zjednodušte následující výrazy

$$\frac{1}{1+\tan x} - \frac{\cot x}{1+\cot x}, \quad \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}, \quad \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} + \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

- S použitím vzorce $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ vyjádřete $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ pomocí pouze $\cos(2x)$. Stejně také najděte vzorce pro $\sin \frac{x}{2}$ a $\cos \frac{x}{2}$ pomocí $\cos x$.
- Vyřešte rovnice $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x \sin 2x$ a $3\cos x + 3 = 4\cos^3 x + 4\cos^2 x$

(C) Složitější příklady

- **Binokulární vidění.** Víte, proč má člověk dvě oči a ne třeba jenom jedno? Pokud ne, tak se to v této úloze dozvíte. Nejdřív se ale podívejte na pěkný obrázek:



Máte dvě oči (na obrázku body A, B) ve vzdálenosti $2a$ od sebe a jimi sledujete nějaký předmět (bod C). Vaše levé oko vidí předmět pod úhlem α, zatímco pravé oko jej vidí pod úhlem β. Oba úhly se berou jako odchylka od přímého směru, která je směrem doprava kladná a doleva záporná.

Přesně uprostřed mezi očima máte nos (bod N). Vypočtěte vzdálenost předmětu od vašeho nosu (vzdálenost r na obrázku) a rovněž úhel vzhledem k ose procházející nosem (na obrázku γ, počítá se stejně jako ostatní dva úhly). Zelené údaje na obrázku znáte, červené máte dopočíst.

V tomto výpočtu je tedy tajemství toho, jak mohou lidi vnímat obraz trojrozměrně, i když mají k disposici jenom dvojrozměrné obrazy na sítnici. Prostě jde o to, že jeden a týž předmět vidíme ze dvou očí a podle úhlů, pod kterými předmět oči vidí, mozek automagicky vzdálenost dopočte.