Cvičení 3 definiční obory a parita funkcí, komplexní čísla

M1100F

Podzim 2022

Pracovní list

1 Definiční obory a parita funkcí

1.1 Inverzní funkce

Definice

- Řekneme, že funkce f je na intervalu (x_0, x_1) prostá, jestliže nenabývá žádné funkční hodnoty dvakrát.
- K prosté funkci f lze definovat funkci inverzní f^{-1} tato funkce je definována takto: $f : A \to B$ je funkce prostá na A pak funkce inverzní $f^{-1} : B \to A$ je taková funkce že $f^{-1}(b) = a \leftrightarrow f(a) = b$ a platí pro ní následující vztahy

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

Všimněme si, že inverzní funkce prohazuje definiční obor a obor hodnot, platí tedy

$$\mathrm{D}(f) = \mathrm{H}(f^{-1}), \quad \mathrm{H}(f) = \mathrm{D}(f^{-1})$$

(A) Příklady

- Nakreslete funkce arcsin, arccos a arctan, které jsou definovány jako funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Jaký je definiční obor a obor hodnot těchto funkcí?
- Najděte funkci inverzní k funkci $y = x^2 + 4x + 7$ má tato funkce inverzní funkci na celém svém definičním oboru?
- Najděte funkci inverzní k funkci $y = \sqrt{x-1} + 1$
- Najděte definiční obory těchto funkcí

$$y = \sqrt{\sin x}, \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y = \ln x^2 - 3x + 2, \quad y = \sqrt{\frac{x+4}{x-2}}$$

$$y = \ln \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, \quad y = \frac{\arccos \frac{3x-2}{5}}{2 - \ln x}, \quad y = \arctan \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

1.2 Parita funkcí

Definice
Parita funkce je jiné označení pro sudost/lichost funkce. Funkce je sudá platí-li $f(-x) = f(x)$, (př. $y = x^2$), funkce je lichá platí-li $f(-x) = -f(x)$ (př. $y = x^3$) nebo neplatí-li ani jeden z těchto vztahů řekneme, že funkce není ani sudá ani lichá (př. $y = x^2 + x^3$).

(A) Příklady

- Graficky si ověřte, že sudé funkce jsou symetrické vůči ose $y = x$ a liché funkce antisymetrické (promítnou se na stejnou funkci ale s opačným znaménkem)
- Přesvědčte se, že pro libovolnou funkci $f(x)$ je kombinace $f(x) + f(-x)$ funkce sudá a kombinace $f(x) - f(-x)$ funkce lichá.
- Zjistěte paritu následujích funkcí:

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\tan^3 x}\left(\frac{|x|}{2^{3x} - 2^{-3x}}\right), \quad f(x) = \frac{\arcsin x}{\tan x}\left(\frac{|x^3|}{2^x + 2^{-x}}\right)$$
$$f(x) = \frac{\cos x \sin x \cos(\sin x)}{2^x - 2^{-x}}, \quad f(x) = \frac{\arcsin \sqrt[3]{4x^3 + 5x}}{x^4} \cdot |x|^{\sin^2 x}$$

2 Komplexní čísla

Vzorce
$i^2 = -1$

- Algebraický tvar: $z = a + bi$, kde $\mathcal{R}e(z) = a$ a $\mathcal{I}m(z) = b$ jsou reálná a imaginární část.
- Polární tvar: $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$, díky Eulerově vzorci: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- Velikost: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$
- Argument: $\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathcal{R}e(z)}{|z|}$ nebo $\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathcal{I}m(z)}{|z|}$
- Umocňování $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$

(A) Příklady

- Vyřešte kvadratickou rovnici nad $\mathbb{C}$

$$x^2 + 2x + 6 = 0$$

  Výsledek pak zapište i v polárním tvaru.
- Ukažte, že platí

$$\mathcal{R}e(z) = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathcal{I}m(z) = \frac{z - z^*}{2i}$$

- Nalezněte řešení následujících rovnic

$$z^2 = i, z^3 = -1, z^6 = 64$$

- Najděte reálnou a imaginární část, velikost a argument následujícího čísla a také číslo komplexně sdružené.

$$\frac{3i+2}{2i-3}$$

- S použitím Eulerova vzorce a vlastnosti komplexních čísel dokažte goniometrické identity.
  - S použitím $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ dokažte, že platí

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

  - S použitím toho že $e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}$ dokažte, že sin je funkce lichá a cos funkce sudá.
  - S použitím toho že $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ a $e^{ix} = \cos x(1 + i \tan x)$ dokažte, že

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

  - Správným vytknutím z výrazu $e^{ix} + e^{iy}$ dokažte, že

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

(B) Složitější příklady Zjistěte čemu se rovná následující komplexní číslo i^i