Cvičení 5,6,7 Derivace - Pracovní list

1 Spojitost funkce

Definice: Funkce je spojitá v bodě x_0, jestliže platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Pokud toto neplatí, rozlišujeme následující případy

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ existuje, ale $a \neq f(x_0)$, pak mluvíme o odstranitelné nespojitosti
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a_1$ a $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a_2$ ale $a_1 \neq a_2$ mluvíme o nespojitosti prvního druhu (skok)
- Pokud alespoň jedna z limit $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ či $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ neexistuje nebo je nevlastní ($\pm\infty$), mluvíme o nespojitosti druhého druhu.

1. U následujících grafů určete zda je funkce spojitá a nebo druh nespojitosti

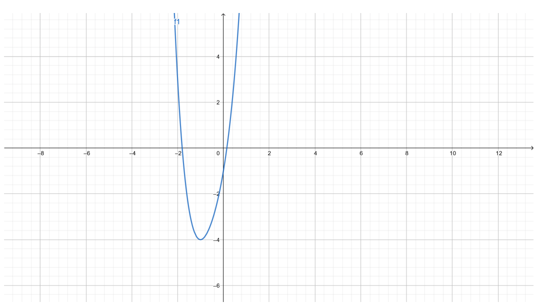

Figure 1: Polynom

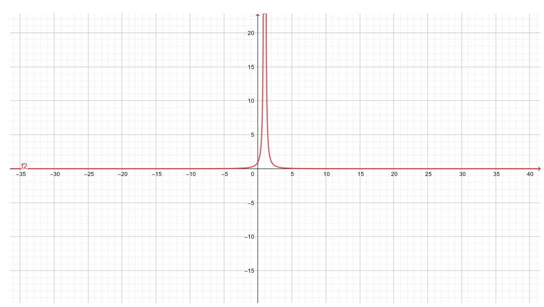

Figure 2: funkce $\frac{1}{(1-x)^2}$

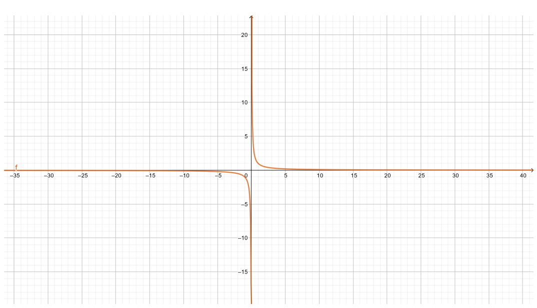

Figure 3: funkce $\frac{1}{x}$

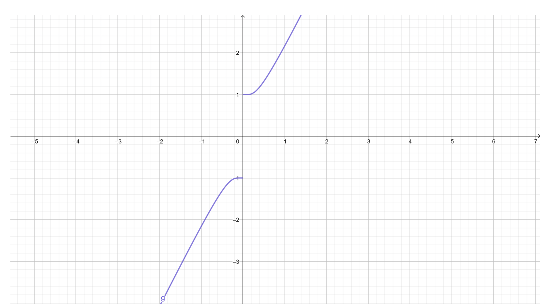

Figure 4: funkce $\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

2. U následujících funkcí určete zda jsou spojité nebo kde je nespojitost a jakého druhu.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x(x-1)^4} & \text{pro } x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

2 Derivace

Definice:

Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je číslo které značíme $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(x_0)$ nebo také $f'(x_0)$ a je definována takto

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- **Příklady :** Zkuste z definice spočítat derivace následujících funkcí $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^n$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = e^x$. (Výpočty najdete také v přednášce)
- Z definice derivace můžete také odvodit následující pravidla

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \qquad (kf)' = kf', \qquad (f \cdot g)' = f'g + fg', \qquad (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Další pravidlo, které ale vyplývá ze dvou předchozích je $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. Z jakých dvou pravidel toto pravidlo vyplývá? Zkuste si ho odvodit.
- K vypočítání derivace obecné funkce použijeme tabulku derivací elementárních funkcí a těchto pravidel. Tabulku najdete zde (Stranky doc. Hasila
- **Příklady:** Spočtěte derivace následujících funkcí:

$$f(x) = \tan x, \ f(x) = \cot x$$

- Za použiti vzorce pro derivaci inverzní funkce z přednášky spočtěte derivace funkcí $f(x) = \arcsin(x)$ a $f(x) = \arctan(x)$. Alternativně uvažte rovnici $\sin(\arcsin(x)) = x$. Zderivujte obě strany této rovnice a využijte pravidla pro derivace složené funkce, a odvoďte derivaci funkce $\arcsin(x)$.
- **Příklady:** Spočtěte derivace následujících funkcí

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \ f(x) = e^{-x^2}, \ f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}, \ f(x) = x \ln x$$

U těchto funkcí si zkuste nakreslit grafy (nebo je zjistit pomocí aplikací wolfram alpha, geogebra nebo jiných). Najděte pro jaké body x platí, že $f'(x) = 0$ jak byste charakterizovali graf funkce v okolí těchto bodů?

2.1 L´Hospitalovo pravidlo

- Následující větu můžeme využít na počítání limit.

  Máme li dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ a limitu jejich podílu $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ poté platí, existuje-li limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pak také existuje limita $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a limity se rovnají. Pozor toto platí jen pro limity typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, některé ostatní typy lze na tyto typy převést.

- Spočtěte tyto příklady (limity bez nutnosti převést)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

- Podívejte, se na limity z předchozího cvičení, které dokážete spočítat pomocí toho pravidla?

- Pozor pravidlo nemusí vždy pomoct nebo fungovat, jak ilustrují následující dva příklady

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$$

- Občas je potřeba použít L´Hospitalovo pravidlo vícekrát viz.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x) + 1}{(x-1)^2}$$

- Pokud limita není typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ občas můžeme i přesto pravidlo použít a to po úpravě výrazu na správný typ. Zkuste to pro následující příklady

$$\lim_{x\to 0} x \ln x, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right), \qquad \lim_{x\to 0} x e^{-x}$$

2.2 Diferenciál a Taylorův rozvoj

- Toto je pravděpodobně jedna z nejužitečnějších věcí diferenciálního počtu. Začneme souvislostí derivace a tečny ke grafu funkce a aproximace hodnot pomocí tečny (prvního diferenciálů).

  Z definice derivace a její geometrické interpretace víme, že v daném bodě funkce souvisí směrnice tečny v daném bodě s derivací tímto vzorcem $f'(x) = \tan\phi$. Kde ϕ je úhel který tečna svíra s osou x.

- S využitím obrázku napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 za pomocí nějakého parametru, který můžeme označit x, a pak hodnot $x_0, f(x_0), f'(x_0)$. Nápověda: vzorec pro rovnici přímky je následující $y = ax + b$, jak přijdete na hodnoty a, b?

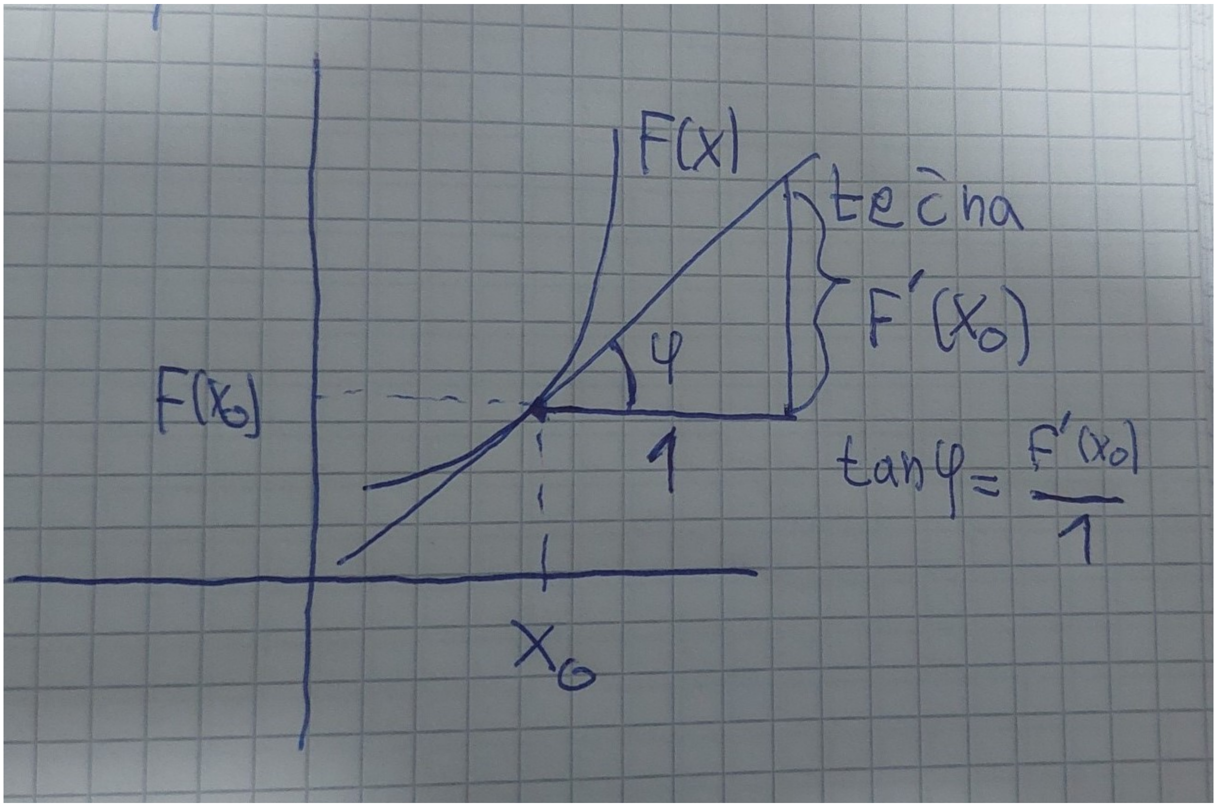

Figure 5: Tecna v bode x_0

Vzorec který byste měli dostat je následující

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Přesvědčte se že následující výraz je předpis pro rovnici normály v bodě x_0

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

- Najděte rovnice tečny a normály k následujícím funkcím v zadaných bodech

$$f(x) = e^{-x^2},\ x_0 = 0, \qquad f(x) = \sqrt{1-x},\ x_0 = 2 \qquad f(x) = \frac{1-x}{x^2-3},\ x_0 = -2$$

- Nyní si ukážeme, jak se toto dá využít k přibližnému určení hodnot funkce. Mějme například číslo $\sqrt{80}$ a za úkol, zjistit přibližnou hodnotu bez použití kalkulačky. Ze znalosti toho, že $\sqrt{81} = 9$ nám může být jasné, že číslo $\sqrt{80}$ bude o malinko menší než 9. Na tento odhad můžeme přijít následujícím způsobem.

Načrtněte si graf funkce $f(x) = \sqrt{x}$. V bodě $x_0 = 81$ uděláme tečnu. Využijte předchozího vzorce, jaký je vzorec pro rovnici této tečny? Jako odhad místo funkční hodnoty vezmeme hodnotu tečny v tomto bodě tedy v $x = 80$. Co dostanete za číslo? Tento odhad je čím přesnější čím blíže jsme bodu ze kterého tečna vychází.

- Zkuste sami přibližně určit hodnotu $\sin(0,1)$.
- Tomuto se říká odhad hodnot pomocí prvního diferenciálů. Diferenciál je malá změna funkční hodnoty daná malou změnou proměnné a popsaná následujícím vzorcem.

$$df(x)(h) = f'(x)h$$

Kde $h = x - x_0$ je právě tato malá změna (přírůstek).

- Napište vzorce pro první diferenciál následujících funkcí (pozor jedná se vlastně o funkcí dvou proměnných (a to původní proměnné x a přírůstku h.

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \sqrt{1+x}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Vyčíslete tyto diferenciály v bodě $x = 0$ a pro přírůstek $h = 0,1$.

- Jak si můžete všimnout na grafech funkcí, aproximace jsou sice dobré, ale my můžeme vypočítat ještě lepší a to pomocí polynomů vyššího řádu. Tomuto se říká taylorův rozvoj. První aproximace obsahovala první derivaci, takže vyšší aproximace budou obsahovat druhou, třetí, atd. Druhou derivací myslíme, postupné aplikování derivace, tedy $f'' = (f')'$. Jedná se vlastně o rozvoj funkce do polynomu, vždy rozvíjíme v okolí nějakého bodu (x_0). Obecný vzorec vypadá takto:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots$$

Kde $f^{(k)}$ je k-tá derivace funkce f.

- Proveďte Taylorovy rozvoje následujících funkcí. Pokračujte do jakého řádu chcete, dokážete u některých napsat vzorce pro obecný řád? (pomocí nějaké sumy nebo předpisu?). Rozvoje dělejte vždy okolo bodu $x_0 = 0$

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \sqrt{1+x}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = \ln(1+x)$$

- Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte následující limity.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

- U Taylorova rozvoje se také dá odhadnout chyba kterou se dopustíte pokud funkci aproximujete Taylorovým rozvojem n-tého řádu. Tato chyba se přibližně rovna velikosti dalšího tedy (n+1) členu. Chyba je tedy dána vzorcem

$$\text{Chyba} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

  Kde ξ leží mezi x a x_0, chyba je tedy daná jako rozmezí (interval).

- **Příklad.** Kolik členů Taylorova rozvoje funkce $\arctan x$ okolo bodu $x_0 = 1$ musíte vzít chcete-li hodnotu s přesností na 4 desetinná místa?

- Pokud je funkce nekonečněkrát diferencovatelná tak Taylorova řada (tedy rozvoj nekonečného řádu) ji popisuje přesně!

3 Průběh funkce

Znalosti diferenciálního počtu nám pomohou k zjištění chování a grafů funkcí. U funkce zadané předpisem $y = f(x)$ můžeme zjistit následujícími věci a poté zkusit určit její graf. Ukážeme si to na příkladu funkce $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

1. Určete definiční obor funkce.
2. Je funkce spojitá? Pokud ne, najděte body nespojitosti a určete jejich typ. Body nespojitosti zkuste hledat tam kde funkce není definovaná.
3. Určete paritu funkce (sudost/lichost), tím že upravíte výraz $f(-x)$. Je funkce periodická? Pokud se ve funkce neobjevují periodické funkce $\sin x$, $\cos x$ tak pravděpodobně nebude periodická, pokud se tyto funkce vyskytují, využijte jejich periodicity.
4. Najděte body x pro které platí, $f(x) = 0$. Poté co najdete tyto nulové body rozdělte definiční obor a určete kde je funkce kladná a kde záporná.
5. Najděte body x pro které platí $f'(x) = 0$, najděte definiční obor derivace funkce $f'(x)$.
6. Rozdělte definiční obor $f'(x)$ a najděte intervaly kde platí $f'(x) > 0$ (tedy funkce je rostoucí) a intervaly kde $f'(x) < 0$ (tedy funkce je klesající). Poté určete extrémy funkce $(x_0, f(x_0))$. Jedná se o lokální nebo globální extrémy? (Toto můžete zodpovědět i později, až budete mít asymptoty).
7. Najděte body x pro které platí $f''(x) = 0$, najděte definiční obor druhé derivace funkce $f''(x)$.

8. Rozdělte definiční obor $f''(x)$ a najděte intervaly kde platí $f''(x) > 0$ (tedy funkce je konvexní) a intervaly kde $f''(x) < 0$ (tedy funkce je konkávní). Poté určete inflexní body funkce $(x_0, f(x_0))$.

9. Najděte asymptoty se směrnicí i bez směrnice.

   - Bez směrnice: Jedná se o svislé přímky typu $x = x_0$, bod x_0 je takový, že platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$
   - Se směrnicí: Jedná se o přímky $y = ax + b$, pro které platí, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. Koeficienty dostanete takto: $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$

10. Načrtněte graf funkce. Prvně si do grafu zakreslete všechny důležité body (body nespojitosti, nulové body, extrémy a inflexní body), pak zakreslete asymptoty a nakonec spojte všechny body tak aby graf splňoval to co jste o funkci zjistili (její parita, periodičnost, zda je kladná či záporná, monotonie (roste, klesá), konvexnost, konkávnost)

4 Slovní úlohy

1. Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu 32 m^3 tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu.

2. Jaký tvar má mít válec, aby měl při zadaném objemu co nejmenší povrch?

5 Těžší příklad

1. Derivujte funkci x^x.

2. Spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$$

6 Odkaz na grafy a funkce v Geogebre

Geogebra

Dejte mi prosím vědět zda odkaz na Geogebru funguje, také pokud v pracovním listu najdete nějaké překlepy nebo chyby. Děkuji a hodně štěstí.