M1100F Užitečné vzorce

Kvadratické výrazy a polynomy

Binomická věta: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Vzorce na součet a rozdíl mocnin:
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$
$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

Kvadratické rovnice: $ax^2+bx+c=0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Diskriminant: $D = b^2 - 4ac$
- $D>0$, dvě reálná řešení.
- $D=0$, jedno dvojnásobné reálné řešení.
- $D<0$, dvě komplexně sdružená řešení.

Úprava na čtverec: $ax^2+bx+c = a(x+d)^2+e$
$d = \frac{b}{2a}, \quad e = c - \frac{b^2}{4a}$

Odmocniny a mocniny

Definice odmocniny: Odmocnina z x je takové číslo y, že platí $y^2 = x$
Například tedy: $x^2 = 4 \rightarrow x = \{-2, 2\}$

Pravidla pro mocniny:
$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
$x^0 = 1$
$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$
$(x^a)^b = x^{a\cdot b}$

Pozor na následující věci:

$\sqrt{x^2} = |x|$

Například řešení nerovnice $x^2 \geq 9 \xrightarrow{\checkmark} |x| \geq 3 \rightarrow x \in (-\infty,-3\rangle \bigcup \langle 3,\infty)$

Při řešení rovnic s odmocninami můžete dostat falešné kořeny, například $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=1$ Řešením dostanete, že $x = -\frac{3}{4}$ je řešení, což ale není pravda. Je důležité tedy vždy provést kontrolu.

Logaritmy a exponenciály

Definice: Logaritmus o základu a z x (značíme $\log_a x$) je takové číslo y, že platí $x = a^y$. Je-li základ roven $a = e$, jedná se o přirozený logaritmus, který značíme $\log_e = \ln$

Základní vzorce:
$\log(ab) = \log a + \log b, \quad \log\frac{a}{b} = \log a - \log b$
$\log_a b = \frac{\log a}{\log b}$
$\log b^a = a \log b$
$a^{\log b} = b^{\log a}$
$\log_a a^b = b, \quad a = e^{\ln a}$

Goniometrické funkce

Základní vzorce:
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Vzorce pro dvojnásobný úhel:
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Součtové vzorce pro sin a cos:
$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y$
$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$
$\sin(x+y)+\cos(x-y) = (\sin x+\cos x)(\sin y + \cos y)$
$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Součtové vzorce pro tan:
$\tan(x+y) = \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$
$\tan(x-y) = \frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

Cyklometrické funkce

Definice: Jsou to funkce inverzní k funkcím goniometrickým, u některých musíme omezit definiční obor tak aby byli prosté.

Definiční obory:
$\mathcal{D}(\text{arcsin}) = \langle -1, 1\rangle$
$\mathcal{D}(\text{arccos}) = \langle -1, 1\rangle$
$\mathcal{D}(\text{arctan}) = \mathbb{R}$
$\mathcal{D}(\text{arccot}) = \mathbb{R}$

Vzorce:
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\tan(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
$\tan(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(\text{arccot}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos(\text{arccot}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\tan(\text{arccot}\, x) = \frac{1}{x}$

Obdoba součtového vzorce: $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$

Komplementární úhly:
$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$
$\text{arccot}\, x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

Hyperbolické funkce

Definice:
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Základní vzorec: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$