Cvičení 4 - Spojitost a derivace funkce

M1100F

Podzim 2020

1 Spojitost

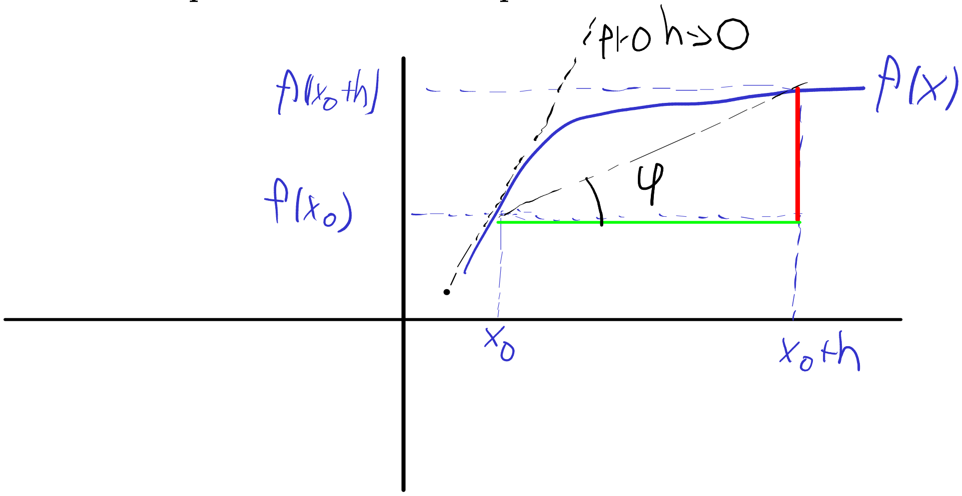
Určete zda následující funkce jsou spojité. Pokud ne určete druh nespojitosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x(x-1)^4} & x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 3 \\ 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

2 Derivace

2.1 Opakování definice a pravidel



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

nebo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Pravidla

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (k \cdot f)' = k \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

2.2 Příklady

1. Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x)$

$$f(x) = x, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = \sin x$$

2. Vypočtěte derivaci funkcí

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} \\
f(x) &= \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}, \quad f(x) = \tan x \\
f(x) &= x \ln x, \quad f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} \\
f(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}, \quad f(x) = \sin(\cos x) \\
f(x) &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\
f(x) &= \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}
\end{aligned}$$

3. Napište rovnici tečny i normály k následujícím funkcím v bodě x_0

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad f(x) = e^{-x^2}, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}, \quad x_0 = -2$$

3 l'Hospitalovo pravidlo

Použijte l'Hospitalovo pravidlo k výpočtu následujících limit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} \qquad \lim_{x \to 0} x \ln x$$

4 Domácí úloha

Vypočtěte derivaci funkce x^x libovolným způsobem.

1) funkce je spojitá v bodě x_0, jestliže $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pokud $f(x_0)$ není definováno

pak fce nemůže být spojitá.

- Typy bodů nespojitosti
  - Odstranitelná nespojitost
    vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ existuje ale není rovna $f(x_0)$ (které nemusí existovat)
  - nespojitost 1. druhu (skok)
    Existují obě vlastní jednostranné limity ale nerovnají se.
  - nespojitost 2. druhu
    Alespoň jedna jednostranná limita neexistuje

Příklad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x(x-1)^4}, & x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

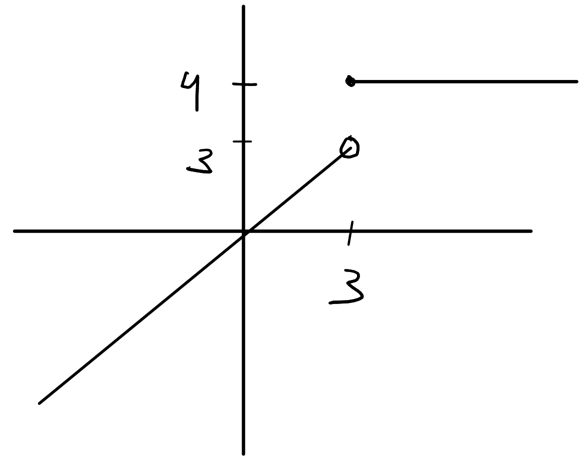
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x(x-1)^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) \text{ protože}$$

$f(0)$ není definována

Jedná se o odstranitelnou nespojitost. Funkci můžeme dodefinovat na spojitou $f(0)=1$.

- $$f(x) = \begin{cases} x & , x<3 \\ 4 & , x \geq 3 \end{cases}$$

graf:



nespojitost 1. druhu: skok

Derivace:

- $f(x)=x \Rightarrow f'(x)= ?$ z definice

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

- $$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$

$$= 2x$$

- $$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \overbrace{\sin h}^{=1}}{h} = \cos x + \lim_{h\to 0} \sin x \frac{\left(\cos^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{h}{2} - 1\right)}{h} =$$

$$= \cos x + \lim_{h \to 0} \sin x \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \to 0$$

$$= \cos x$$

Zvypočtěte derivace funkcí

Využijeme — známosti derivací elementárních funkcí
\ pravidel pro počítání s derivacemi

- $f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$

$$f'(x) = (x)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)' \quad , \quad \left| \left((x)^n\right)' = n\, x^{n-1} \right|$$

$$= 1 + \frac{2x}{2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= 1 + x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

- $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$, Pravidlo $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Vezmeme: $f = (x-1)^2 \to f' = 2(x-1)$

$g = (x+1)^2 \to g' = 2(x+1)$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)^2 - (x-1)^2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

- $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

- $f(x) = x\ln x$; pravidlo $(f\cdot g)' = f'g + fg'$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$= \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

- $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$, pravidlo $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

zde $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)' = \frac{e^{x^2}\cdot 2x \cdot 2x - e^{x^2}\cdot 2}{4x^2} = e^{x^2}\left(\frac{4x^2-2}{4x^2}\right)$$

- $$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}} \cdot \frac{-1\cdot(1+x^2) - (1-x)2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}} \cdot \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$

- $f(x) = \sin(\cos x) \Rightarrow f'(x) = \cos(\cos x)\cdot(-\sin x)$

- $$f(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

vzorec $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{6}\ \frac{\cancel{x^2-x+1}}{(x+1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{2\,\cancel{(x+1)}\,(x^2-x+1) - (2x-1)(x+1)^{\cancel{2}}}{(x^2-x+1)^{\cancel{2}}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{6}\frac{2x^2-2x+2-2x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{2}{1+\frac{(2x-1)^2}{3}}=\frac{1}{6}\frac{-3x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}+\frac{2}{3}\frac{1}{\frac{4x^2-4x+4}{3}}$$

$$=\frac{-x+1+(x+1)}{2(x^3+1)}=\frac{1}{x^3+1}$$

- $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$f'(x)=\underbrace{\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}_{\text{derivace ln}}\;\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}_{\text{derivace }\sqrt{\ }}\;\underbrace{\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}}_{\text{derivace zlomku}}$$

Vložené funkce ->

$$=\frac{1}{2}\frac{\cancel{1+\sin x}}{1-\sin x}\frac{2\cos x(-1)}{(1+\sin x)^{\cancel{2}}}=-\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}=-\frac{1}{\cos x}$$

3) tečny a normály

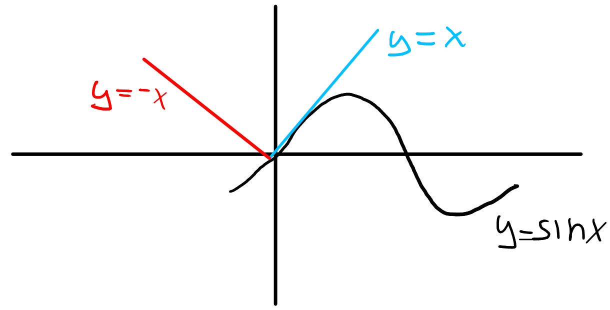
- $f(x)=\sin x$ v bodě x_0

vzorec pro tečnu

$$t: y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$=0+\cos(0)(x-0)$$

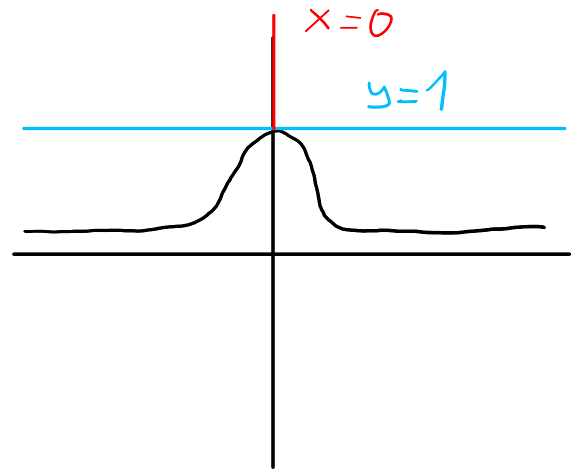
$\Rightarrow t: y = x$



normála: $n: y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$$y = 0 - x = -x$$

• $f(x) = e^{-x^2}, x_0 = 0$



$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$t: y = 1 - 0 = 1$$

$n: y = 1 - \frac{1}{0} = ??$ protože $x = 0$ není funkce

• $f(x) = \frac{1-x}{x^2-3} \mid x_0 = -2$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x^2-3)^2}$, $t: y = 3 + 11(x+2)$

$= 11x + 25$

$n: n = 3 - \frac{1}{11}(x+2)$

$= -\frac{x}{11} + \frac{31}{11}$

l'Hospitalovo pravidlo

máme funkce $f(x), g(x)$ pokud platí

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

nebo

- $\lim\limits_{x \to 0} |g(x)| = \infty$

pak existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existuje také a limity jsou si rovny.

Příklady:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, derivace $\to \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \to$

existuje $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow{der.} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} \xrightarrow{der} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

existuje $\to \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} \xrightarrow{der} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{4\cos 4x} =$

$= \frac{\frac{1}{1+0}}{4} = \frac{1}{4} \to$ existuje $\to \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} = \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to 0} x \ln x$ musíme dát do tvaru $\frac{f}{g}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{der.} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0 \rightarrow$

$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$