Cvičení 4 - Spojitost a derivace funkce

M1100F

Podzim 2020

1 Spojitost

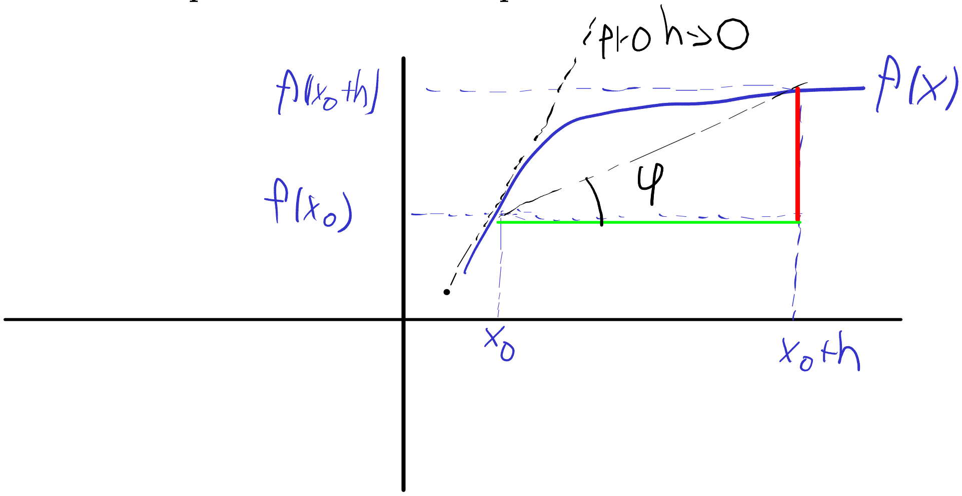
Určete zda následující funkce jsou spojité. Pokud ne určete druh nespojitosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x(x-1)^4} & x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 3 \\ 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

2 Derivace

2.1 Opakování definice a pravidel



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

nebo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pravidla

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (k \cdot f)' = k \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dodatečné příklady viz nové pdf.

2.2 Příklady

1. Vypočtěte z definice derivaci funkce $f(x)$

$$f(x) = x, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = \sin x$$

2. Vypočtěte derivaci funkcí

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}, \quad f(x) = \tan x$$
$$f(x) = x \ln x, \quad f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}, \quad f(x) = \sin(\cos x)$$
$$f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$
$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$$

3. Napište rovnici tečny i normály k následujícím funkcím v bodě x_0

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad f(x) = e^{-x^2}, \quad x_0 = 0$$
$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}, \quad x_0 = -2$$

3 l'Hospitalovo pravidlo

Použijte l'Hospitalovo pravidlo k výpočtu následujících limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} \qquad \lim_{x\to 0} x \ln x$$

4 Domácí úloha

Vypočtěte derivaci funkce x^x libovolným způsobem.

1) funkce je spojitá v bodě x_0, jestliže $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pokud $f(x_0)$ není definováno

pak fce nemůže být spojitá.

- Typy bodů nespojitosti
  - Odstranitelná nespojitost

    vlastní limita $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ existuje ale není rovna $f(x_0)$ (které nemusí existovat)
  - nespojitost 1. druhu (skok)

    Existují obě vlastní jednostranné limity ale nerovnají se.
  - nespojitost 2. druhu

    Alespoň jedna jednostranná limita neexistuje

<u>Příklad:</u>

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x(x-1)^4}, & x<0 \\[2ex] \dfrac{\sin x}{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

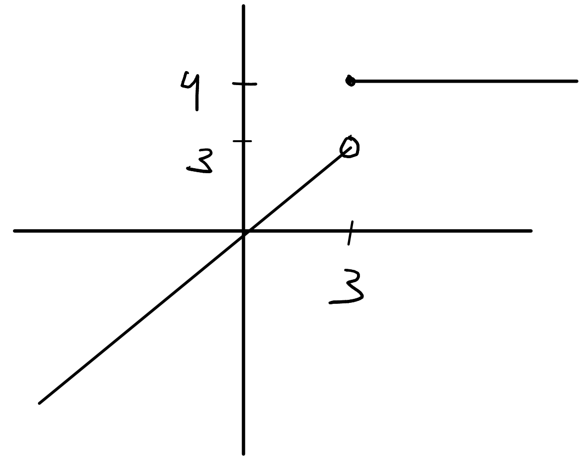
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x(x-1)^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) \text{ protože}$$

$f(0)$ není definována

Jedná se o odstranitelnou nespojitost. Funkci můžeme dodefinovat na spojitou $f(0)=1$.

- $$f(x) = \begin{cases} x, & x<3 \\ 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

graf:



nespojitost 1. druhu: skok

Derivace:

- $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=?$ z definice

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

- $$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$

$= 2x$

- $$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \overbrace{\sin h}^{=1}}{h} = \cos x + \lim_{h\to 0} \sin x \frac{(\cos^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{h}{2} - 1)}{h} =$$

$$= \cos x + \lim_{h \to 0} \sin x \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \to 0$$

$$\underline{= \cos x}$$

Zvypočtěte derivace funkcí

Využijeme — znalosti derivací elementárních funkcí
— pravidel pro počítání s derivacemi

• $f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$

$$f'(x) = (x)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)' , \quad \left| \left((x)^n\right)' = n\, x^{n-1} \right|$$

$$= 1 + \frac{2x}{2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= 1 + x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

• $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$, pravidlo $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Vezmeme: $f = (x-1)^2 \to f' = 2(x-1)$

$g = (x+1)^2 \to g' = 2(x+1)$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)^2 - (x-1)^2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

• $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

- $f(x) = x \ln x$; pravidlo $(f \cdot g)' = f'g + fg'$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

- $\frac{e^{x^2}}{2x}$, pravidlo $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

zde $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$

$\Rightarrow \left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)' = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x - e^{x^2} \cdot 2}{4x^2} = e^{x^2}\left(\frac{4x^2-2}{4x^2}\right)$

- $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}} \cdot \frac{-1 \cdot (1+x^2) - (1-x)2x}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}} \cdot \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$

- $f(x) = \sin(\cos x) \Rightarrow f'(x) = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x)$

- $f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

vzorec $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{6} \frac{\cancel{x^2-x+1}}{(x+1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{2\cancel{(x+1)}(x^2-x+1) - (2x-1)(x+1)^{\cancel{2}}}{(x^2-x+1)^{\cancel{2}}} +$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{6}\,\frac{2x^2-2x+2-2x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} +$$

$$+\frac{1}{3}\,\frac{2}{1+\frac{(2x-1)^2}{3}} = \frac{1}{6}\,\frac{-3x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{4x^2-4x+4}{3}}$$

$$= \frac{-x+1+(x+1)}{2(x^3+1)} = \frac{1}{x^3+1}$$

- $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$f'(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}_{\text{derivace } \ln}\;\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}_{\text{derivace } \sqrt{\ }}\;\underbrace{\frac{-\cos x\,(1+\sin x)-(1-\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}}_{\text{derivace zlomku}}$$

Vložené funkce ->

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{1+\sin x}}{1-\sin x}\,\frac{2\cos x\,(-1)}{(1+\sin x)^{\cancel{2}}} = -\frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$$

3) tečny a normály

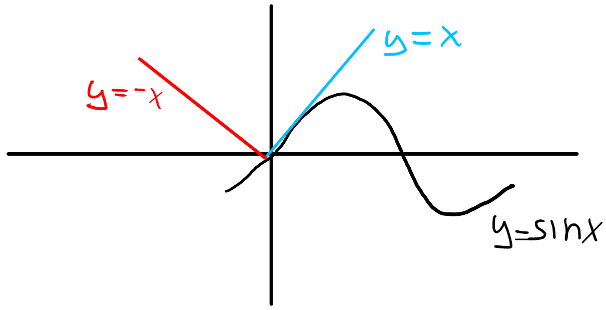
- $f(x) = \sin x$ v bodě x_0

vzorec pro tečnu

$$t: y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$= 0 + \cos(0)(x-0)$$

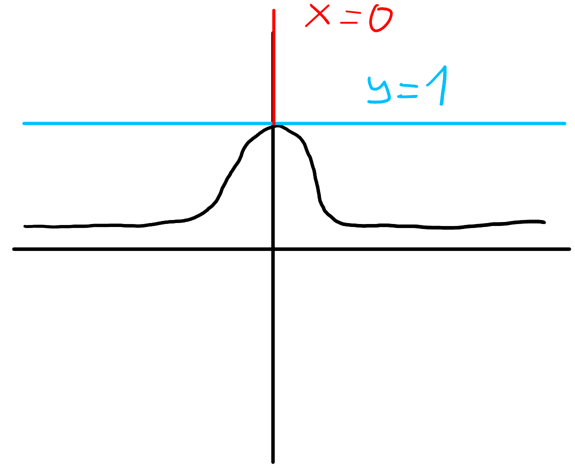
$\Rightarrow t: y = x$



normála : $n: y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$$y = 0 - x = -x$$

• $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$



$$f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$$

$$t: y = 1 - 0 = 1$$

$n: y = 1 - \frac{1}{0} = ??$ Protože $x = 0$ není funkce

• $f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}$, $x_0 = -2$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x^2-3)^2}$, $t: y = 3 + 11(x+2)$

$$= 11x + 25$$

$$n: n = 3 - \frac{1}{11}(x+2)$$

$$= -\frac{x}{11} + \frac{31}{11}$$

l'Hospitalovo pravidlo

máme funkce $f(x), g(x)$ pokud platí

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

nebo

- $\lim\limits_{x \to 0} |g(x)| = \infty$

pak existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existuje také a limity jsou si rovny.

Příklady:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, derivace $\to \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \to$

existuje $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow{\text{der.}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} \xrightarrow{\text{der}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

existuje $\to \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} \xrightarrow{\text{der}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{4\cos 4x} =$

$= \frac{\frac{1}{1+0}}{4} = \frac{1}{4} \to$ existuje $\to \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} = \frac{1}{4}$

$\lim_{x\to 0} x\ln x$ musíme dát do tvaru $\frac{f}{g}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{der.} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0 \to$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

Další příklady:

- $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right) = \Big|$ typ $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$ $\to$ lze použít L'H

pravidlo ? $\to$ musíme upravit $\Big|$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}\right) = \Big|\text{ typ } \frac{0}{0} \to \text{ teď lze použít } \Big|$$

$$\Rightarrow der. \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} = \Big| \frac{0}{0}, \text{ pomohli jsme si?}$$

$\to$ zkusíme znovu a pak znovu. Máme tu fci x^2 a $\sin x$ i jejich derivace: $x^2 \to 2x \to 2 \to 0$

$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x$ ...

vypadá to, že se výraz bude zjednodušovat. $|$

Znovu derivujeme : $\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\sin x + \underbrace{2x\cos x + 2x\cos x}_{4x\cos x} - x^2\cos x} =$

$\left|\frac{0}{0}\right|$ → ještě jednou :

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x + 4\cos x - 4x\sin x - 2x\cos x + x^2\sin x}$$

$$= \left|\frac{1}{2+4-0-0-0}\right| = \frac{1}{6}$$

• $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = \left|\text{typ } 1^{\infty} \to \text{musíme upravit}\right|$

používame $x = e^{\ln x} \to x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} =$

$$= e^{\frac{1}{1-x}\ln x} \to \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}\ln x}$$

zde můžeme LH použít

$$\to \frac{\ln x}{1-x} \to \frac{\frac{1}{x}}{-1}$$

$$= e^{\lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x}} = e^{-1}$$

Pozor L'Hospitalovo pravidlo nelze vždy úspěšně použít:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \right| \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Opakované použití L'Hospitalova pravidla nám nepomůže, dostali jsme to s čím jsme začali limita ale lze vyřešit: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \left| \text{typ } \frac{\infty}{\infty} \right| \xrightarrow{der} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x} =$

$\left| \frac{1+?}{1-?} = ?, \; ? \approx \text{neexistuje limita} \right|$. Z L'Hospitalova pravidla nelze vyvodit žádné závěry.

$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = 1$ musíme zjistit normálním způsobem.

Průběh funkce

- hezké shrnutí postupu je ve skriptech prezentace 3 slide 98.

• $f(x) = x\ln x$: a) $D(f) = (0, \infty)$

b) fce není ani sudá ani lichá

c) asymptoty

bez směrnice – svislá přímka $x = x_0$ taková že $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ je nevlastní

Podezřelé vlastní body : pouze 0

$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ → žádné asymptoty bez směrnice

d) asymptota se směrnicí : přímka $y = ax + b$ tak. že $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

nebo $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \ln x = \begin{cases} \infty & \text{pro } x \to +\infty \\ \text{neex} & \text{pro } x \to -\infty \end{cases}$$

$\to$ žádné asymptoty

e) Průsečíky s osami

s osou y: není v $D(f)$ limitně 0

s osou x: $0 = x \ln x \to x = 1$

$\to [0,0]$ „limitní"

$[1,0]$

f) Kladnost / zápornost:

$(0,1)$	$(1,\infty)$
$+ \cdot -$	$+ \cdot +$
$= -$	$= +$

g) První derivace

$(x \ln x)' = \ln x + 1 \to$ stac. body

$\ln x + 1 = 0$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

h) kde je f rostoucí / klesající

$(0, \frac{1}{e})$	$(\frac{1}{e}, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
klesá	roste

$\rightarrow$ bod $\frac{1}{e}$ je lokalní minimum s přičí hodnotou

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

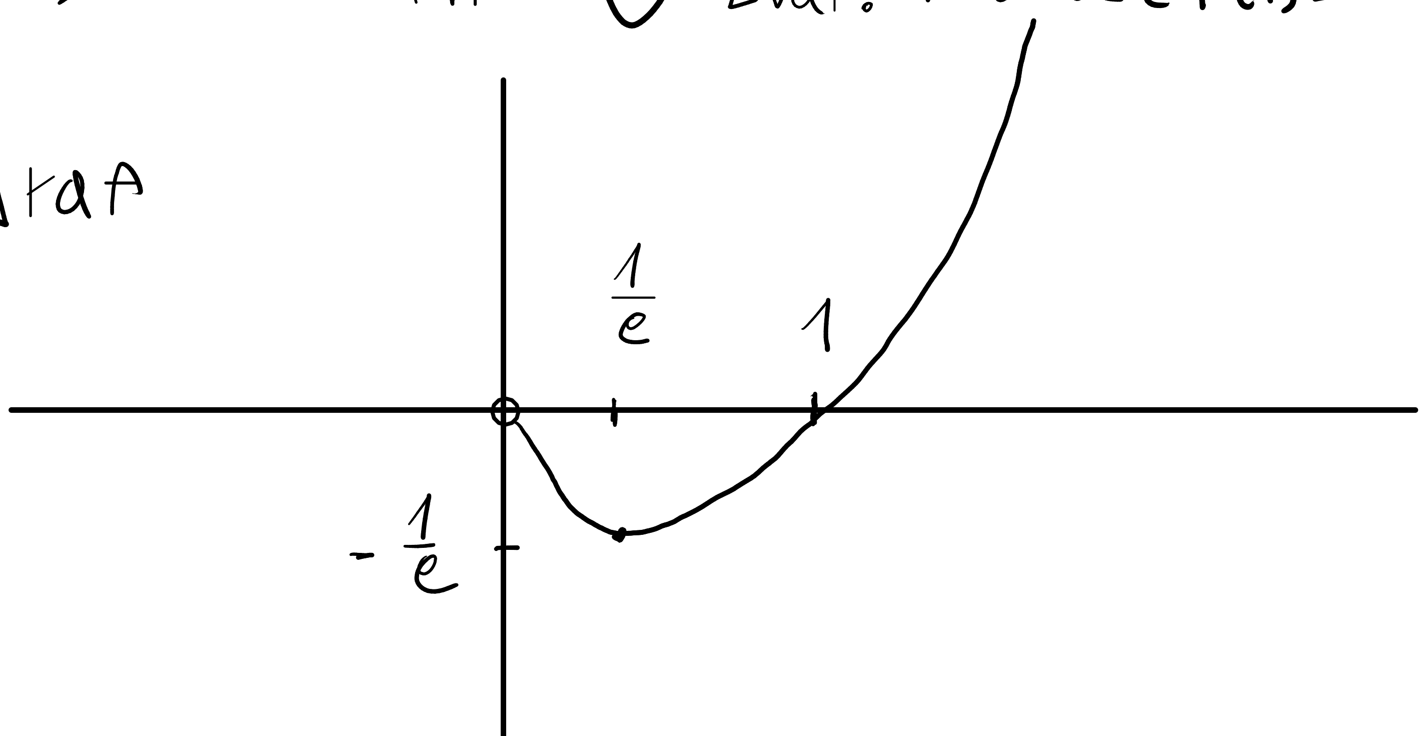
$\Rightarrow \left[\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right]$ je i globální minimum

j) druhá derivace:

$$(x \ln x)'' = \frac{1}{x}$$

$\rightarrow$ žádné inflexní body fce je v $D(f)$ konvexní $\cup$ tvar. protože $f''(x) > 0$

$\rightarrow$ graf



- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

a) $D(f) = R \setminus \{0\}$

b) sudost, lichost, periodičnost:

$f(-x) = \frac{-\sin x}{-x} = f(x) \to$ sudá fce

$f(x)$ není periodická !

c) asymtoty bez směrnice

$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\sin x}{x} = 1 \to$ žádné

d) asymptoty se směrnicí

$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = 0$

$y = 0$ asymptota

e) průsečíky s osami

s osou y: pro $x = 0$ limitně

S osou x: $\frac{\sin x}{x} = 0 \iff \sin x = 0$

$x = k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

f) kladnost, zápornost

$x > 0 \quad \frac{\sin x}{x} > 0 \iff \sin x > 0$

$x < 0 \quad \frac{\sin x}{x} > 0 \iff \sin x < 0$

-> znaménko je převážně určeno fcí $\sin x$ pro $x < 0$ je opačné, $x > 0$ je stejné jako fce $\sin x$

g) první derivace

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

stac. body: $\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = 0$

$$x\cos x - \sin x = 0$$

$x = \operatorname{tg} x \Rightarrow$ numerické řešení

$x = 0, \pm 4.5, \pm 7.725, \pm 10.9 \ldots$

~ periodické (podívejme se na $\frac{\sin x}{x}$

? kde má tato funkce stac. body, lze

odhadnout.), monotonie má také stejné

vlastnosti jako $\sin x$

a) druhá derivace

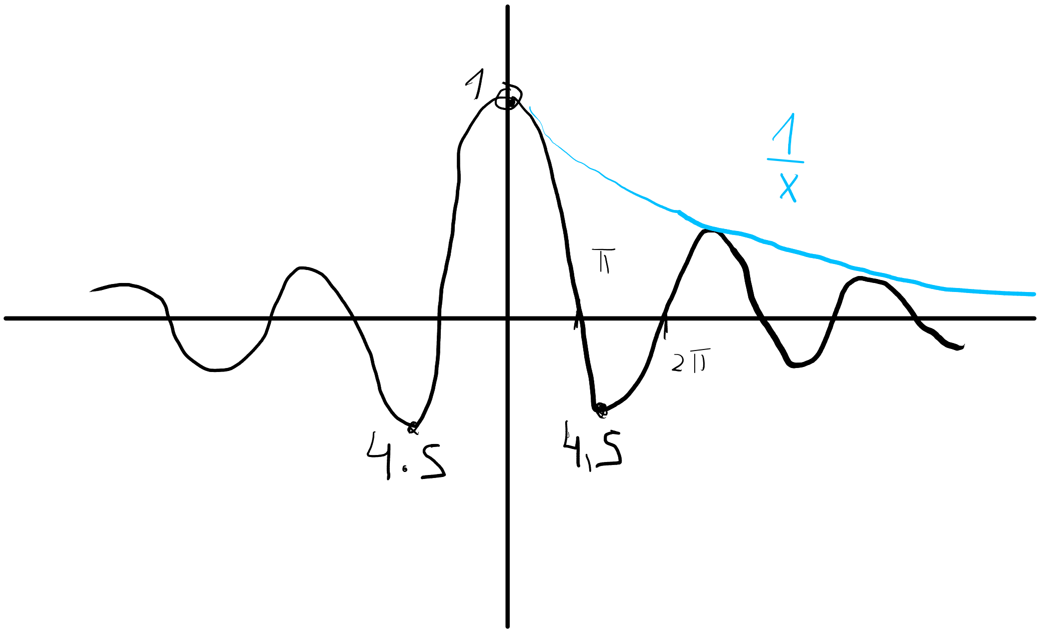
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'' = \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{x^2} - 2\,\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

$$= \frac{\sin x(2 - x^2) - 2x\cos x}{x^3}$$

$\Rightarrow$ znovu numerické řešení pro inflexní body

$$x = \pm 2.08, \pm 5.94, \pm 9.205$$

$\Rightarrow$ graf:



Jedná se o funkci sinx, omezenou $\frac{1}{x}$.

- $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

a) $D(f)$: $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} > 0 \Rightarrow 1-\sin x > 0$

$1 > \sin x$

$D(f) \in R$ kromě bodů kde $\sin x = \pm 1$

$\Rightarrow x \neq (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}$

b) sudost, lichost, periodičnost

$f(-x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \ln\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)^{-1} = -f(x)$

lichá funkce.

jediná závislost na x je přes sinx $\Rightarrow$
f(x) je periodická s periodou 2π.

c) asymptoty bez směrnice

$$\lim_{x\to\frac{(2k-1)}{2}\pi} \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \dots = \left|\ln\sqrt{\frac{0}{2}} = -\infty\right| \\ \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \dots = \left|\ln\sqrt{\frac{2}{0}} = +\infty\right| \end{cases}$$

$\Rightarrow$ asymptoty $x = \frac{(2k-1)}{2}\pi$

d) asymptoty bez směrnice

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$b = \lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje $\to$ žádné

e) Průsečíky s osami

s osou y: $f(0) = \ln\sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = 0$

s osou x: $0 = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \Rightarrow$

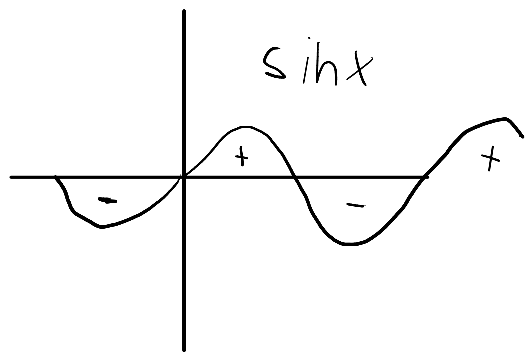
$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = 1 \Rightarrow \frac{1-\sin x}{1+\sin x} - 1 = 0$$

$$\frac{1-\sin x-(1+\sin x)}{1+\sin x} = 0$$

$$\frac{-2\sin x}{1+\sin x} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi}$$

f) kladnost, zápornost

$(-\pi, 0)$	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$	$(2\pi, 3\pi)$
+	−	+	−



g) první derivace

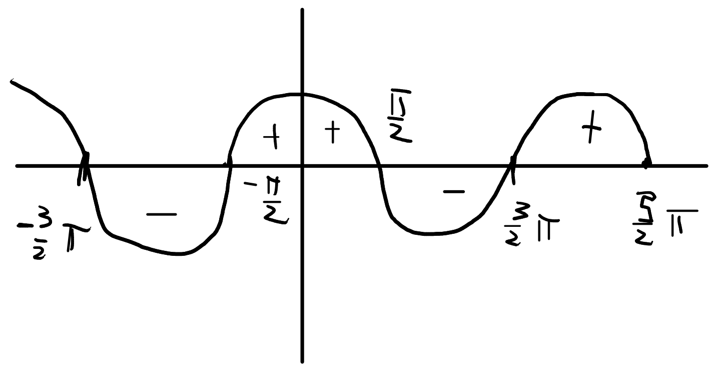
- počítali jsme

$$\left(\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)' = -\frac{1}{\cos x} \Rightarrow \text{žádné stac.}$$

body, ale lokální extrémy nebo body kde

Se mění monotonie funkce mohou také být v bodech kde $f'(x)$ není definovaná tj. kde $\cos x = 0$ tj $x = \frac{\pi}{2} - k\pi = \frac{(2k-1)}{2}\pi$

$\left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$
$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$
$f(x)$ roste	$f(x)$ klesá	$f(x)$ roste	$f(x)$ klesá



druhá derivac

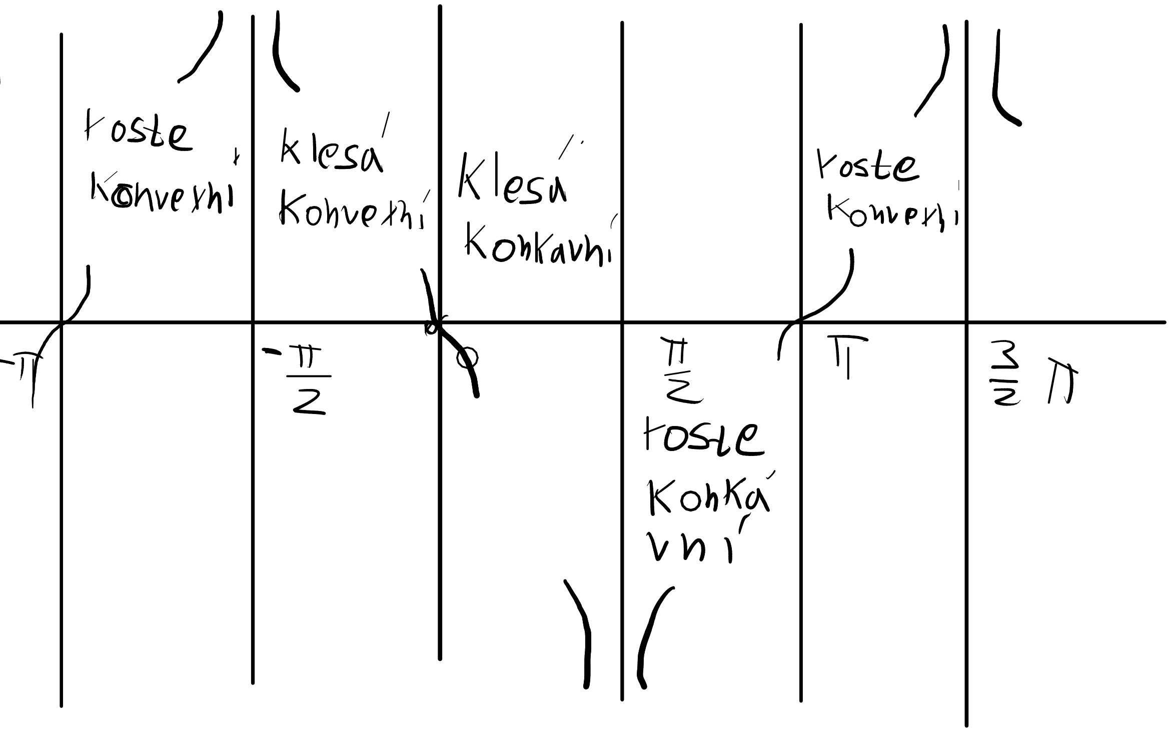
$$\left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}$$

$\rightarrow x = k\pi$ inflexní body a $x = \frac{(2k-1)}{2}\pi$ body kde $f''(x)$ není definová (také musíme brát)

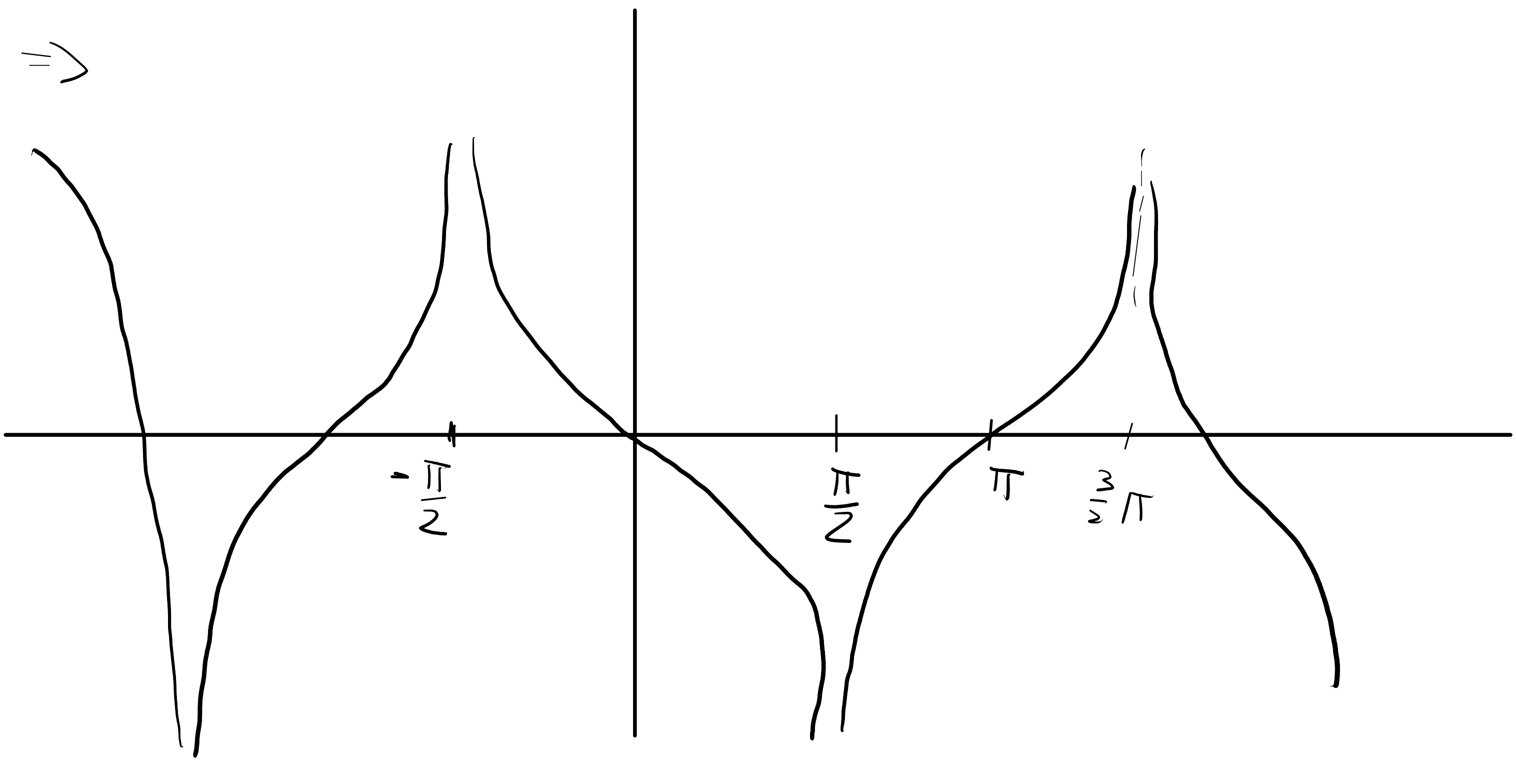
$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
$f''(x)>0$	$f''(x)>0$	$f''(x)<0$	$f''(x)<0$
konvexní	konvexní	konkávní	konkávní
$\cup$	$\cup$	$\cap$	$\cap$

$\Rightarrow k\pi$ jsou inflexní body

graf


roste konvexní
klesá konvexní
klesá konkávní
roste konkávní
roste konvexní
-π
-π/2
0
π/2
π
3/2 π

=>


-π/2
π/2
π
3/2 π