Cvičení 1-opakování středoškolské matematiky

M1100F

Podzim 2020

1 Informace o předmětu a cvičení

- Účast na cvičení není povinná, řešené příklady a videozáznam cvičení bude všem k dispozici.
- Během semestru se bude psát pět písemek, každá za dva body.
- K udělení zápočtu a přístupu ke zkoušce potřebujete celkově alespoň 5 bodů.
- Ke zkoušce si berete 5 až 10 bodů, podle úspěšnosti v písemkách.
- Pokud budete mít jakékoliv dotazy, nebo budete chtít konzultaci neváhejte mi napsat, je jedno jestli zprávu na teams nebo na mail.

2 Elementární funkce a jejich vlastnosti

2.1 Polynomy a mnohočleny

Vzorce

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \text{binomická věta}$$

1. Mějme výraz $y = 2x^2 - 12x - 14$, proveďte: úpravu na čtverec, náčrt grafu, vyřešení kvadratické rovnice y=0.

   - Úprava na čtverec

   $$2x^2 - 12x - 14 = 2(x^2 - 6x - 7) = 2((x-3)^2 - 16)$$

   - Náčrt grafu: 1
   - Kvadratická rovnice

   $$2x^2 - 12x - 14 = 0 \to x^2 - 6x - 7 = 0, \quad \mathrm{D} = 36 - 4 \cdot (-7) = 64$$

   $$x_{1,2} = \frac{6 \pm 8}{2} \to x_1 = 7, x_2 = -1$$

2. Rozložte výraz $(x^2-2x+1)^4$.

$$(x^2-2x+1)^4=(x-1)^8=x^8-8x^7+28x^6-56x^5+70x^4-56x^3+28x^2-8x+1$$

3. Převeďte $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}-2$ na společný jmenovatel a upravte do základního tvaru

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}-2=\frac{(x+3)^2+(x-3)^2-2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2+6x+9+x^2-6x+9-2(x^2-9)}{x^2-9}$$

$$=\frac{36}{x^2-9}$$

4. Najděte všechna $x\in\mathbb{R}$, pro která platí

$$2x^2-12x-14<0,\quad x^2-2x-3>0$$

Prvně

$$2x^2-12x-14<0\rightarrow x^2-6x-7<0\rightarrow (x+1)(x-7)<0$$

$(-\infty,-1)$	$(-1,7)$	$(7,\infty)$
$(x+1)(x-7)>0$	$(x+1)(x-7)<0$	$(x+1)(x-7)>0$

Tedy $x\in(-1,7)$ a zároveň musí platit

$$x^2-2x-3>0\rightarrow (x-1)^2-4>0\rightarrow (x-1)^2>4$$

$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$(x-1)^2>4$	$(x-1)^2<4$	$(x-1)^2>4$

Tedy výsledek je průnik obou jednotlivých řešení $x\in(3,7)$

5. Najděte minimum výrazu $y=2x^2+16x-12$.

Úpravou na čtverec dostaneme $2x^2+16x-12=2((x+4)^2-22)$, tedy $x=-4$, je minimum a také vrcholem paraboly. Graficky můžeme odečíst $x=-4$ jako bod mezi průsečíky s osou x. Alternativně derivací funkce $f(x)=2x^2+16x-12$, dostaneme $f'(x)=4x+16$, tedy $x=-4$, je řešením rovnice pro minimum $f'(x)=0$

6. Vyřešte rovnici $x^6-7x^3-8=0$

Substitucí $y=x^3$ dostaneme kvadratickou rovnici pro y jejíchž řešení je $-1,8$, obrácenou substitucí dostaneme $x_1=-1$ a $x_2=2$.

7. Vyřešte nerovnici $\frac{(5x-3)(x+4)}{x(6-x)}\leq 0$

Najdeme nulové body každého člene, rozdělíme reálnou osu na intervalu a zkoumáme jednotlivá znaménka:

$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,\frac{3}{5})$	$(\frac{3}{5},6)$	$(6,\infty)$
$\frac{(-)\cdot(-)}{(-)\cdot(+)}=-$	$\frac{(-)\cdot(+)}{(-)\cdot(+)}=+$	$\frac{(-)\cdot+)}{(+)\cdot(+)}=-$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)\cdot(+)}=+$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)\cdot(-)}=-$

8. Vyřešte rovnici $x^2-4x+5=0$, nad $\mathbb{C}$

$$\mathrm{D}=16-20=-4,\quad \text{použijeme komplexní } i=\sqrt{-1},\quad x_{1,2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$$

2.2 Mocniny a absolutní hodnoty

Vzorce

$$a^0 = 1, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad a^{1/r} = \sqrt[r]{a}$$
$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

1. Vyřešte rovnice $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+7} = -4$ a $|8-5x| = 5x-8$

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+7} = -4 \to (x+2) - 4\sqrt{x+2}\sqrt{x+7} + 4(x+7) = 16$$

$$4\sqrt{x+2}\sqrt{x+7} = 5x+14 \to 16(x+2)(x+7) = (5x+14)^2$$

$$\text{Dořešte jako kvadratickou rovnici,} \quad x_1 = -\frac{14}{9}, x_2 = 2$$

u $|8-5x| = 5x-8$ si lze povšimnout, že výraz uvnitř absolutní hodnoty se liší od pravé strany pouze znaménkem, tedy řešení je $x \in \langle \frac{8}{5}, \infty)$ protože, $|-f(x)| = f(x)$ platí jen pro takové x, pro které platí $f(x) \geq 0$.

2. Načrtněte grafy funkcí $y = 3\sqrt{x-1} + 2$, $y = 2|x-3| + 1$ a $y = \frac{1}{x-1} + 3$
Grafy 2,3,4

3. Načrtněte graf funkce $y = |\frac{x+1}{x-2}|$
$y = \frac{x+1}{x-2}$ prvně převedeme do tvaru $a + \frac{b}{x+c}$, který umíme nakreslit a poté se postaráme o absolutní hodnotu.

$$y = \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{x-2+2}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

Graf 5

2.3 Logaritmy a exponenciála

Vzorce

$$\log_a x = y \leftrightarrow x = a^y, \quad \log a^b = b \log a, \quad \log(ab) = \log a + \log b$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \quad \log_a b = \frac{\log a}{\log b}, \quad \ln x = \log_e x, e = 2.718..$$

1. Vyřešte rovnice $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$

$$2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \to 2^{3x-1} \cdot 2^2 = 2^{3(x+1)} \cdot \left(2^{-1}\right)^x \to 2^{3x+1} = 2^{3(x+1)-x}, \quad \text{zlogaritmujeme obě strany}$$

$$3x+1=2x+3 \rightarrow x=2$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(2-x)=-2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=(2-x) \rightarrow x=-2$$

2. Vyřešte rovnice $4^x+6^x=2\cdot 9^x$ a $\log_2(x+7)-\log_2 x=3$

$$4^x+6^x=2\cdot 9^x \rightarrow 2^{2x}+2^x3^x=2\cdot 3^{2x} \quad \text{podělíme} \quad 2^x3^x$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x+1=2\left(\frac{3}{2}\right)^x \quad \text{substitucí } a=\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{dostaneme kvadratickou rovnici s řešením } x=0.$$

$$\log_2(x+7)-\log_2 x=3 \rightarrow \log_2\frac{x+7}{x}=3 \rightarrow 8=\frac{x+7}{2x} \rightarrow x=1$$

3. Určete definiční obor funkce $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\ln(|x|-2)}$

$$x^2-3x+2\leq 0 \rightarrow x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 2,\infty) \quad \text{zároveň} \quad |x|-2>0 \rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$$

Ale také nesmíme zapomenout, že nelze dělit nulou a tedy bod $\ln(|x|-2)=0$, který je pro $x=-3,3$ vyřadit, celkově $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(-3,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$

4. Vyřešte rovnice $x^{\log_7 x^2}=49x^3$ a $\log x^3+2=\frac{10}{\log x^2}$
Zlogaritmujeme celou rovnici $\log_7$ a využijeme vlastností logaritmu

$$\log_7 x^2\log_7 x=2+\log_7 x^3 \rightarrow 2(\log_7 x)^2-3\log_7 x-2=0,$$

$$\text{po substituci, vyřešíme kvadratickou rovnici a dostaneme,} x_1=\frac{\sqrt{7}}{7}, x_2=49$$

5. Dokažte výše uvedené vzorce z definice (definice je ekvivalentní s prvním vzorcem, ten tedy nedokazujte).

2.4 Goniometrické funkce

Vzorce

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cot x}, \quad \sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x, \quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

1. Určete definiční obor daného výrazu a potom ho zjednodušte $\frac{1}{1+\tan x}-\frac{\cot x}{1+\cot x}$

Definiční obor získáme řešením rovnic $1+\tan x=0, 1+\cot x=0$, ale také nezapomeneme, že sama funkce $\cot x$ má omezený definiční obor. Celkově dostaneme $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}+k\pi\}$.

Úprava vzorce je převedení na společný jmenovatel

$$\frac{1}{1+\tan x} - \frac{\cot x}{1+\cot x} = \frac{1+\cot x - \cot x(1+\tan x)}{(1+\tan x)(1+\cot x)} = \frac{1-\cot x \tan x}{(1+\tan x)(1+\cot x)} = 0$$

2. Určete pro která $x \in \mathbb{R}$ je definována daná rovnost a pak ji dokažte $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

   Stejným způsobem jako minulý příklad dostaneme $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Rovnici dokážeme úpravou pravé strany:

$$1+\tan^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3. Dokažte rovnost $\sin(x+\frac{\pi}{2}) - \sin(x-\frac{\pi}{2}) = 2\cos x$

   Využijeme vztahů $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ a $\sin(x-\frac{\pi}{2}) = -\cos x$, které můžeme dokázat například graficky, všimneme si, že grafy sin a cos jsou stejné jen posunuté.

4. Nakreslete graf $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{2})$ a určete periodu a obor hodnot Graf 6

5. Dokažte následující vzorce $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ a $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

$$\frac{1-\cos x}{2} = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$$

$$\frac{1+\cos x}{2} = \frac{1+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2} = \cos^2\frac{x}{2}$$

6. Vyřešte rovnici $3\cos x+3 = 4\cos^3 x+4\cos^2 x$

   $\cos x+3 = 4\cos^3 x+4\cos^2 x \to 4\cos^2 x(\cos x+1)-3(\cos x+1)=0 \to (\cos x+1)(4\cos^2 x-3)=0$

   vyřešíme jednotlivé závorky zvlášť a dostaneme $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\pi+2k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{11\pi}{6}+k\pi\}$

2.5 Další funkce

Hyperbolické a cyklometrické funkce

$$\arcsin x = \sin^{-1} x, \quad \arccos x = \cos^{-1} x$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

1. Upravte výraz $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ s použitím hyperbolických funkcí.

   Vynásobíme zlomek jedničkou ve tvaru $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$ a dostaneme

$$\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

3 Zajímavosti

Můžete si na internetu vyhledat známé funkce, které nejsou elementární, například:

- **Gamma funkce**, jedná se zobecnění faktoriálu $n!$ na všechny reálné čísla. Můžete tedy definovat například faktoriál jedné poloviny nebo faktoriál π.
- **Riemannova Zeta funkce**, pokud najdete všechny nuly této funkce, dostanete milión dollarů.
- **Error funkce**

4 Domácí úloha

Zde (snad) každý týden bude zajímavý příklad na dané téma. Domácí úlohy jsou nepovinné, ale můžete mi je poslat a já vám je opravím nebo mi napsat a já vám s ní pomůžu, pokud máte zájem.

Pohybující se rovinnou vlnu můžeme poslat jako funkci polohy x a času t.

$$W = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

Jakou roli hrají parametry A, k, ω, ϕ?
Mějme dvě takové vlny, které se liší jen o ϕ

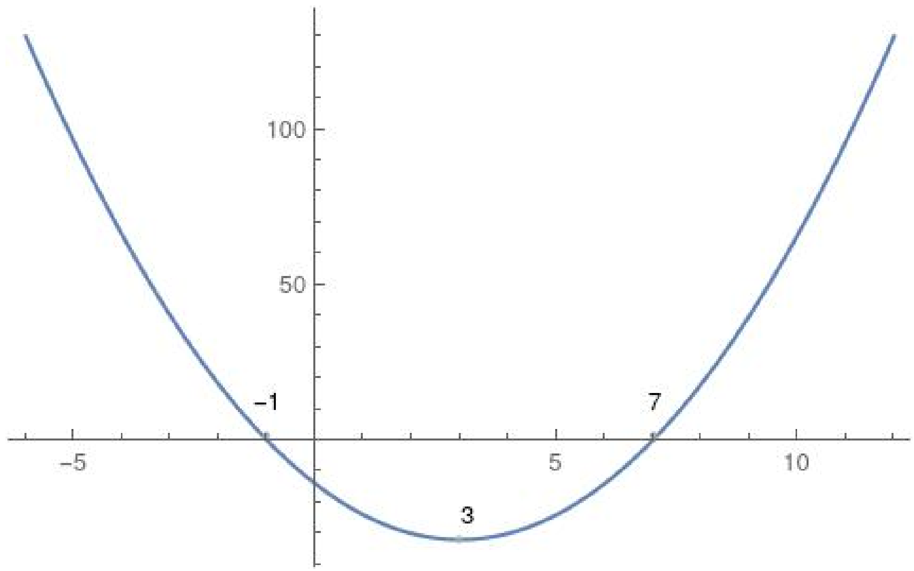
$$W_1 = A\cos(kx - \omega t), \quad W_2 = A\cos(kx - \omega t + \phi),$$

Tyto dvě vlny spolu mohou interferovat, matematicky se jedná o novou vlnu, která vznikne sečtením $W = W_1 + W_2$. Rozepište výraz pro W a zjednodušte. K lepšímu pochopení nově vniklé vlny si zkuste nalézt podmínky pro ϕ při kterých je W maximální (konstruktivní interference) a naopak minimální (destruktivní interference).

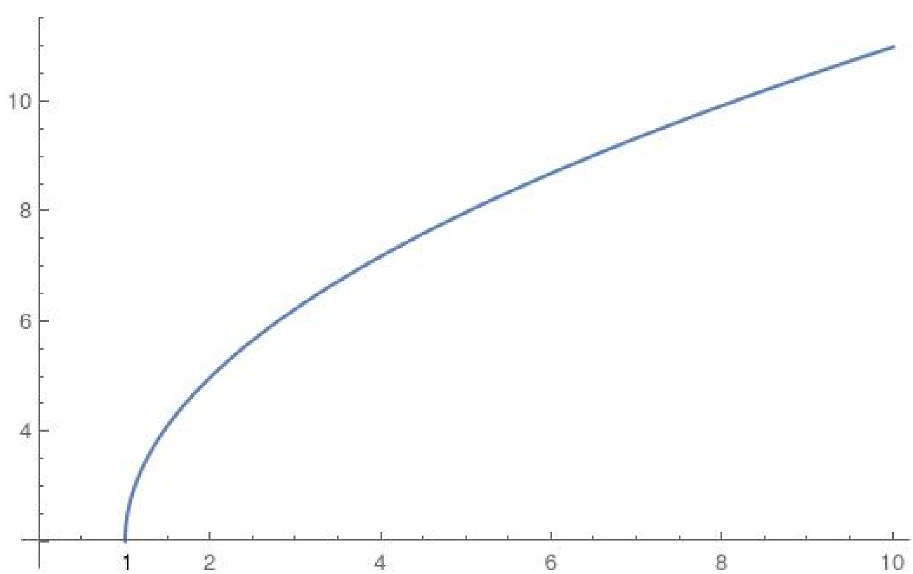
Vlny se také dají popisovat pomocí komplexních funkcí jako

$$W = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

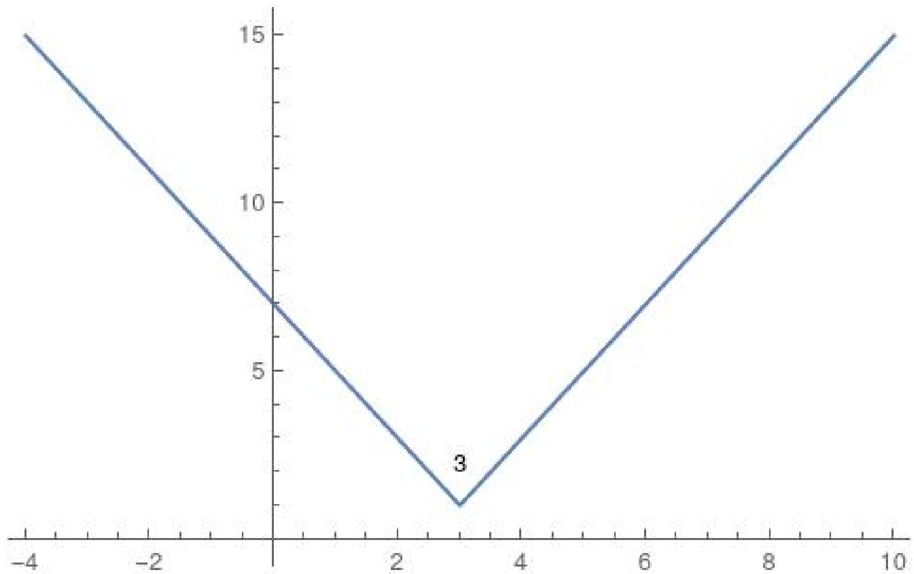
Najděte reálnou část výše uvedeného výrazu a porovnejte s reálnou cosinovou vlnou.



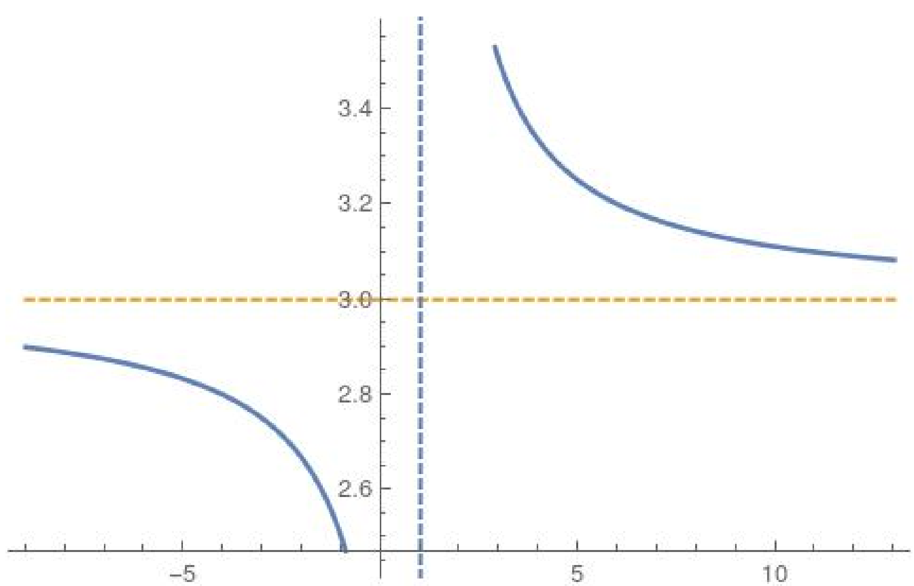
Obrázek 1: graf1



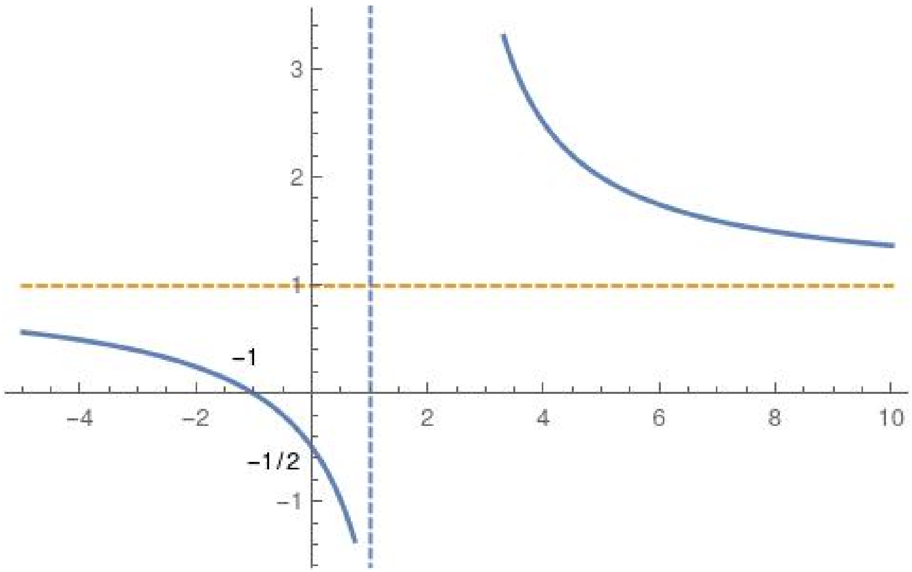
Obrázek 2: graf2



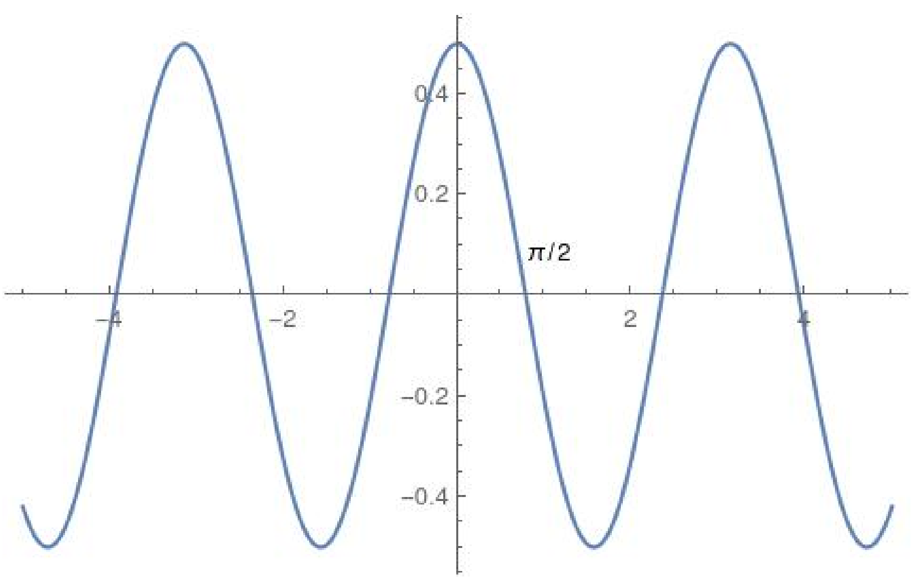
Obrázek 3: graf3



Obrázek 4: graf4



Obrázek 5: graf5



Obrázek 6: graf6