Cvičení 2 - rozbor písemky, definiční obory funkci, parita funkcí a limity

M1100F

Podzim 2020

1 Ukázkové řešení písemky

1. Vyřešte rovnici nad $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x-1} = 5 - \sqrt{x+4}$$

2. Převeďte zlomky na společného jmenovatele a zjednodušte.

$$\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} + \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$$

3. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro které platí.

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x \sin 2x$$

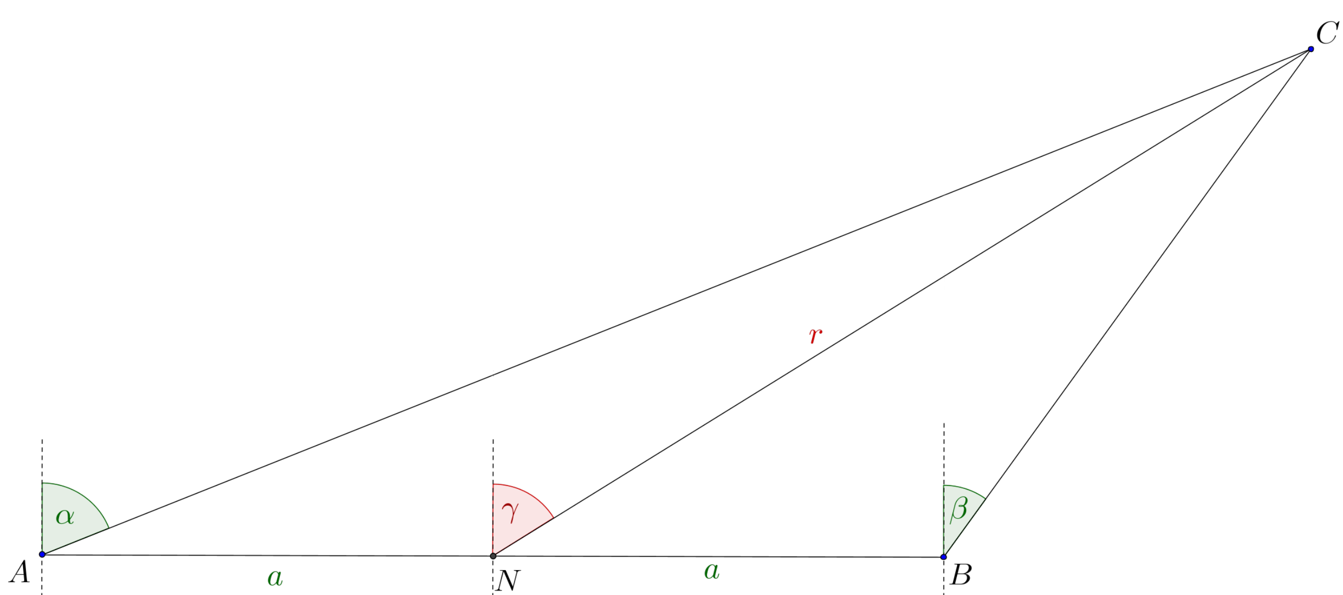
4. Načtrněte graf funkce a najdětě x pro které platí $f(x) = 0$, pro každou z následujících funkcí.

$$f_1(x) = 2x^2 - 5x + 2, \quad f_2(x) = \sqrt{\sin x}, \quad f_3(x) = |x+1| - |3-x| + 2$$

5. Najdětě reálnou a imaginární část, velikost a argument následujícího čísla a také číslo komplexně sdružené

$$\frac{3i+2}{2i-3}$$

6. **Binokulární vidění.** Víte, proč má člověk dvě oči a ne třeba jenom jedno? Pokud ne, tak se to v této úloze dozvíte. Nejdřív se ale podívejte na pěkný obrázek:



Máte dvě oči (na obrázku body A, B) ve vzdálenosti $2a$ od sebe a jimi sledujete nějaký předmět (bod C). Vaše levé oko vidí předmět pod úhlem α, zatímco pravé oko jej vidí pod úhlem β. Oba úhly se berou jako odchylka od přímého směru, která je směrem doprava kladná a doleva záporná.

Přesně uprostřed mezi očima máte nos (bod N). Vypočtěte vzdálenost předmětu od vašeho nosu (vzdálenost r na obrázku) a rovněž úhel vzhledem k ose procházející nosem (na obrázku γ, počítá se stejně jako ostatní dva úhly). Zelené údaje na obrázku znáte, červené máte dopočíst.

V tomto výpočtu je tedy tajemství toho, jak mohou lidi vnímat obraz trojrozměrně, i když mají k disposici jenom dvojrozměrné obrazy na sítnici. Prostě jde o to, že jeden a týž předmět vidíme ze dvou očí a podle úhlů, pod kterými předmět oči vidí, mozek automagicky vzdálenost dopočte.

2 Dodatečné středoškolské příklady

1. Vyřešte rovnici a proveďte zkoušku

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}=1 \quad \backslash^2$$

$$x+3+2\sqrt{x+3}\sqrt{x+1}+x+1=1 \rightarrow 2\sqrt{x+3}\sqrt{x+1}=-3-2x \quad \backslash^2$$

$$4(x+3)(x+1)=(3+2x)^2 \rightarrow 16x+12=12x+9 \rightarrow x=-\frac{3}{4}$$

Zkouška:

$$\mathbf{LS}=\sqrt{3-\frac{3}{4}}+\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\neq\mathbf{PS} \implies x \in \emptyset$$

2. Najděte funkci inverzní k

$$f(x)=x^2-2x, \quad f(x)=\log_{\frac{1}{4}}x, \quad f(x)=\frac{2x+3}{3x+5} \quad f(x)=\sin 2x+1$$

f(x) není prostá proto dvě řešení viz níže.

$y=x^2-2x$, Prohodíme x a y, a upravíme $x=y^2-2y \rightarrow x=(y-1)^2-1 \rightarrow y=1\pm\sqrt{x+1}$

$$y=\log_{\frac{1}{4}}x \rightarrow y=\left(\frac{1}{4}\right)^x \quad \text{přímo z definice}$$

$$y=\frac{2x+3}{3x+5} \rightarrow x=\frac{2y+3}{3y+5} \rightarrow x(3y+5)=2y+3 \rightarrow y(3x-2)=3-5x \rightarrow y=\frac{3-5x}{3x-2}$$

$$y=\sin 2x+1 \rightarrow x=\sin 2y+1 \rightarrow x-1=\sin 2y \rightarrow \arcsin(x-1)=2y \rightarrow y=\frac{1}{2}\arcsin(x-1)$$

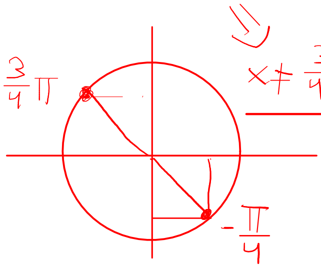
3. Určete definiční obor následujících funkcí

$$f(x) = \ln \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, \quad \text{a} \quad f(x) = \frac{\arccos \frac{3x-2}{5}}{5^x \cdot 2^x - 100^{x-1}}$$

$f(x) = \ln \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ v logaritmu musí být kladné čislo a ve jmenovateli nesmí být nula:

$+\ \sin x + \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi$

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = -\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos 2x} \to \cos 2x < 0 \to x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$$



$f(x) = \dfrac{\arccos \frac{3x-2}{5}}{5^x \cdot 2^x - 100^{x-1}}$ definiční obor arccos je od -1 do 1

$$-1 \leq \frac{3x-2}{5} \leq 1 \wedge 5^x \cdot 2^x - 100^{x-1} \neq 0$$

$$x \in \langle -1, \frac{7}{3} \rangle \wedge x \neq 2 \to x \in \langle -1, 2) \cup (2, \frac{7}{3} \rangle$$

4. Určete paritu následujících funkcí

$$f_1(x) = \frac{\cos x \sin x \cos(\sin x)}{2^x - 2^{-x}} \quad \text{a} \quad f_2(x) = \frac{\arcsin \sqrt[3]{4x^3 + 5x}}{x^4} \cdot |x|^{\sin^2 x}$$

$$f_1(-x) = \frac{\cos(-x)\sin(-x)\cos(\sin(-x))}{2^{-x} - 2^x} = \frac{\cos(x)(-1) \cdot \sin(x)\cos(-\sin x)}{-2^x + 2^{-x}} = f(x) \quad \text{sudá}$$

$$f_2(-x) = \frac{\arcsin \sqrt[3]{4(-x)^3 - 5x}}{(-x)^4} \cdot |-x|^{\sin^2(-x)} =$$

informace o absolutní hodnotě níže

$$= \frac{-\arcsin \sqrt[3]{4(x)^3 + 5x}}{(x)^4} \cdot |x|^{\sin^2(x)} = -f_2(x)$$

5. Rozložte na parciální zlomky

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

$$\frac{2x^2 - x}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{2x^2 - x}{x^2(x+2) - 4(x+2)} = \frac{2x^2 - x}{(x+2)(x^2-4)} = \frac{2x^2 - 2}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$$

$$2x^2 - x = A(x-2) + B(x^2-4) + C(x+2)^2 \to 2 = B + C \wedge -1 = A + 4C \wedge 0 = -2A - 4B + 4C$$

$$A = -\frac{5}{2}, B = \frac{13}{8}, C = \frac{3}{8}$$

3 Komplexní čísla

Vzorce
$i^2 = -1$

- Algebraický tvar: $z = a + bi$, kde $\mathcal{R}e(z) = a$ a $\mathcal{I}m(z) = b$ jsou reálná a imaginární část.

- Polární tvar: $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$, díky Eulerově vzorci: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
- Velikost: $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot z^*}$
- Argument: $\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathcal{R}e(z)}{|z|}$ nebo $\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathcal{I}m(z)}{|z|}$
- Umocňování $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$

1. Ukažte, že platí

$$\mathcal{R}e(z) = \frac{z+z^*}{2}, \quad \mathcal{I}m(z) = \frac{z-z^*}{2i}$$

$$\frac{a+bi+a-bi}{2} = a, \quad \frac{a+bi-a+bi}{2i} = b$$

2. Nalezněte tvar čísla $z_1 \cdot z_2$, znáte-li tvary komplexních čísel z_1 a z_2

$$z_1\cdot z_2 = (a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \quad \text{nebo}$$

$$z_1\cdot z_2 = r_1r_2\left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right)\left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right) = r_1r_2\left(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right)$$

3. Nalezněte řešení následujících rovnic

Podrobnosti níže

$$z^2 = i, z^3 = -1, z^6 = 64$$

$$z^2 = i \to r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi) = 0 + i \to \phi = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \wedge \langle 0, 2\pi\rangle$$

$$z^3 = -1 \to r^3\left(\cos 3\phi + i\sin 3\phi\right) = -1 \to r = 1, \cos 3\phi = -1 \wedge \sin 3\phi = 0 \to \phi = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \wedge \langle 0, 2\pi\rangle$$

$$z^6 = 64 \to r = 2, \cos 6\phi = 1 \sin 6\phi = 0 \to \phi = \cancel{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}}$$

$$6\phi = 2k\pi \Rightarrow \underline{\phi = \frac{k\pi}{3}}$$

4 Domácí úloha

1. Dokažte, že součet

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

je divergentní.

2. Mějme dvě částice s hybnostmi p_1 a p_2 a hmotnostmi m_1 a m_2. Vyjádřete jejich kinetické energie pomocí hybností. Dále si představte, že první částice se pohybuje s hybností $p_1 = p$ a druhá je v klidu, tyto částice se srazí a po srážce se obě pohybují stejným směrem, ale částice druhá je dvakrát rychlejší. Zjistěte jaký musí být poměr hmotností $\frac{m_1}{m_2}$ aby toto bylo možné. Použijte zákon zachování hybnosti a zákon zachování kinetické energie.

Doplnění

2.2 Inverzní funkce: dle definice platí

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

Kontrola: 1) $f(x) = x^2 - 2x$

$$f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = 1 \pm \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1 \pm \sqrt{(x-1)^2}$$

$$= 1 + (x-1) = x \checkmark$$

$$f(f^{-1}(x)) = (1 \pm \sqrt{x+1})^2 - 2(1 \pm \sqrt{x+1})$$

$$= 1 \pm 2\sqrt{x+1} + (x+1) - 2 \mp 2\sqrt{x+1} = x \checkmark$$

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$; $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$$f(f^{-1}(x)) = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^x = x \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = x$$

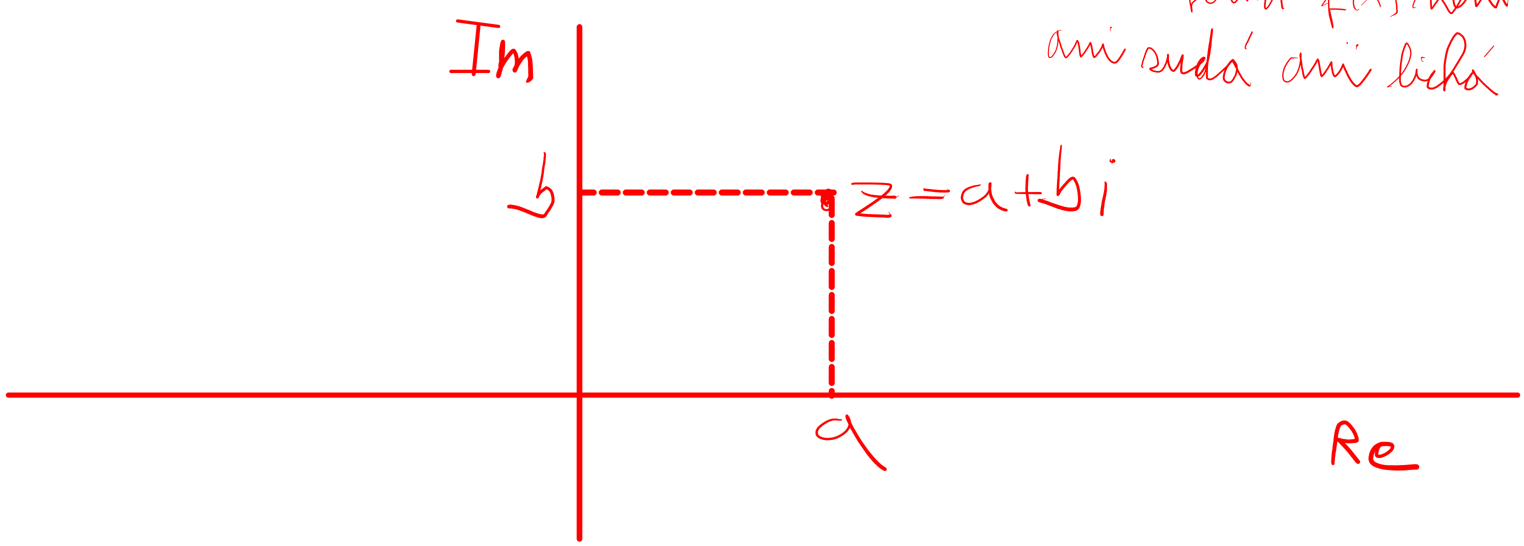
$$f^{-1}(f(x)) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} x} = x$$ z definice

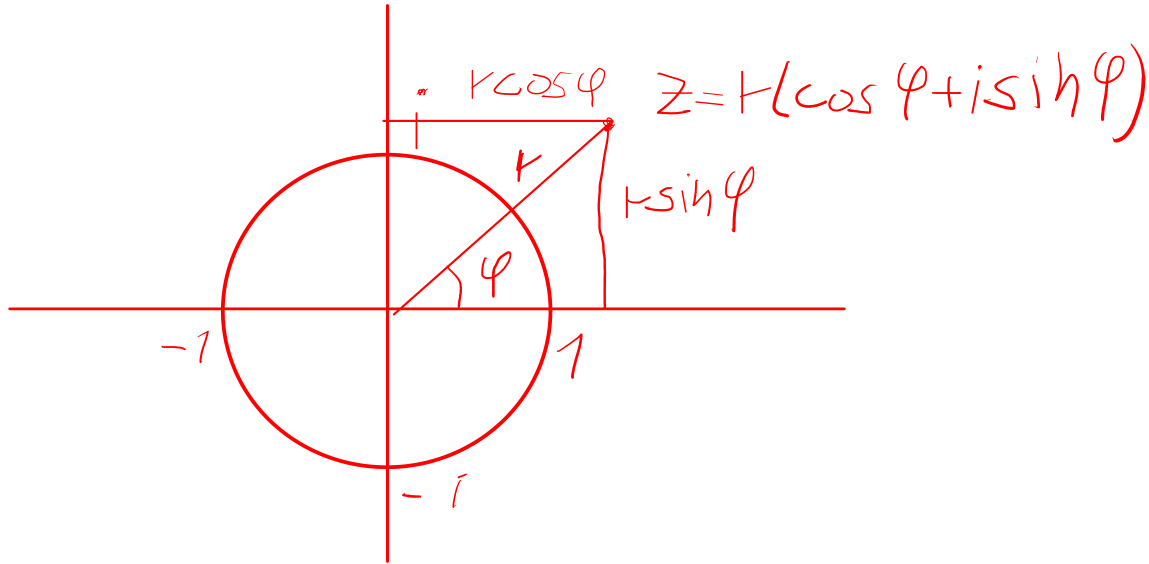
Obdobně pro ostatní.

Parita funkcí:

- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sudá
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ lichá
- x^n — sudá pro n sudé; lichá pro n liché; $n \in \mathbb{N}$
- x^{-n} stejně
- $x^{\frac{1}{n}}$ stejně
- $\cos x$ sudá $\rightarrow$ arccos sudá
- $\sin x$ lichá $\rightarrow$ arcsin lichá
- $|x|$ sudá; $|x|^a$ sudá, $|x|^{f(x)}$ sudá pro $f(x)$ sudá i lichá ALE $|x|^{f(x)}$ není sudá pokud $f(x)$ není ani sudá ani lichá

3) Komplexní čísla





3) $z^2 = i$

→ polární/goniometrický tvar $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

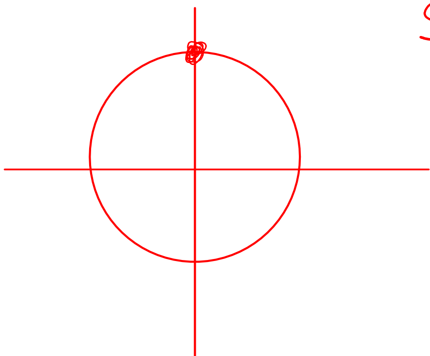
r, φ - neznámé

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^2 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

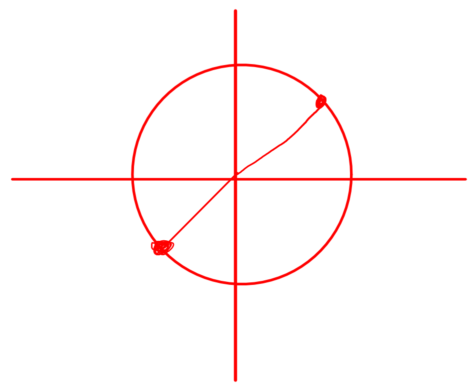
$\Rightarrow r = 1$; $\cos 2\varphi = \frac{\pi}{2}$ (chceme 2 řešení)

$\sin 2\varphi = \frac{\pi}{2}$



$$\Rightarrow 2\varphi = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\}$$

$$\varphi = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$$



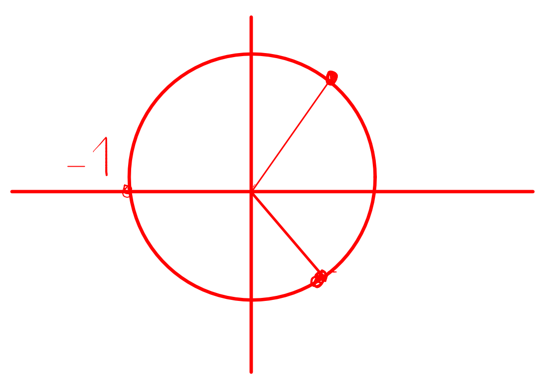
$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$z^3 = -1$; stejný způsob

$$r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$r = 1$

$$\varphi = \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$$



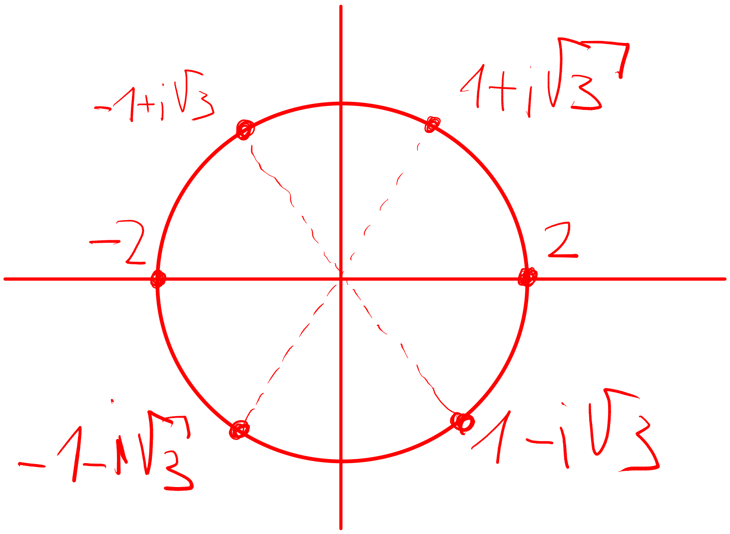
$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$z^6 = 64$ stejný způsob

$r = 2$

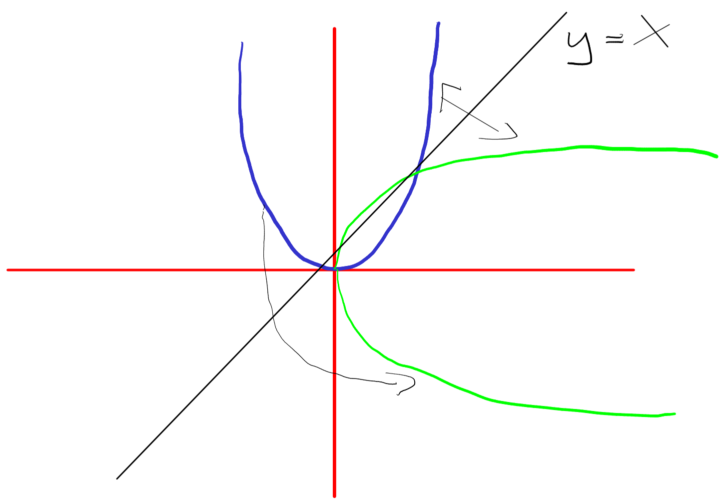
$\varphi = \frac{k\pi}{3}$

$k = \{0, 1, \dots 5\}$



Doplnění mějme $f(x) = x^2$ víme, že $f^{-1}(x) \overset{?}{=} \pm\sqrt{x}$

graficky:



techicky lze $f^{-1}(x)$ najít ale máme funkce dvě, správně lze hledat inverzní funkce jen k funkcím prostým

Nebo rozdělíme $D(f)$

$x < 0$ $f(x) = x^2$
$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$x > 0$ $f(x) = x^2$
$f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$