1 Řešte pomocí separace proměnných:

1. $y' = 1+y^2$ při $y(0) = 1$; **2.** $xy'+y-y^2 = 0$; **3.** $y\ln y+xy' = 0$ při $y(1) = \mathrm{e}$; **4.** $\mathrm{e}^{-y}(y'+1) = 1$; **5.** $(1 + \mathrm{e}^x)y' + \mathrm{e}^x y = 0$ při $y(0) = 1$; **6.** $y' \operatorname{tg} x - y^2 = 1 - 2y$.

2 Budeme řešit rovnici $y' = (6x + 2y + 3)^2$. Na to se bude hodit substituce $z = 6x + 2y + 3$, kde $z(x)$ bude naše nová neznámá funkce.

1. Derivujte rovnost $z = 6x + 2y + 3$ a vyjádřete y' pomocí z'.

2. Dosaďte do rovnice za y' podle předchozího bodu a $6x + 2y + 3$ vpravo zaměňte za z.

3. Výslednou rovnici řešte. Ve výsledku zase zapište $z = 6x + 2y + 3$ a vyjádřete y.

3 Následující rovnice řešte tak, že v nich položíte $y = ux$.

1. $2xy' = x + y$; **2.** $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$ (tohle jste už počítali v úvodu); **3.** $xy' - y = y\ln\frac{y}{x}$.

4 Zkuste vyřešit následující rovnice tím, že v nich z obou stran uděláte úplnou derivaci. (Dívejte se přitom do bodu 1 z úvodu.)

1. $yy' = x$; **2.** $y'\sin x + y\cos x = \sin x$; **3.** $\mathrm{e}^{x^2}(y' + 2xy) = x^2$. **4.** $2yy' + \mathrm{e}^x(y' + y) = 0$.

5 Někdy nejde hned udělat z obou stran úplná derivace. Většinou se ale dá najít něco, čím můžeme celou rovnici vynásobit tak, aby to najednou šlo. Tomu, čím násobíme, se říká *integrační faktor*.

1. Jak v úvodu dopadla derivace $\mathrm{e}^x y$? Vyřešte pomocí toho rovnici $y' + y = x^3\mathrm{e}^{-x}$.

2. Jak dopadla derivace $\mathrm{e}^{x^2}y$? Řešte $y' + 2xy = x$.

3. Jak dopadla derivace $\mathrm{e}^{f(x)}y$? Napište obecný recepis na řešení rovnic typu $y' + a(x)y = b(x)$.

4. Zkuste řešit $y' = \frac{1}{x-y^2}$ tak, že budete x považovat za neznámou funkci y (normálně je to opačně).

6 **Děravý válec.** Máte válec o poloměru R, v němž je nalita voda do výšky h_0. V jeho dně se ovšem udělala kruhová díra o poloměru r, takže voda teď teče pryč. Popište, jak se mění výška hladiny ve válci v závislosti na čase. Jak dlouho bude trvat, než bude válec prázdný? **Nápověda:** Voda vytéká rychlostí $v = \sqrt{2gh}$, kde h je výška vody nad otvorem.

7 **Chladnoucí čaj.** Uvařili jsme si čaj o teplotě T_0 a nechali jsme ho v místnosti, v níž je teplota T_1. Teplota čaje se bude snižovat úměrně rozdílu teplot. Předpokládejte, že místnost je tak velká, že se teplota v ní během chládnutí čaje vlastně vůbec nezmění. Napište, jak se bude v čase teplota čaje vyvíjet.

8 **Koronavirus.** Mějme N lidí, z nichž v čase $t = 0$ je x_0 nakažených. Každý nakažený může nakazit další lidi, ovšem jen ty, kteří dosud nakaženi nejsou. Rychlost šíření nákazy je tedy úměrná $x(N - x)$, tj. součinu počtu nakažených a počtu nenakažených; konstantu úměrnosti označte třeba k. Zjistěte, jak počet nakažených závisí na čase.

9 **Skok s padákem.** Vyskočili jste z letadla a teď padáte. V okamžiku otevření padáku jste padali rychlostí v_0, Vaše hmotnost i s padákem je m. K zemi Vás táhne tíhová síla, proti ní účinkuje odporová síla vzduchu o velikosti $\frac{1}{2}CS\rho v^2$, kde C je asi 1,2, S plocha padáku a ρ hustota vzduchu. Určete mezní rychlost pádu w (tj. rychlost, při níž se tíhová a odporová síla vyrovnají). Potom spočtěte rychlost pádu v závislosti na čase a další integrací rychlosti zjistěte i závislost vzdálenosti, kterou jste překonali, na čase. V čem se bude lišit Váš pád od padání mezní rychlostí, pokud budete padat hodně dlouho ($t \to \infty$)? Předpokládejte, že pořád padáte rychlostí $v < w$.