1 Zapište následující soustavy v maticovém tvaru $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathcal{M}\boldsymbol{x}$:

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$; **2.** $\begin{cases} \dot{x} + x - 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$; **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$; **4.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$.

2 U tabule jsem argumentoval, že pokud máme čtvercovou matici $\mathcal{M}$, bude dobré hledat takové dvojice vektorů $\boldsymbol{v}$ a čísel λ, pro které by platilo $\mathcal{M}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.
1. Vysvětlete, proč se tato rovnost dá zapsat i jako $\mathcal{M}\boldsymbol{v} = \lambda\mathbb{1}\boldsymbol{v}$, kde $\mathbb{1}$ je jednotková matice.
2. Převeďte všechno na jednu stranu. Měla by Vám vzniknout homogenní soustava. Napište kritérium pro to, aby měla netriviální řešení. Jak nám to pomůže zjistit možné hodnoty λ?
3. Když už znám λ — jak konkrétně můžu zjistit příslušné $\boldsymbol{v}$?
4. V soustavě $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathcal{M}\boldsymbol{x}$ zapište $\mathcal{M} = \mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{U}^{-1}$, kde $\mathcal{D}$ je diagonální. Ukažte, že když přejdeme v takové soustavě k novým proměnným $\mathcal{U}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$, rozpadne se soustava na n nezávislých rovnic.
Pro pořádek — těmto λ se říká *vlastní čísla* a vektorům $\boldsymbol{v}$ se zas říká *vlastní vektory*.

3 Vyřešte touto metodou některou soustavu rovnic z prvního příkladu (stačí jednu).

4 Na konci druhého příkladu jsme dospěli k tomu, že soustavu $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathcal{M}\boldsymbol{x}$ můžeme vhodnou změnou base převést na n nezávislých rovnic $\dot{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\boldsymbol{u}$. Řešte je. Pak zapište, jak vypadá řešení $\boldsymbol{x}$ původní soustavy — a tím objevíte tupý školský algoritmus, který už asi znáte z početka.

5 Někdy se kromě samotných neznámých $\boldsymbol{x}$ mohou v soustavě objevit i další členy, které závisí jen na čase t, takže vznikne soustava $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathcal{M}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(t)$.
1. Řekněme, že nějak objevíme (třeba uhodneme) jedno nějaké konkrétní řešení $\boldsymbol{x}_0$ této soustavy. Ukažte, že pak $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ splňuje soustavu $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathcal{M}\boldsymbol{y}$, kde už ty časově závislé členy nejsou.
2. Z toho odvoďte, že obecné řešení takové soustavy je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_0$, kde $\boldsymbol{y}$ je obecné řešení soustavy $\dot{\boldsymbol{y}} = \mathcal{M}\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x}_0$ je nějaké jedno konkrétní řešení té původní soustavy.

6 Řešte následující soustavy: **1.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 1, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$ (hádejte čísla);
2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$ (hádejte $at + b$); **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$ (hádejte $a\sin t + b\cos t$).

7 Z počtu už asi víte, že postup řešení jedné rovnice s konstantními koeficienty $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = 0$ je nějak podezřele podobný řešení soustavy prvního řádu.
1. V rovnici $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ zaveďte další proměnnou $\dot{y} = p$ a přepište ji na dvě rovnice prvního řádu v proměnných $y(t)$, $p(t)$. Tu pak řešte.
2. Obecnou rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty přepište obdobně: dejte $\dot{y} = p_1$, $\dot{p}_1 = p_2$ atd., až $\dot{p}_{n-2} = p_{n-1}$. Pomocí těchto proměnných rozbijte jednu rovnici n-tého řádu na soustavu $n \times n$ prvého řádu. Napište rovnici pro vlastní čísla a v determinantu užijte Laplaceův rozvoj. Tím zjistíte, proč charakteristická rovnice vypadá tak, jak vypadá.

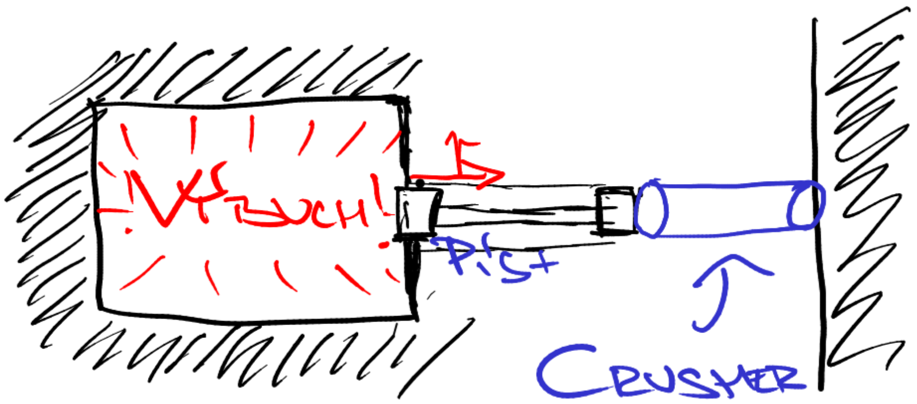
8 Zkuste nějak rozšířit postupy, které jsme si tu vybudovali, a vyřešit s nimi i tyto soustavy:

1. $\begin{cases} 2\dot{x} + 3\dot{y} = 16x - y, \\ \dot{x} - 2\dot{y} = -6x + 3y. \end{cases}$; **2.** $\begin{cases} 5\ddot{x} = 7x - 3y, \\ 5\ddot{y} = -2x + 8y. \end{cases}$; **3.** $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} = -\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ \ddot{y} + 4\dot{y} = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y. \end{cases}$.

9 **Vytápění.** Představte si, že máte chatu se třemi místnostmi: sklepem, obývákem a podkrovím. Venku je 0 stupňů Celsia a protože jste na chatě dlouho nebyli, je tato teplota i ve všech třech místnostech. V obýváku jsou naštěstí kamna, v nichž rozděláte oheň. V dokonale isolované místnosti by tato kamna zvyšovala teplotu o 20 stupňů za hodinu. Ovšem tady teče teplo jak do ostatních místností, tak ven z chaty. Podle Newtona se je časová změna teploty rovna $k(T' - T)$ kde T je teplota v místnosti a T' je teplota v místě, kam teplo uniká. k je pro přechod mezi vnitřkem a vnějškem chaty rovno $\frac{1}{4}$ hod^{-1} a pro přechody mezi místnostmi v chatě $\frac{1}{2}$ hod^{-1}. Určete teploty ve všech třech místnostech v závislosti na čase.

10 **Otrávená jezírka.** Tři stejná jezírka o objemu V jsou navzájem propojena stejnými kanály. Do prvního přitéká voda s průtokem Q (to je objem vody za jednotku času), ze třetího zase stejným průtokem odtéká. Nějaký zloduch do prvního jezírka vylil kyanid o objemu v. Určete množství jedu ve všech třech jezírkách v závislosti na čase, předpokládáte-li, že se v každém jezírku jed okamžitě dokonale rozmíchá a že se voda nikde nehromadí, tj. z každého jezírka odtéká tolik, kolik přitéká.

11 **Crusher.** Někdy je potřeba zjistit, jaký tlak vyvíjí plyny při nějakém výbuchu. Takový starý dobrý způsob, jak to změřit, spočívá v následujícím: výbuch se provede v nějaké pancéřované komoře s pístem, který těsně naléhá na měděný váleček, tak řečený *crusher*. Tento váleček opět z druhé strany těsně přiléhá k nějaké dokonale tvrdé zdi. Tlak výbuchu p pak zatlačí na píst, jenž zabírá ve stěně komory plochu S, a ten stlačí crusher o nějakou délku x; ovšem crusher tomu klade odpor silou $R = R_0 + kx$, kde R_0 a k jsou konstanty. Po výbuchu se crusher vyjme a změří se, o kolik se stlačil. Jak z toho spočítáte tlak p způsobený výbuchem? Tento tlak považujte za konstantní, změnu objemu komory při posunu pístu zanedbejte.



12 **Pružina.** Máme pružinu, která je v rovině jedním koncem přidělána k počátku a na druhém konci je přidělána částice. Částici natáhneme do bodu $(x_0, 0)$ a vyšleme ji rychlostí v_0 ve svislém směru. Jak se bude částice pohybovat?

13 **Pohyb v elektromagnetickém poli.** Částice s nábojem q letí v rovině xy rychlostí $v = (v_x, v_y)$. Intensita elektrického pole je E ve směru osy y a magnetická indukce je B ve směru osy z. Na částici působí pouze Lorenzova síla $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Zjistěte, jak se v tomto poli částice pohybuje.

14 **Soustava oscilátorů.** Mějme na přímce hmotné body o hmotnostech $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Každé dva body x_k a x_ℓ jsou spojeny pružinou tuhosti $K_{k\ell}$. (V případě, že body spojeny nejsou, lze pro ně prostě klást $K = 0$.) Zapište pohybové rovnice tohoto systému a zkuste něco říct o obecném řešení. Co když začneme cloumat každým bodem x_k nějakou silou $a_k \cos \omega t$ ($a_k = \mathrm{const.}$)?