Cvičení 10-Určitý a nevlastní integrál a jeho využití, úvod do diferenciálních rovnic

7. prosince 2020

1 Určitý integrál a základní aplikace

Definice

Pro integrovatelnou funkci $f(x)$ je určitý integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Nevlastní integrál

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Další pravidla, která jsme probírali na konci 9. cvičení

- **Linearita**

$$\int_a^b Cf(x) + Dg(x)\,\mathrm{d}x = C\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + D\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Spojení/rozdělení mezí**

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Substituce**: musíte transformovat i meze.
- **Per Partes**

$$\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x$$

2 Základní integrace

1. $$\int\limits_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$$

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

3. $$\int\limits_2^{6} \sqrt{x-2} \,\mathrm{d}x$$

4. $$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \,\mathrm{d}x$$

5. $$\int\limits_0^{1} \frac{x^4\left(1-x\right)^4}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

6. $$\int\limits_{-1}^{1} x^2\left(e^x+e^{-x}\right) \,\mathrm{d}x$$

7. $$\int\limits_{-1}^{1} x\left(e^x+e^{-x}\right) \,\mathrm{d}x$$

8. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \,\mathrm{d}x$$

9. $$\int\limits_1^{\infty} \arctan x \,\mathrm{d}x$$

10. $$\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

11.
$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

12.
$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

13.
$$\int\limits_{0}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$$

3 Aplikace

3.1 Spočtěte obsah mezi grafem funkce a osou x na zadaném intervalu

1. $f(x) = \sin ax, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \pi, \quad$ pro $a \in R$. Co se stane když horní mez změníme na $\frac{\pi}{a}$?
2. $f(x) = x(x-1)(x-2), \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 2$

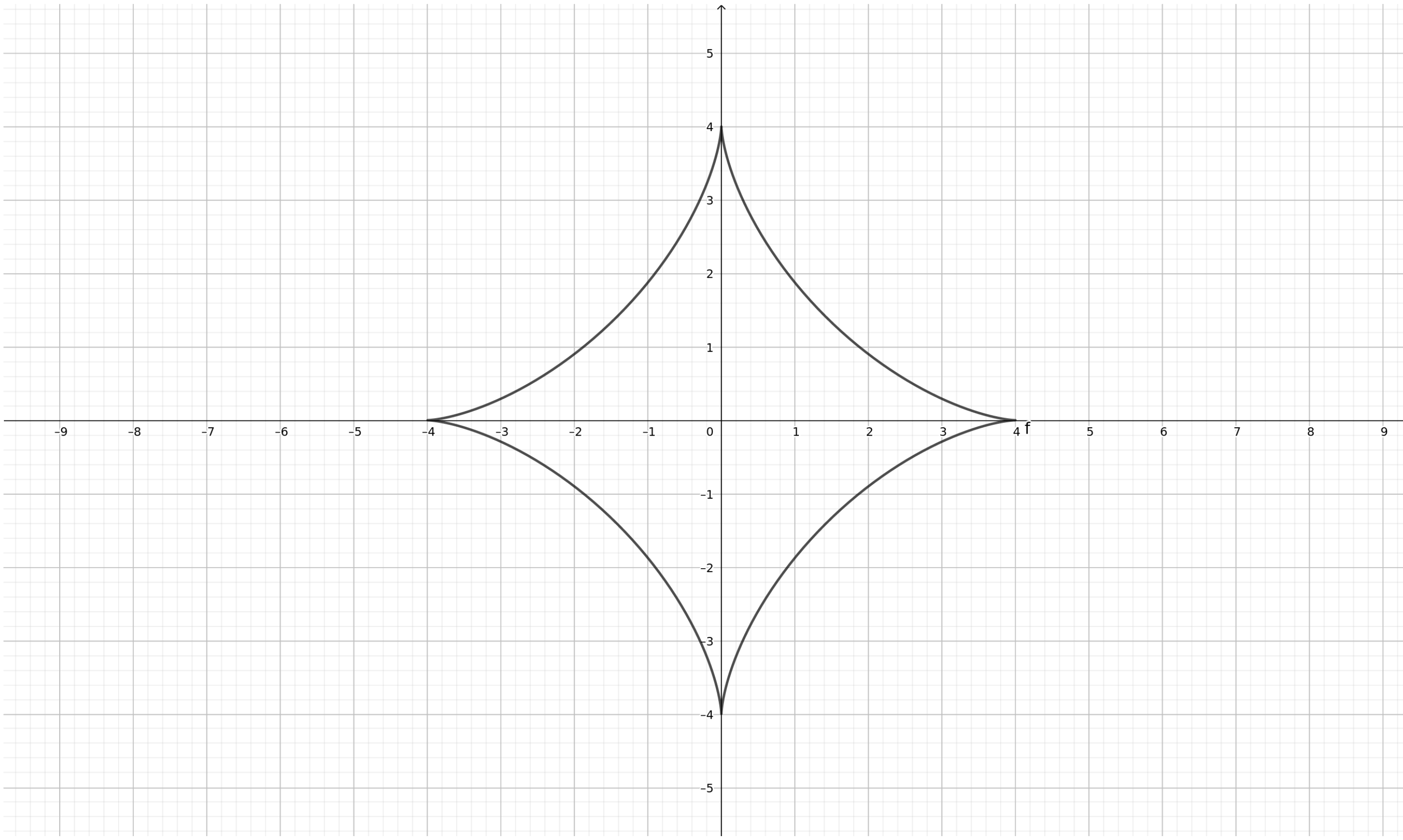
3.2 Spočtěte obsah ohraničený grafy následujících funkcí, nebo křivek

1. $f_1(x) = 2 + x, \quad f_2(x) = x^2 - 6x + 8$
2. $f_1(x) = 2 - x^2, \quad f_2(x) : y^3 = x^2$
3. Odvoďte vzorec pro obsah elipsy.
4. **Astroida**

   Je křivka kterou dostaneme valením kružnice o poloměru r v kružnici o poloměru $4r$. Parametricky je zadaná takto

   $$x(t) = 3\cos t + \cos(3t)$$
   $$y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t)$$

   Ze znalosti parametrického předpisu této křivky napište vzorce pro délku této křivky a obsah útvaru touto křivkou vymezeného. K výpočtu hodnot můžete použít program.



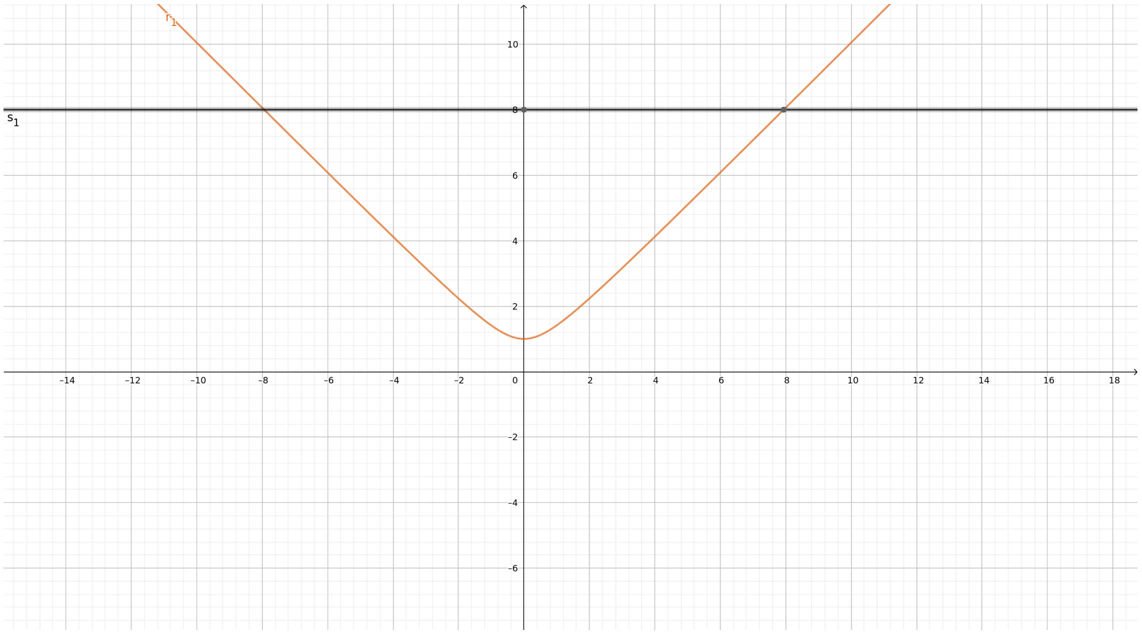
Obrázek 1: Astroida

3.3 Délka grafu funkce

1. Dokažte, že vzorec pro délku nezávisí na parametrizaci
2. Příklady ze sbírky (441-444).

3.4 Rotační tělesa

1. Máme graf funkce $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, spočtěte objem tělesa které vznikne rotací této křivky okolo osy x i osy y. Také spočtěte obsah mezi plochy mezi osou x a grafem této funkce.
2. Máme graf funkce $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, spočtěte objem tělesa které vznikne rotací okolo os x, y s tím, že výška tohoto tělesa je omezena přímkou $y = h$. Dále spočtěte obsah pláště tohoto rotačního tělesa. Dokážete tuto křivku nějak parametrizovat a spočítat tyto veličiny pomocí této parametrizace? Je to jednodušší způsob? Také spočtěte obsah mezi přímkou $y = h$ a grafem této funkce, samozřejmě předpokládáme, že $h > 1$. Viz následující obrázek.



Obrázek 2: Graf s omezenou vyskou

4 Základní diferenciální rovnice

1. $$y'' = 0$$
2. $$y' = y$$

3.
$$y' = y^2$$

4.
$$y'' = y$$

5.
$$y'' = -y$$

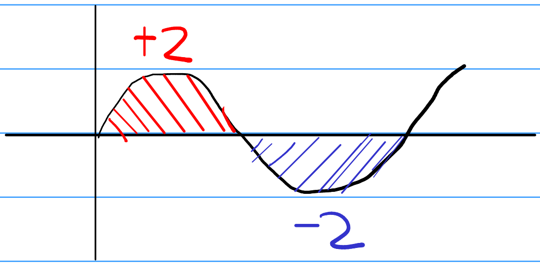
6.
$$y' = xy$$

10. Cvičení - ukázkové příklady

1.1 $$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -\left(\cos x(2\pi) - \cos(0)\right) =$$

$$= -(1-1) = 0$$

· Geometricky odpovídá ploše:



- kladná
- záporná } odečtou se

+ lze zapsat jako $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$ díky lichosti sinx.

1.3 substituce u určitého integrálu

$$\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x-2 \\ du = dx \end{matrix} + \text{měníme meze} \quad \begin{matrix} x & & u \\ 6 & \to & 4 \\ 2 & \to & 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

1.7 Per partes u určitého integrálu:

$$\int_{-1}^{1} x(e^x + e^{-x})\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v = e^x - e^{-x} & v' = e^x + e^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[x(e^x - e^{-x})\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x - e^{-x}\,dx$$

$$= 1\left(e - \frac{1}{e}\right) - (-1)\cdot\left(\frac{1}{e} - e\right) - \left[e^x + e^{-x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= e - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - e - e - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + e$$

$$= 0$$

ze stejného důvodu ($x(e^x + e^{-x})$ je lichá)

⇒ Poučení

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ sudá} \\ 0, & \text{je-li } f \text{ lichá} \end{cases}$$

- lze ověřit substitucí $x \to -x$

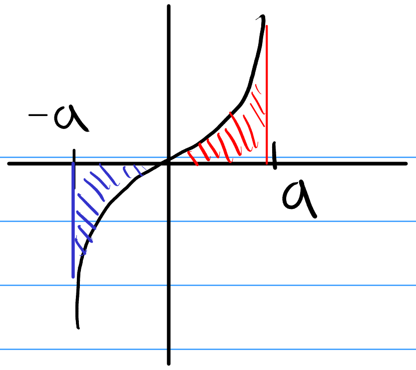
důkaz: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$$= \left| \begin{matrix} x \to -x & 0 \to 0 \\ dx \to -dx & -a \to a \end{matrix} \right| = \int_{a}^{0} f(-x)(-dx) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

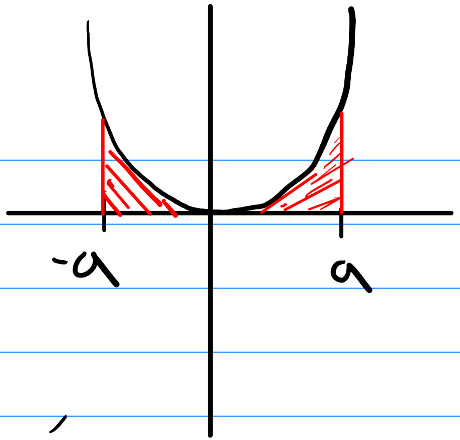
$f(-x) = f(x)$ integrály se sečtou

$f(-x) = -f(x)$ integrály se odečtou

graficky:



vs.



1.8 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = 0$, tan x lichá

nevlastní integrály:

1.9 $$\int_1^\infty \arctan x \, dx = \Big[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|x^2+1|\Big]_1^\infty$$

meze v ±∞ řešíme limitou

$$= \underbrace{\lim_{x \to \infty} \Big(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big)}_{= ?} - 1 \arctan 1 + \frac{1}{2} \ln 2$$

zajímavá limita

moje řešení: • $\arctan x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

• zanedbáme 1 vůči x^2 uvnitř ln

$$\rightarrow \lim_{x \to \infty} (x - \ln x) = |\infty - \infty|$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{\frac{1}{\ln x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x \ln x}} \right)$$ zde

lze použít L'Hospitala $\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1-\frac{x}{\ln^2 x}}{x^2}$

a $\left(\frac{1}{x\ln x}\right)' = -\frac{1+\ln x}{x^2 \ln^2 x}$

tedy $\lim = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1-\frac{x}{\ln^2 x}}{x^2}}{-\frac{1+\ln x}{x^2 \ln^2 x}} = \frac{\ln^2 x - x}{-(1+\ln x)}$

zde můžeme použít argument že x roste rychleji než ln x

$$= \frac{x\left(\overset{\to 0}{\frac{\ln^2 x}{x}} - 1\right)}{1+\ln x} = \frac{x}{1+\ln x} \to \underline{\underline{\infty}}$$

- $\int_1^\infty \arctan x \, dx = \infty$ říkáme, že integrál diverguje

limity mohou být konečné

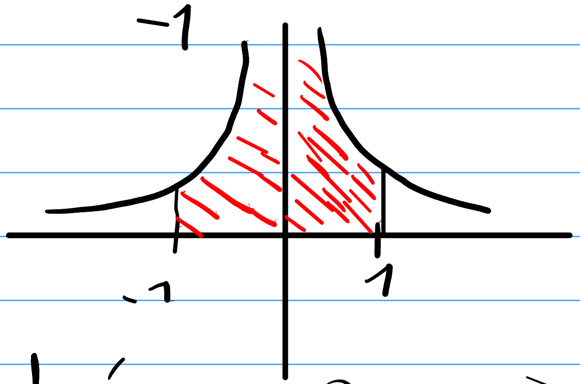
->1.10 $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim\limits_{x\to\infty} \arctan x - \arctan 0$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

ale může se pokazit něco jiného:

1.11 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1-\left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$

graficky:



Plocha je kladná => -2 je špatně !

Proč? Primitivní funkce $\frac{1}{x}$ není spojitá musíme bod nespojitosti vynechat

• správně: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^2} dx$$

$$= 2\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1} = 2(-1) + 2\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}$$

$$= \infty \text{ !}$$

• ε nemusíte vždy psát stačí psát: $\left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} =$

$-1+\infty = \infty$

3. Aplikace

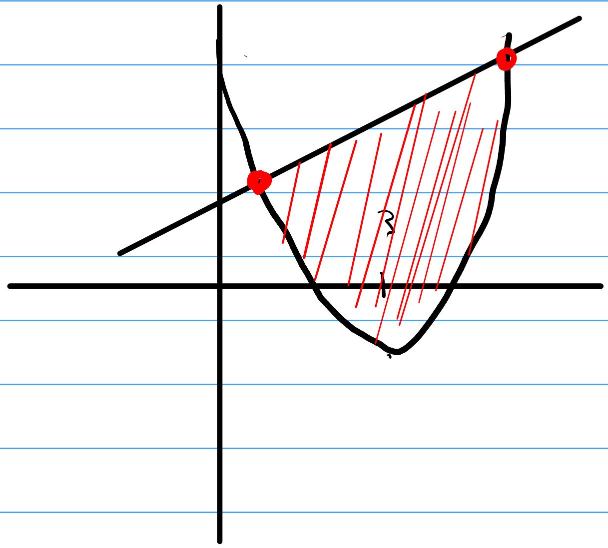
3.1 $f(x) = \sin ax, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \pi$

$$\int_0^{\pi} \sin ax \, dx = \frac{1}{a}\Big[-\cos ax\Big]_0^{\pi} = \frac{1-\cos(a\pi)}{a}$$

bude-li horní mez $x_1 = \frac{\pi}{a}$ dostaneme $= \frac{2}{a}$

3.2.1 $f_1(x) = 2 + x$

$f_2(x) = x^2 - 6x + 8$



Plochu spočteme

jako $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f_1(x) - f_2(x) \, dx$

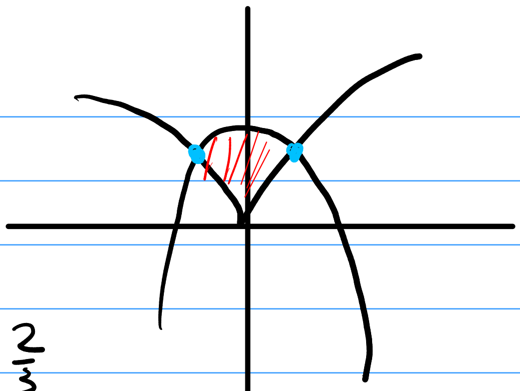
Prvně musíme nalézt body x_0, x_1:

$2 + x = x^2 - 6x + 8 \quad \to \quad x = 1, 6$

$$\Rightarrow \text{Plocha} = \int_1^6 (2+x) - (x^2 - 6x + 8) \, dx = \frac{125}{6}$$

3.2.2 $f_1(x) = 2-x^2$

$f_2(x) : y^3 = x^2$



Průsečíky: $2-x^2 = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow x = \pm 1$

Plocha: $\int_{-1}^{1} (2-x^2) - x^{\frac{2}{3}} \, dx$ → využijeme

sudost $= 2\int_{0}^{1} (2-x^2) - x^{\frac{2}{3}} \, dx$

$= \frac{32}{15}$

- pozor pokud nevyužijeme sudost

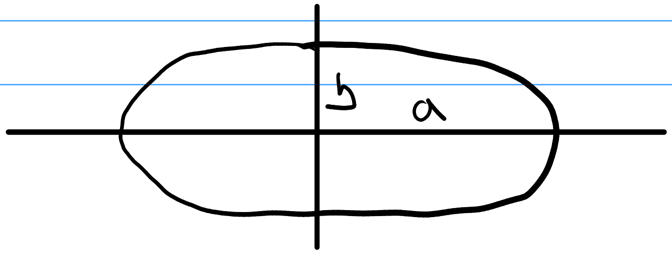
$$\int_{-1}^{1} (2-x^2) - x^{\frac{2}{3}} \, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_{-1}^{1}$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} - \left(-2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{5}(-1)^{\frac{5}{3}} \right)$$

$= \frac{32}{15}$, Protože $(-1)^{\frac{5}{3}} = -1$

3.3 obsah elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Postup ze sbírky strana 502.

dostaneme: $\frac{S}{4} = \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$

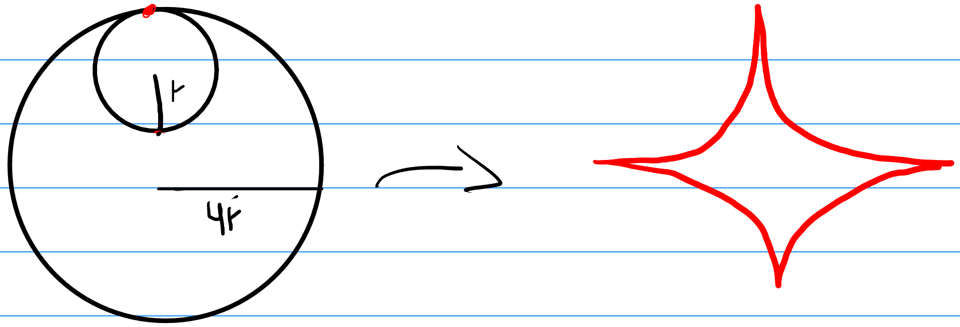
→ nebude lepší použít parametrizaci ?

$x = a\cos t$
$y = b\sin t, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{4} S = \int_0^{\pi/2} x(t)\, y'(t) = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$ab\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}ab \quad ✓$$

3.2.4 Astroida

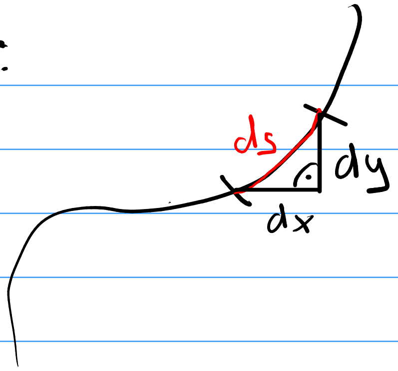


Parametrizace $x(t) = 3\cos t + \cos 3t$
$y(t) = 3\sin t - \sin 3t$

a) délka: $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$

Krátké odvození vzorce:

Křivka:



Pythagorova věta:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad L = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

- Parametrizace : $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$dx = x'(t)dt$$
$$dy = y'(t)dt$$

$$\Rightarrow \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

zpět k astroidě

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3\sin t - 3\sin 3t)^2 + (3\cos t - 3\cos 3t)^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36\sin^2 t}\,dt = 24$$

b) obsah plochy: $S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t + \cos 3t)(3\cos t - 3\cos 3t)\,dt$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 48\sin^2 t \cos^4 t\,dt = 6\pi$$

3.3.1 Dokažte, že $L=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

nezávisí na parametrizaci

změna parametru $t \to \tau=\tau(t)$

$dt \to d\tau = \tau'(t)dt$

ale $x'(t)$ a $y'(t)$ se také změní $\to$ $x'(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}$

$= x'(\tau)\cdot\tau'(t)$

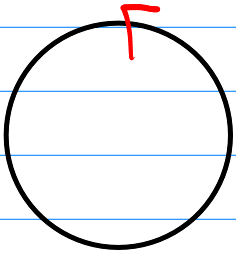
kde ' značí derivaci vzhledem k proměnné na které funkce závisí.

změna integrandu: $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \to$

$$\to \sqrt{(x'(\tau)\cdot\underline{\tau'(t)})^2+(y'(\tau)\cdot\underline{\tau'(t)})^2}\;\frac{d\tau}{\underline{\tau'(t)}}$$

- se mezi sebou pokrátí ?

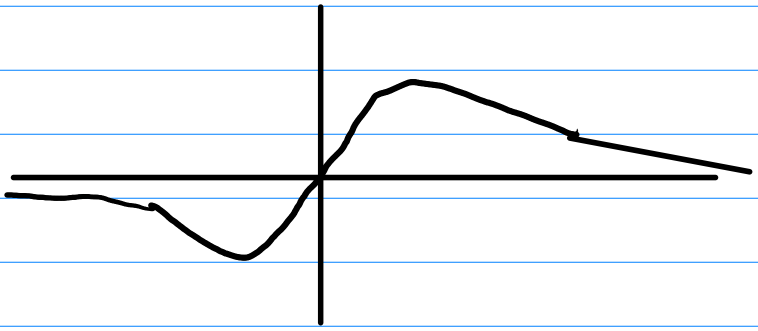
$\to$



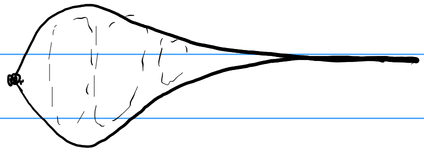
nezáleží jak rychle křivku procházím, délka a obsah se nemění

3.4 Rotační tělesa:

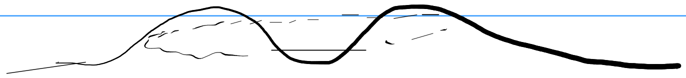
$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:



• rotace okolo osy x:

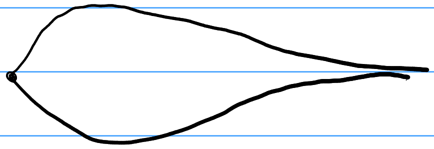


osy y:



→ můžeme spočítat objemy těchto těles a povrch pláště

1)



$\cdot V = \pi \int_0^\infty f^2(x)dx = \pi \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

$$= \left[\frac{1}{2}(\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}\right]_0^\infty \cdot \pi$$

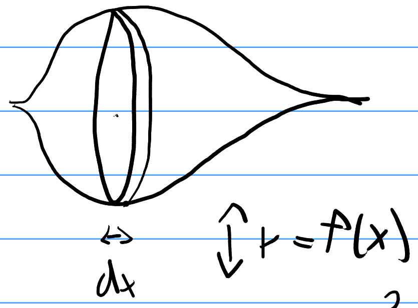
$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\cdot\pi - 0 = \frac{\pi^2}{4}$$

obsah pláště: $Q_x = 2\pi \int_0^\infty f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)^2}\, dx$$

tento integrál diverguje což je zajímavé ale je to správně

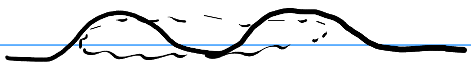
Představa :



objem válce: $dV = \pi f^2(x)\,dx$

$$\sum dV \to \int dV$$

2) okolo osy Y :



$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

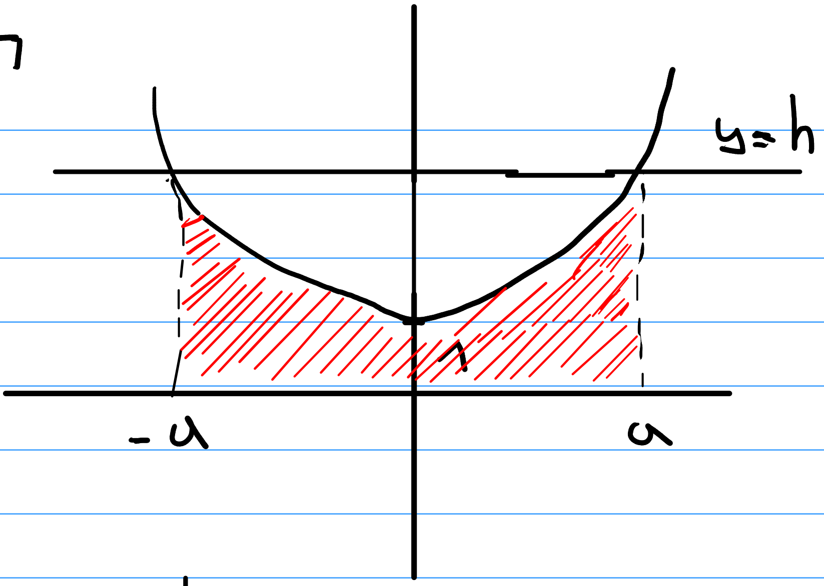
$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = 2\pi \Big[x - \arctan x\Big]_0^\infty$$

$$= \infty$$

3) obsah plochy $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \Big[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big]_0^\infty$

$$= \infty$$

3.4.2 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$



kde $h = \sqrt{1+a^2}$

$h^2-1 = a^2$

$a = \sqrt{h^2-1}$

Spočítáme vše co lze spočítat :

1) obsah /// plochy : $2\int_0^a \sqrt{1+x^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1}(x)\right]_0^a = \frac{1}{2}\sqrt{h^2-1}\cdot h + \sinh^{-1}(h)$$

- můžeme křivku $\sqrt{1+x^2}$ parametrizovat s využitím $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

zvolíme $x = \sinh t$

$y = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$

ale pak by bylo těžší hledat mezh.

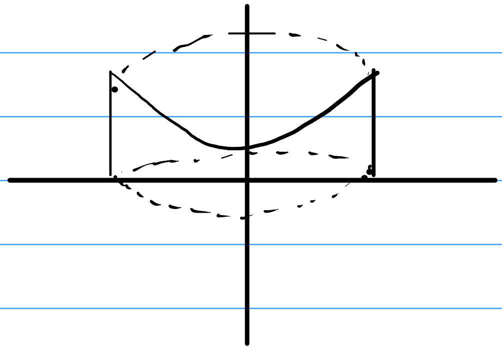
2) $V_x = \pi\int_0^a f^2(x)\,dx = \pi\int_0^a 1+x^2\,dx$

$$= \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{h^2-1}} = \pi\left(\sqrt{h^2-1} - \frac{(h^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$$

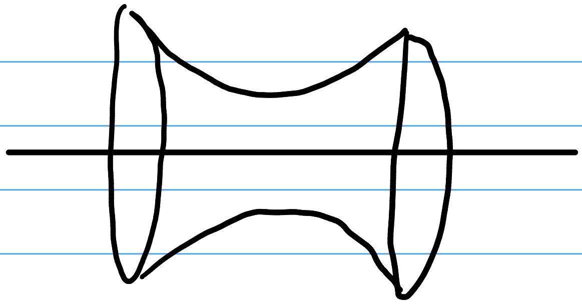
$$\frac{1}{2}V_y = 2\pi\int_0^a x f(x)\,dx = 2\pi\int_0^a x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{h^2-1}} = \frac{2\pi}{3}h^{\frac{3}{2}} \to V_y = \frac{4\pi}{3}h^{\frac{3}{2}}$$

2 útvary : V_x :



V_y



Která má větší objem?

$$\pi\left(\sqrt{h^2-1} - \frac{(h^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) \overset{?}{\lessgtr} \frac{4}{3}\pi h^{\frac{3}{2}}$$

výsledek <

obsah pláště : $Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{h^2-1}}\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}\,dx =$$

$$2\pi \int_0^{\sqrt{h^2-1}} \sqrt{1+2x^2}\,dx = 2\pi \Big[2\sqrt{1+2x^2}\,x+\sqrt{2}\sinh^{-1}(\sqrt{2}x)\Big]_0^{\sqrt{h^2-1}}$$

$= \dots$

4. Základní diferenciální rovnice

4.1

$$y''=0, \quad (y')'=0 \quad \Big| \int dx$$

$$\int (y')'\,dx = \int 0\,dx$$

$$y'=a \quad \Big| \int dx$$

$$\int y'\,dx = \int a\,dx$$

$$\underline{\underline{y=ax+b}}$$

4.2

$$y'=y$$

$\dfrac{dy}{dx}=y$ → separace proměnných

$$\frac{dy}{y} = dx \quad \Big/ \int$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + C \qquad \Big/ \, e$$

$$y = e^{x+C} = e^{C} e^{x} = Ae^{x}, \quad A, C \in R$$

4.3 $$y' = y^2 \longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{y} = x + C$$

$$\underline{y = -\frac{1}{x+C}}$$

ZK: $LS: y' = \frac{1}{(x+C)^2}$

$PS: y^2 = \frac{1}{(x+C)^2}$ $\quad PS = LS$ ✓

4.4 $y'' = y$

- užitečný trik: postupná integrace

2ná derivace -> jsou potřeba 2 integrace a 2 konstanty

$y'' - y = 0$ Chceme zapsat LS jako derivaci něčeho

$y'' - y = 0 \quad / \cdot y'$

$y''y' - y \cdot y' = 0$

$$\left(\frac{(y')^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)' = \frac{2y'}{2} \cdot y'' - \frac{2y}{2} \cdot y'$$

$$= y'' \cdot y' - y \cdot y'$$

=> můžeme zintegrovat

$$\frac{(y')^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c$$

$$(y')^2 - y^2 = C$$

(faktor 2 jsme absorbovali do konstanty)

-> separace proměnných

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{c+y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{c+y^2}} = dx \to \int \to \int \frac{dy}{\sqrt{c+y^2}} = x+D$$

$$x+D = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{y}{\sqrt{c+y^2}}}{1-\frac{y}{\sqrt{c+y^2}}}$$

-> hledáme inverzní punkci ->

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

Rešení příkladů, které nebyli na cvičení

2.2 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi+2}{8}$$

2.4 $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$, zde máme více možností

1) substituce: $t^2 = \frac{1+x}{1-x} \rightarrow x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$

$$dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt$$

$\rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \rightarrow \int_0^{\infty} t \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt$, tento

integrál jsme již několikrát měli

$$= 2\left[\arctan t - \frac{-t}{t^2+1}\right]_0^{\infty} = \pi$$

2) jiná substituce: $x = \cos 2u$

protože $\sqrt{\frac{1+\cos 2u}{1-\cos 2u}} = \cot g u$, $dx = -2\sin 2u du$

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = -2\int_{\pi/2}^{0} \cot g u \sin 2u du =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)\,du = 2\left[x + \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi$$

3) další substituce jsou možné

2.5 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x^4)}{1+x^2}\,dx$, použijeme metody z minulého cvičení na parciální zlomky

$$= \int_0^1 x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

$= \frac{22}{7} - \pi$, pro podrobnější rozbor → 4. cvičení kolegy Čidlinského (středeční skupina)

2.12 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^\infty = \infty$, diverguje

2.13 $\int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 = -1$

protože $\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$

3.1.2

$f(x) = x(x-1)(x-2)$ pro $x_0 = 0$

$x_1 = 2$

$$\int_0^2 x(x-1|(x-2) = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^2$$

$$= 4 - 8 + 4 = 0$$