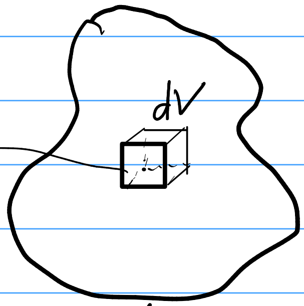
Fyzikální aplikace:

- diferenciální verze normálních vzorců

Př: hmotnost: $M = \rho \cdot V$

kde $\rho = \rho(x,y,z)$ funkce

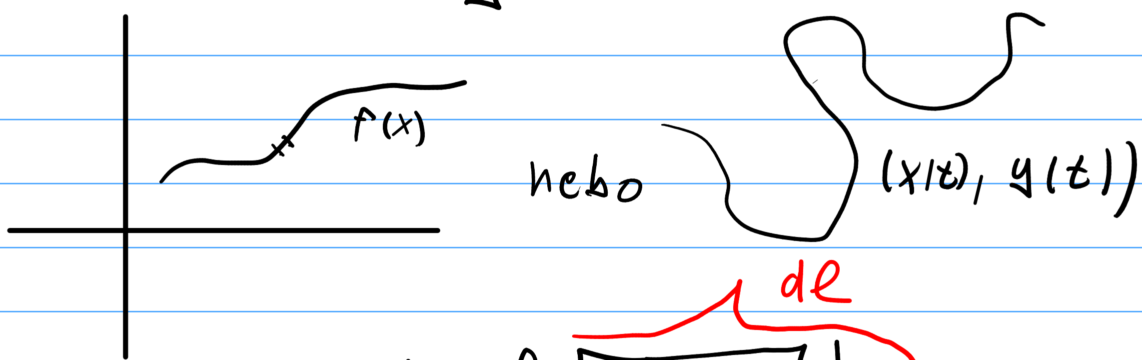
$dM = \rho\, dV$



$\Rightarrow M = \int \rho\, dV$ (3D integrál ~ není v analýze 1)

→ speciální případy: symetrie, křivky

1) křivky



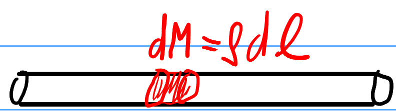
známe délku: $L = \int \underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}_{dl}$

$= \int \underbrace{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt}_{dl}$

co hmotnost?

představa: jedná se o drát/lano s délkovou hustotou ρ

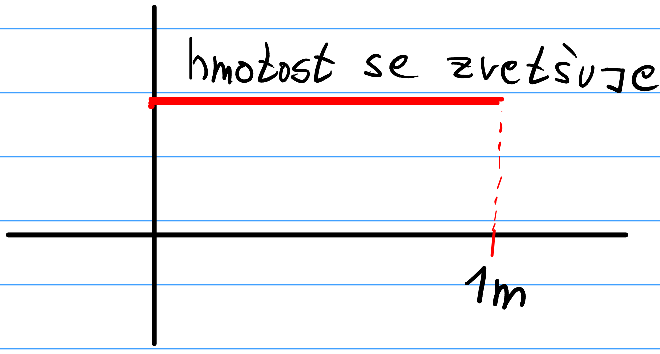
$[\rho] = \frac{kg}{m}$.



je-li $\rho = konst.$ → $M = \rho L$ není-li $\rho = konst.$ →

$$M=\int \rho \, dl$$

Př: 1m dlouhá tyč s proměnou hustotou



a) lineárně
b) kvadratický
c) exponenciálně

a dosahuje 1kg na konci tyče

a) $\rho(t)=t$; b) $\rho(t)=t^2$

c) $\rho(t)=e^{t-1}$ $\rightarrow$ hmotnost

$$M_a=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$$

$$M_b=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}$$

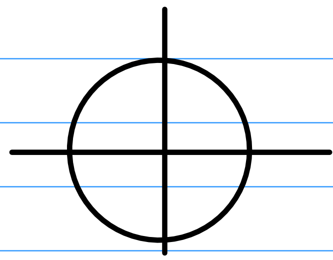
$$M_c=\int_0^1 e^{t-1}\,dt=\frac{e-1}{e}$$

Těžiště: $T=\left[\frac{M_x}{M},\frac{M_y}{M}\right]$

kde $M_x=\int x(t)\,\rho(x,y)\,dl$

$M_y=\int y(t)\,\rho(x,y)\,dl$

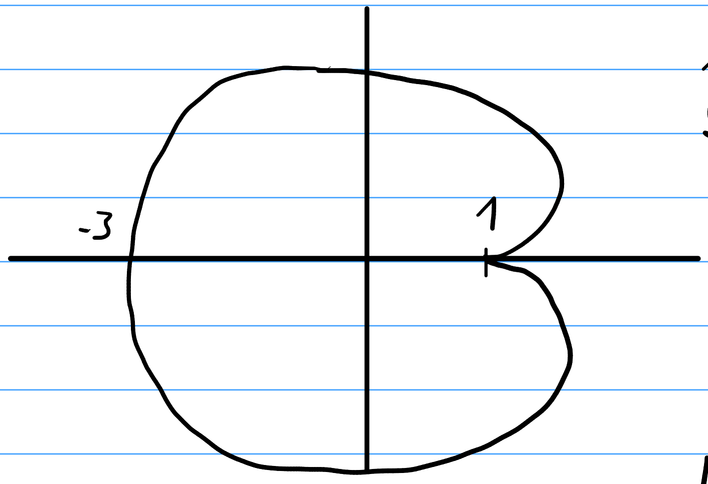
Př: kružnice s $\rho=\text{konst}$



$x(t)=\cos t$

$y(t)=\sin(t)$, $t\in(0,2\pi)$ $\rightarrow$ $T=[0,0]$

těžiště kardioidy (srdcovky)



$x = 2\cos t - \cos 2t$

$y = 2\sin t - \sin 2t$

$\rho = \text{konst}$

$M = \rho \cdot L$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{(-2\sin t + 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2}\, dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} 4\sin\tfrac{t}{2}\, dt = 8 \cdot 2 = 16$$

$$\Rightarrow M = 16\rho\,;\quad M_x = \int x(t)\,\rho\, dl = 4\int_0^{2\pi} (2\cos t -$$

$$- \cos 2t)\sin\tfrac{t}{2}\, dt = 8\cdot\left(-\tfrac{6}{5}\right) = \underline{-\tfrac{48}{5}}$$

$$M_y = 4\int_0^{2\pi} (2\sin t - \sin 2t)\sin\tfrac{t}{2}\, dt$$

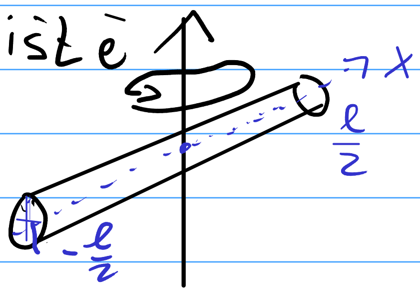
$$= 0$$

$$\Rightarrow T = \left[\frac{-\frac{48}{5}}{16}, 0\right] = \left[-\tfrac{3}{5}, 0\right]$$

Moment setrvačnosti

$$I = mr^2 \rightsquigarrow I = \int \rho(x,y,z) r^2 \, dV$$

· tenká tyč okolo těžiště



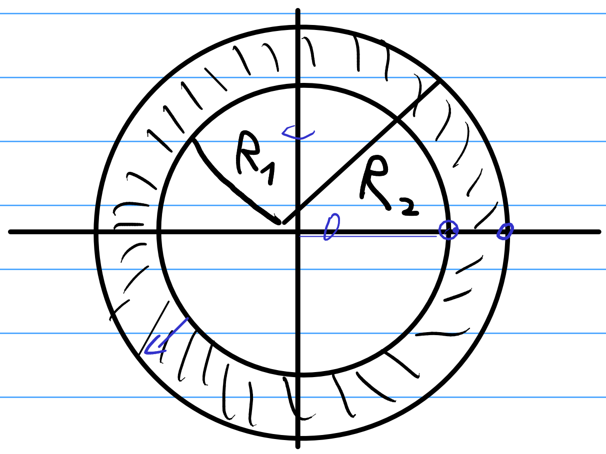
s $\rho = \text{konst}$

$$\rho = \frac{m}{\ell} \qquad I = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \rho x^2 \, dx = \frac{m}{\ell} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}$$

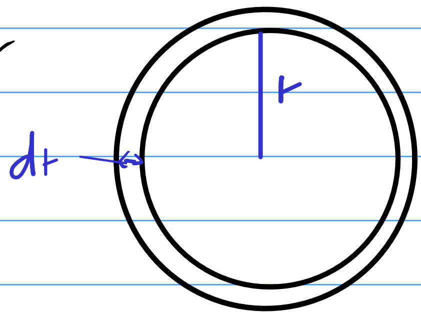
$$= \frac{m}{\ell} \cdot \left[\frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{3} \right] = \frac{1}{12} m \ell^2$$

tenký disk:

$$\int r^2 \, dM$$



dM: tenké mezikruží



$$dM = \rho \, dS$$
$$= \rho 2\pi r \, dr$$

pro $\rho = \text{konst} = \rho = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \Rightarrow I = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \frac{M \cdot 2\pi r \, dr}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} =$

$$I = \frac{2M}{(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{M}{2(R_2^2 - R_1^2)} \left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

$$= \frac{1}{2} M \left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

Dodatečný příklad k dif. rcím 2řádu

$$y'' - 3y' + 2y = x e^x$$

1) řešíme homogenní část: $y'' - 3y' + 2y = 0$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

Kořeny: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

$\rightarrow \quad y_H = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

2) nehomogenní: potřebujeme 1 partikulární řešení

A) variace konstant: $y = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{2x}$

viz přednáška

$$\begin{cases} \text{1rce:} & c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^{2x} = 0 \\ \text{2rce:} & c_1'(x) e^x + 2 c_2'(x) e^{2x} = x e^x \end{cases}$$

nejefektivnější: Kramerovo pravidlo

$$W = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix} \to |W| = e^{3x}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & e^{2x} \\ xe^x & 2e^{2x} \end{pmatrix} \to |W_1| = -xe^{3x}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & xe^x \end{pmatrix} \to |W_2| = xe^{2x}$$

$$\Rightarrow \bullet\ c_1'(x) = \frac{|W_1|}{|W|} = -x \to c_1(x) = \int -x\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} + c_1,$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je opravdu konstanta

$$\bullet\ c_2'(x) = \frac{|W_2|}{|W|} = xe^{-x} \to c_2(x) = \int xe^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-x}(x+1) + c_2$$

celkové řešení je tedy:

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} + c_1\right)e^x - \left(e^{-x}(x+1) + c_2\right)e^{2x}$$

$$= c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{x^2}{2}e^x - e^x(x+1)$$

$+c_2$ nebo $-c_2$ je to samé

Lze absorbovat do c_1

$$= c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x x^2 - x e^x$$

B) metoda speciální pravé strany

$$y'' - 3y' + 2y = x e^x$$ je kvazi polynom $\Rightarrow$

y_p lze tipnout:

$$y_p = x e^x (Ax + B)$$

$r = 1$ protože $\begin{pmatrix} A = 1 \\ B = 0 \end{pmatrix}$ $A + iB$ je kořenem char polynomu

$$y_p' = e^x(Ax+B) + x e^x (Ax+B) + x e^x \cdot A$$

$$y_p'' = e^x(Ax+B) + e^x \cdot A + y_p' + e^x \cdot A + x e^x \cdot A$$

$$\Rightarrow y'' - 3y' + 2y = e^x \Big[A x^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B -$$

$$- 3(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + 2(Ax^2 + Bx) \Big]$$

$$= e^x \left[x(-2A) + 2A - B \right] = x e^x$$

$\Rightarrow -2A = 1$ $\qquad A = -\frac{1}{2}$ správně ✓

$2A - B = 0$ $\qquad B = -1$ také ✓