Mějme kladné reálné číslo a. Jeho n-tá mocnina (kterou označujeme a^n) je součin n kopií čísla a vynásobených mezi sebou. n zde musí být přirozené.

1 Jak byste ukázali, že $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$? (Klidně si vypište ty součiny a počítejte jednotlivá a-čka.)

2 Co tedy musí vyjít, když uděláme dvě mocniny po sobě? Tedy $(a^n)^k$?

Zatím jsme definovali jen přirozenou mocninu, ale rozšíříme to i na racionální mocniny. Základem pro nás bude vztah $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ — ten budeme považovat za jakousi „esenci“ mocninné funkce a racionální mocniny definujeme tak, aby pořád platil.

3 Jakou hodnotu je potřeba přidělit výrazu a^0, aby se základní vztah $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ nepolámal? (Zkuste do toho vztahu dosadit třeba $x = 0$.)

4 Čemu se má rovnat záporná mocnina a^{-n} (n je pořád přirozené), pokud se základní vztah nemá rozbít? (Doporučuju na pravé straně vztahu udělat jedničku.)

5 Čemu se musí rovnat racionální mocnina $a^{k/n}$ (obojí přirozená čísla), aby základní vztah zůstal v platnosti, stejně jako vztah z úlohy 2? (Zkuste umocnit $a^{k/n}$ na n-tou.)

6 Zkuste nakreslit graf funkce 2^x.

Logaritmus je funkce, která je inversní k mocninné funkci — tedy „vrátí zpátky“ to, co udělala. Označujeme ho symbolem $\log_a x$ a definujeme ho takto: řekneme, že $\log_a x = L$ právě tehdy, když $a^L = x$. Tomu $\log_a$ se říká „logaritmus při základu a“. I zde pořád požadujeme $a > 0$.

7 Z této definice odvoďte, že platí $\log_a(a^x) = x$ a $a^{\log_a x} = x$.

8 Jaké hodnoty logaritmu dávají v reálných číslech smysl? (Jelikož logaritmus „vrací zpátky“ exponenciálu, má smysl do něj dávat jen takové hodnoty, kterých exponenciála může nabývat.) Jakých nabývá logaritmus hodnot?

9 Pro počítání s logaritmy platí jakási pravidla, která snadno odvodíte z pravidel pro počítání s mocninnými funkcemi. Vymyslete, jak ze základní vlastnosti $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$ dostat pravidlo $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. (Zkuste napsat $x = a^{\log_a x}$ a $y = a^{\log_a y}$.)

10 Zvládnete podobným stylem upravit $\log_a \frac{x}{y}$ a $\log_a x^y$? (Využijte výsledky cvičení 4 a 2.)

11 Řekněme, že nějaké číslo Z dokážeme napsat jako a^x, ale raději bychom ho chtěli zapsat jako nějakou mocninu b (tedy nějaké b^y). Jak se musí změnit exponent? (Tedy jak vypočteme y pomocí x, a a b?)

12 Od úvah předchozí úlohy už není daleko ke vztahu pro přepočet základů logaritmů: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (pro x, a, b kladná). Zkuste ho z toho odvodit.

13 Opět nakreslete graf, tentokrát však funkce $\log_2 x$. Myslíte, že by šel nějak snadno udělat z grafu funkce 2^x, který už jste nakreslili?

14 Jakou hodnotu mají tyto mocniny dvojky? (Upravte je tak, aby ve výsledku byly jen odmocniny, zlomky a čísla. Žádné mocniny.)

1. 2^3; **2.** 2^{-2}; **3.** 2^0; **4.** $2^{3/2}$; **5.** $2^{-7/3}$.

15 Vypočtěte následující logaritmy (pomůže napsat vnitřek logaritmu jako nějakou mocninu základu. Logaritmus je pak ta mocnina):

1. $\log_2 4$; **2.** $\log_3 \frac{1}{9}$; **3.** $\log_5 1$; **4.** $\log_2 \sqrt{8}$.

16 Může být a^x (při $a > 0$) rovno nule? Může být dokonce záporné?

17 Pro jaká x má smysl výraz a^x, je-li a záporné? Dovedete říct, proč u mocninné funkce, kde x může být úplně libovolné, raději $a \leq 0$ nedovolujeme?

18 Potřebujeme mnoho mocninných funkcí o nejrůznějších základech, nebo nám stačí jedna jediná? A potřebujeme logaritmy o všech možných základech, nebo nám stačí jeden jediný?