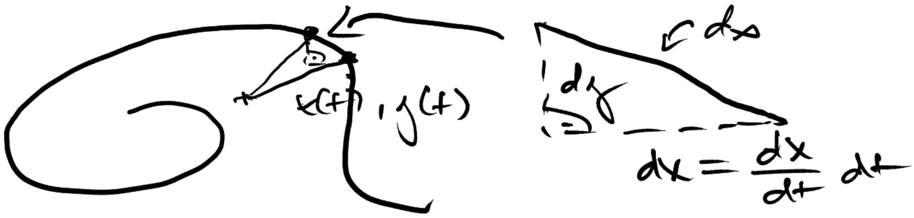
1 Mějme nějakou křivku danou parametricky $x = x(t)$, $y = y(t)$. Když posuneme parametr o $\mathrm{d}t$, o kolik se změní x a y? Podle toho spočítejte délku kousku křivky $\mathrm{d}s$, který při této změně vykreslíme. Vizte obrázek.



Délku křivky už pak zjistíme snadno tím, že zintegrujeme $\mathrm{d}s$.

2 Vypočtěte délku:

1. paraboly $y = x^2$ mezi body $x = -1$ a $x = +1$;
2. řetězovky $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ mezi body $x = 0$ a $x = b$.

3 Co když by ta křivka byla zadaná v polárních souřadnicích? Tedy kdybychom místo $x(t)$ a $y(t)$ měli zadáno $r(t)$ a $\varphi(t)$? Přepište element délky $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ tak, aby v něm vystupovalo pouze r a φ. (**Nápověda:** Mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí vztah $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.)

4 Vypočtěte délku:

1. logaritmické spirály $r = \mathrm{e}^{a\varphi}$ od jejího prostředku v $r = 0$ až do bodu s $r = 1$;
2. kardioidy $r = a(1 + \cos\varphi)$ (celá křivka se opíše, když φ projde od 0 do 2π).

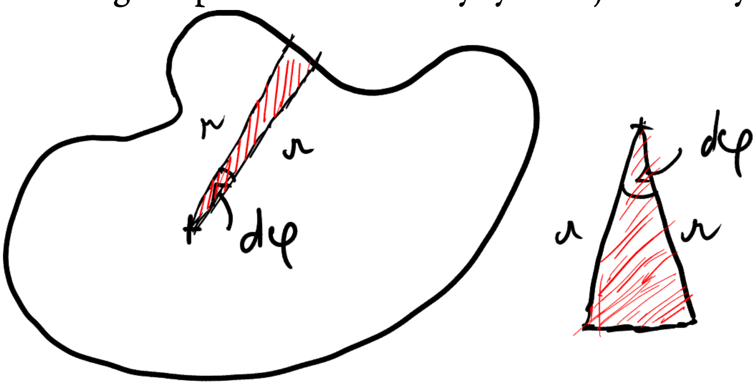
---

1 Často se říká, že integrál udává plochu pod křivkou. Ale proč to tak je? To, co dělá integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, je to, že sčítá hromadu nekonečně malých kousků $f(x)\,\mathrm{d}x$. Kde najdete plochu těchto kousíčků na grafu funkce $f(x)$?

2 Nalezněte plochu následujících útvarů:

1. kusu paraboly $ax(b - x)$, který je nad osou x. Zapište výsledek pomocí jeho „základny“ a „výšky“;
2. elipsy o poloosách a a b;
3. bramboroidu ohraničeného shora grafem funkce $\frac{1}{1+x^2}$, ze stran přímkami $x = \pm 1$ a zdola osou $y = 0$.

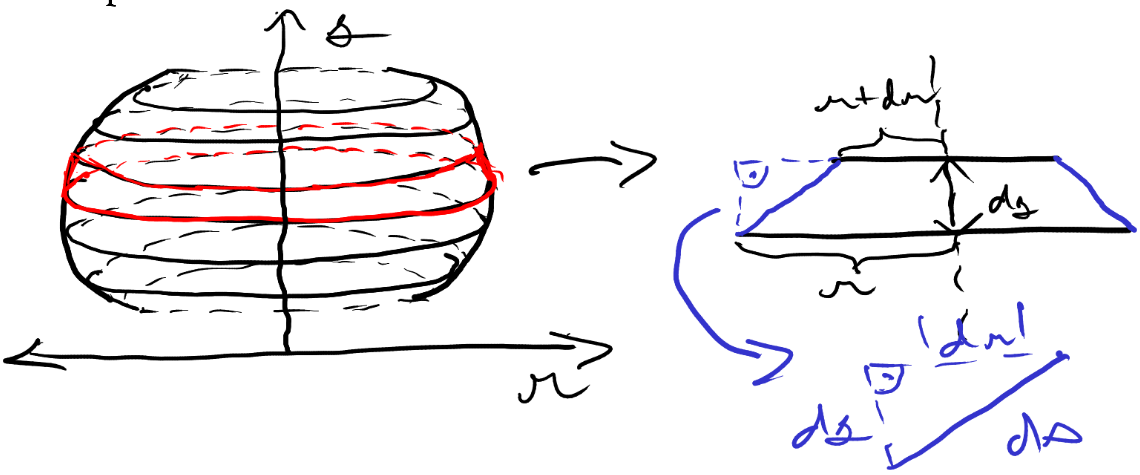
3 Co když chceme spočítat plochu omezenou nějakou křivkou zadanou v polárních souřadnicích (tedy vzdáleností od počátku r a úhlem φ)? Podívejte se na obrázek níže. Jaká je plocha červeně vybarveného trojúhelníčka? Integrací pak sečtěte všechny tyto trojúhelníčky a dostanete plochu.



4 Spočtěte plochu následujících útvarů:

1. Lemniskáty zadané vztahem $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. **2.** Kardioidy zadané vztahem $r = a(1 + \cos\varphi)$.

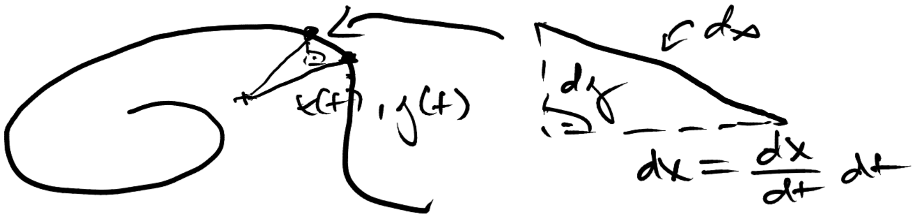
1 Představte si křivku zadanou ve tvaru $r = r(z)$, kde r je kolmá vzdálenost každého bodu křivky od osy z (viz obrázek). Teď tu křivku vezmeme a otočíme ji kolem osy z, čímž vykreslíme nějakou plochu. Představte si ji nakrouhanou na malé placičky jako na obrázku a zjistěte (všechny součiny dvou nekonečně malých veličin d(…) berte jako nulu):
1. jaký objem má jedna taková placička? **2.** jaký povrch mají její boční strany (vyznačené modře)?
Objem a povrch takového rotačního tělesa pak zjistíme prostě tak, že zintegrujeme objemy, resp. povrchy všech těchto placiček.



2 Vypočtěte objemy a povrchy následujících těles:
1. katenoidu, který vznikne rotací křivky $r = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$ pro $-b < z < b$;
2. paraboloidu, který vznikne rotací paraboly $z = a - \frac{ar^2}{b^2}$ pro $0 < r < b$.

---

1 Mějme nějakou křivku danou parametricky $x = x(t)$, $y = y(t)$. Když posuneme parametr o dt, o kolik se změní x a y? Podle toho spočítejte délku kousku křivky ds, který při této změně vykreslíme. Vizte obrázek.



Délku křivky už pak zjistíme snadno tím, že zintegrujeme ds.

2 Vypočtěte délku:
1. paraboly $y = x^2$ mezi body $x = -1$ a $x = +1$;
2. řetězovky $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ mezi body $x = 0$ a $x = b$.

3 Co když by ta křivka byla zadaná v polárních souřadnicích? Tedy kdybychom místo $x(t)$ a $y(t)$ měli zadáno $r(t)$ a $\varphi(t)$? Přepište element délky $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ tak, aby v něm vystupovalo pouze r a φ. (**Nápověda:** Mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí vztah $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.)

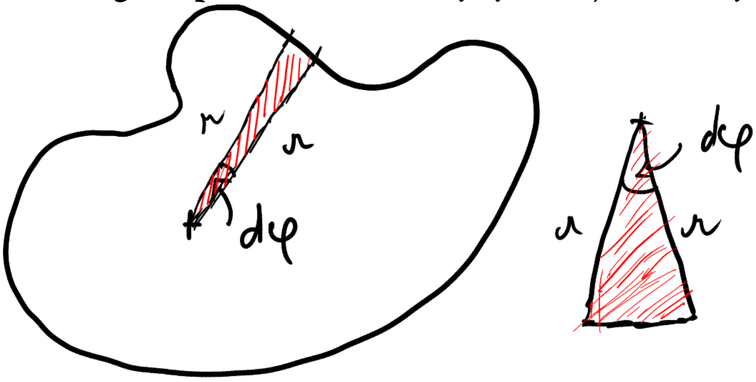
4 Vypočtěte délku:
1. logaritmické spirály $r = \mathrm{e}^{a\varphi}$ od jejího prostředku v $r = 0$ až do bodu s $r = 1$;
2. kardioidy $r = a(1 + \cos \varphi)$ (celá křivka se opíše, když φ projde od 0 do 2π).

1 Často se říká, že integrál udává plochu pod křivkou. Ale proč to tak je? To, co dělá integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, je to, že sčítá hromadu nekonečně malých kousků $f(x)\,\mathrm{d}x$. Kde najdete plochu těchto kousíčků na grafu funkce $f(x)$?

2 Nalezněte plochu následujících útvarů:

1. kusu paraboly $ax(b-x)$, který je nad osou x. Zapište výsledek pomocí jeho „základny" a „výšky";
2. elipsy o poloosách a a b;
3. bramboroidu ohraničeného shora grafem funkce $\frac{1}{1+x^2}$, ze stran přímkami $x = \pm 1$ a zdola osou $y = 0$.

3 Co když chceme spočítat plochu omezenou nějakou křivkou zadanou v polárních souřadnicích (tedy vzdáleností od počátku r a úhlem φ)? Podívejte se na obrázek níže. Jaká je plocha červeně vybarveného trojúhelníčku? Integrací pak sečtěte všechny tyto trojúhelníčky a dostanete plochu.



4 Spočtěte plochu následujících útvarů:

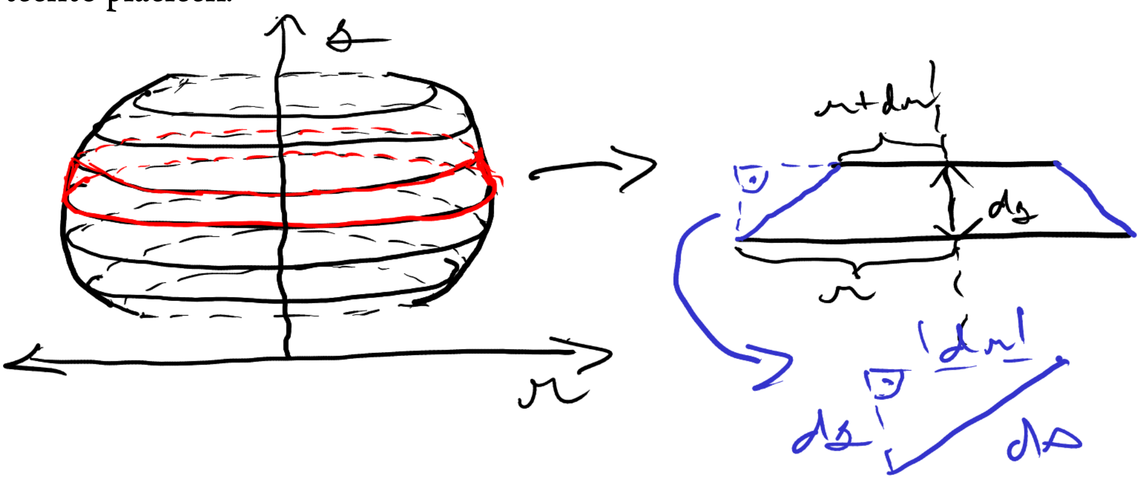
1. Lemniskáty zadané vztahem $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. **2.** Kardioidy zadané vztahem $r = a(1 + \cos\varphi)$.

---

1 Představte si křivku zadanou ve tvaru $r = r(z)$, kde r je kolmá vzdálenost každého bodu křivky od osy z (viz obrázek). Teď tu křivku vezmeme a otočíme ji kolem osy z, čímž vykreslíme nějakou plochu. Představte si ji nakrouhanou na malé placičky jako na obrázku a zjistěte (všechny součiny dvou nekonečně malých veličin $\mathrm{d}(\cdots)$ berte jako nulu):

1. jaký objem má jedna taková placička? **2.** jaký povrch mají její boční strany (vyznačené modře)?

Objem a povrch takového rotačního tělesa pak zjistíme prostě tak, že zintegrujeme objemy, resp. povrchy všech těchto placiček.



2 Vypočtěte objemy a povrchy následujících těles:

1. katenoidu, který vznikne rotací křivky $r = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$ pro $-b < z < b$;
2. paraboloidu, který vznikne rotací paraboly $z = a - \frac{ar^2}{b^2}$ pro $0 < r < b$.