Sedmé cvičení (neurčité integrály)

Základní pravidla pro počítání integrálů

Několik užitečných faktů o integrování:

- Neurčitý integrál je opakem derivace, tj. když je $f' = g$, tak to znamená, že $\int g\,\mathrm{d}x = f$.
- Protože derivace konstanty je nula, musí se k výsledku integrování přičíst libovolná konstanta.
- Integrál je lineární: $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$, jsou-li α, β konstanty a f, g nějaké funkce.
- Integrace per partes: $\int f g'\,\mathrm{d}x = fg - \int f' g\,\mathrm{d}x$, kde f, g jsou funkce.
- Substituce: pokud chceme v integrálu přejít k jiné proměnné, musíme přepsat i $\mathrm{d}x$. S tím se zachází jako při derivování.

Tabulka integrálů: `https://is.muni.cz/auth/el/sci/podzim2020/M1100F/um/tabulka-derivaci-integralu.pdf`.

V této lekci nás bohužel nečeká nic jiného než integrování, integrování a zase integrování. Je to dovednost, která je na jednu stranu velmi potřebná, na druhou stranu spočívá na všelijakých tricích, které se musíte naučit. A to nejde jinak než počítáním.

86 Spočtěte tyto integrály:

1. $\int (3 - x^2)^3\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **3.** $\int (1 + \sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int (2^x + 3^x)^2\,\mathrm{d}x$.

87 Provedením lineární substituce vypočtěte následující integrály:

1. $\int (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$; **4.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$;

88 Rozbitím na součet vypočtěte integrály:

1. $\int x^2(2-3x^2)^2\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x}$; **4.** $\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

89 Pomocí rozličných jednoduchých substitucí spočtěte integrály:

1. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{\mathrm{e}^x}{2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; **4.** $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **6.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

7. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$; **9.** $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$; **10.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

90 Spočtěte následující integrály pomocí integrace per partes:

1. $\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha \neq -1$ je reálný parametr;

6. $\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$; **7.** $\int \frac{x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$; **8.** $\int \ln^n x\,\mathrm{d}x$, n je přirozené číslo.

Nápověda: Ad 6. Co je lepší než per partes? Dvakrát per partes! **Ad 7.** $(x\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x(x+1)$. **Ad 8.** Co je lepší než per partes? n-krát per partes!

91 Užitím vhodných substitucí vypočtěte tyto integrály:

1. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$; **4.** $\int \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a < x < b)$;

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$ $(a < b)$; **7.** $\int \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Nápověda: Ad 3. $x = a \operatorname{tg} u$. **Ad 4.** $x = \sin^2 u$. **Ad 5.** $x - a = (b-a)\sin^2 u$; **Ad 6.** $x + a = (b-a)\operatorname{sh}^2 u$. **Ad 7.** $x = \operatorname{tg} u$.

Odpovědi a řešení

86. **Ad 1.** Rozvineme podle binomické věty: $\int (3-x^2)^3\,dx = \int (27-27x^2+9x^4-x^6)\,dx = 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{x^7}{7}+C$. **Ad 2.** Přičteme a odečteme jedničku: $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$. **Ad 3.** Integrujeme jednotlivé sčítance a dostaneme $x-\cos x+\sin x+C$. **Ad 4.** Rozepíšeme mocninu: $\int (2^x+3^x)^2 dx = \int (4^x+2\cdot 6^x+9^x)dx = \frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$.

87. **Ad 1.** $\int (\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})dx = \int \mathrm{e}^{-x}\,dx + \int \mathrm{e}^{-2x}\,dx$. V prvním integrálu položíme $-x=u$, takže je $dx=-du$, v druhém integrálu dáme $-2x=u$, takže $dx=-du/2$. Celkem máme výsledek $-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u} = \mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$. **Ad 2.** Lineární substituce $u=2x-3$, dostaneme $\frac{1}{2}\int u^{10}\,du = \frac{1}{2}\frac{u^{11}}{11} = \frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C$. **Ad 3.** Chceme se zbavit dvojky, takže ji vytkneme: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)^2}}$. Teď položíme $u=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$ a máme $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+C$. **Ad 4.** Zapišme $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Z toho je vidět, že je $1-\sin x = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$, takže hned máme $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$. Položíme $u=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$, takže výsledek je $\displaystyle\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$.

88. **Ad 1.** $\int x^2(2-3x^2)^2\,dx = \int (4x^2-12x^4+9x^6)\,dx = \frac{4x^3}{3}-\frac{12x^5}{5}+\frac{9x^7}{7}+C$. **Ad 2.** Tady pomůže $\frac{1+x}{1-x} = -\frac{x+1}{x-1} = -1-\frac{2}{x-1}$. To už se snadno integruje na $-x-2\ln(x-1)+C$. **Ad 3.** Přerozložíme x^2 takto: $x^2 = [(x+1)-1]^2 = (x+1)^2-2(x+1)+1$. Pak máme $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}dx = \int \left(x+1-2+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+C$. **Ad 4.** Tady přepíšeme x jako $-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}$. Tím dostaneme $\int x\sqrt{2-5x}\,dx = \int \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}(2-5x)\right)\sqrt{2-5x}\,dx = \frac{2}{5}\int (2-5x)^{1/2}\,dx - \frac{1}{5}\int (2-5x)^{3/2}\,dx = -\frac{4}{75}(2-5x)^{3/2}+\frac{2}{125}(2-5x)^{5/2}+C$. **Ad 5.** Zase podobný trik: $x=-\frac{1}{3}(1-3x)+\frac{1}{3}$, takže náš integrál lze psát jako $\frac{1}{3}\int [(1-3x)^{-1/3}-(1-3x)^{2/3}]\,dx = \frac{(1-3x)^{5/3}}{15}-\frac{(1-3x)^{2/3}}{6}+C$.

89. **Ad 1.** Klademe $\ln x = u$, $\frac{dx}{x}=du$. Pak dostaneme $\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} = \frac{\ln^3}{3}+C$. **Ad 2.** Položíme $\mathrm{e}^x=u$. Pak je i $\mathrm{e}^x\,dx=du$ a máme $\displaystyle\int \frac{du}{2+u} = \ln(u+2) = \ln(\mathrm{e}^x+2)+C$. **Ad 3.** Dáme $x=\ln u$, $dx=\frac{du}{u}$. Dostaneme $\displaystyle\int \frac{du}{u(u+u^{-1})} = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u = \operatorname{arctg}\mathrm{e}^x+C$. **Ad 4.** Stačí položit $u=\sin x-\cos x$. Pak je $du=(\cos x+\sin x)dx$, takže náš integrál přejde v $\int u^{-1/3}\,du$ a je tedy roven $\frac{3}{2}u^{2/3} = \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{2/3}+C$. **Ad 5.** Tady položíme $u=\operatorname{arctg} x$, $du=\frac{dx}{1+x^2}$ a máme prostě $\int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}+C$. **Ad 6.** Tady je třeba klást $\arcsin x = u$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Pak počítáme $\int u^{-2}\,du = -u^{-1} = -\frac{1}{\arcsin x}+C$. **Ad 7.** Položíme $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=u$, máme tedy $du=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Integrál přejde v $\int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^{3/2}+C$. **Ad 8.** Oddělíme jeden sinus a přepíšeme $\sin^3 x = \sin^2 x\cdot\sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$. To se výborně hodí na substituci $\cos x = u$, $du=-\sin x dx$. Integrál tedy vyjde $\int (u^2-1)\,du = \frac{u^3}{3}-u = \frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$. **Ad 9.** Podobně jako v předchozím bodě máme $\cos^5 x = (1-\sin^2 x)^2\cos x$, tj. $\int \cos^5 x\,dx = \int (1-u^2)^2\,du = u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5} = \sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$. **Ad 10.** Jelikož $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$, měli bychom přepsat sinus pomocí kotangent. To se dá udělat takto: $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$. Takže můžeme psát $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = -\int \frac{-dx}{\sin^2 x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} = -\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du =$

$= \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = \ln\left(\operatorname{ctg} x + \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right) = \ln\dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \ln\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + C.$

90. **Ad 1.** $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} \operatorname{arctg} x & \dfrac{1}{1+x^2} \\ x & \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. V čitateli přičteme a odečteme jedničku, zlomek se rozpadne na $1-\dfrac{1}{1+x^2}$ a to už se snadno integruje. Výsledek je $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2} + C$. **Ad 2.** $\displaystyle\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} \arcsin x & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1 & x \end{matrix} \right\| = x\arcsin x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$. **Ad 3.** $\displaystyle\int x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} x^2 & 2x \\ x\mathrm{e}^{-x^2} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \end{matrix} \right\| = -\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + \int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2+1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C$. **Ad 4.** Derivováním zrušíme x: $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} x & 1 \\ \sin x & -\cos x \end{matrix} \right\| = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$. **Ad 5.** $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} \ln x & x^{-1} \\ x^\alpha & \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + C$. **Ad 6.** Jak varuje nápověda, tady to bude chtít per partes použít dvakrát po sobě. Počítejme: $\displaystyle\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} (\arcsin x)^2 & \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1 & x \end{matrix} \right\| = x(\arcsin x)^2 + \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} \arcsin x & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} & 2\sqrt{1-x^2} \end{matrix} \right\| = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$. **Ad 7.** Tady je potřeba oddělit $x\mathrm{e}^x$ to derivovat, jak upozorňuje nápověda: $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left\| \begin{matrix} x\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x(x+1) \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & -\dfrac{1}{x+1} \end{matrix} \right\| = -\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1} + C$.

Ad 8. Položme $x = \mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Tím integrál přejde na $\displaystyle\int u^n\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Teď musíme použít per partes: u^n se derivuje na nu^{n-1} a e^u se integruje na e^u. Máme tedy $\displaystyle\int u^n\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u u^n - n\int u^{n-1}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. To je ale úplně stejný typ integrálu jako předtím. Scéna se tedy opakuje a konečně zjišťujeme, že integrál je roven $\displaystyle\mathrm{e}^u\left[u^n - nu^{n-1} + n(n-1)u^{n-2} - \cdots + (-1)^n n!\right] = C + (-1)^n n! x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\ln^k x}{k!}$.

91. **Ad 1.** Položíme $1-5x^2 = u$, $\mathrm{d}u = -10x\,\mathrm{d}x$. Také vidíme, že je $x^2 = \dfrac{1-u}{5}$. Pomocí toho všeho přepíšeme integrál na $\displaystyle-\frac{1}{10}\int \frac{1-u}{5}\cdot u^{10}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{50}\left(\frac{(1-5x^2)^{12}}{12} - \frac{(1-5x^2)^{11}}{11}\right) + C$. **Ad 2.** Položíme $2-x = u$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$. Tak integrál přejde na tvar $\displaystyle\int \frac{(2-u)^2}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int (u^{3/2} - 4u^{1/2} + 4u^{-1/2})\,\mathrm{d}u = \frac{2(2-x)^{5/2}}{5} - \frac{8(2-x)^{3/2}}{3} + 8\sqrt{2-x} + C$. **Ad 3.** Položíme $x = a\operatorname{tg} u$. Integrál tím přejde na $\displaystyle\int \frac{a(1+\operatorname{tg}^2 u)\,\mathrm{d}u}{(a^2\operatorname{tg}^2 u + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{1}{a^2}\int \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\sin u = \frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{1}{a^2}\frac{x/a}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$. **Ad 4.** Položíme $x = \sin^2 u$, $\mathrm{d}x = 2\sin u\cos u$. Integrál pak přejde na $\displaystyle 2\int \sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int \sin^2 2u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int (1-\cos 4u)\,\mathrm{d}u = \frac{u}{4} - \frac{\sin 4u}{16}$. Jelikož $\sin 4u = 4\sin u\cos^3 u - 4\sin^3 u\cos u = 4\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}\,(1-2\sin^2 u)$, shledáme po dosazení $\sin u = \sqrt{x}$, že je $\sin 4u = 4\sqrt{x(1-x)}\,(1-2x)$, a tak je konečný výsledek roven $\dfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{x} - \dfrac{1}{4}\sqrt{x(1-x)}\,(1-2x)$. **Ad 5.** Tady použijeme podobnou logiku jako v předchozím bodě, jen je nutno položit $x-a = (b-a)\sin^2 u$. Pak také vidíme, že je $b-x = b-a-(x-a) = (b-a)(1-\sin^2 u) = (b-a)\cos^2 u$. Také máme $\mathrm{d}x = (b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u$. Dosadíme-li to do integrálu, dostaneme $\displaystyle\int \frac{(b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(b-a)\sin^2 u(b-a)\cos^2 u}} = \int \frac{(b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{(b-a)\sin u\cos u} = \int 2\,\mathrm{d}u = 2u$. No, to věru není složitý výsledek. Jen musíme obrátit rovnost $x-a = (b-a)\sin^2 u$, což dá $u = \arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$, takže celkem máme $2\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} + C$. **Ad 6.** Úplně stejně jako v předchozím bodě dostaneme výsledek $2u = 2\operatorname{arsh}\sqrt{\dfrac{x+a}{b-a}} =$

$= 2\ln\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}} + C$. **Ad 7.** Položíme $x = \operatorname{tg} u$, $\mathrm{d}x = (1+\operatorname{tg}^2 u)\mathrm{d}u$, tj. $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Proto dostaneme $\displaystyle\int \frac{\mathbf{e}^u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}\mathrm{d}u =$ $\displaystyle= \int \mathbf{e}^u \cos u \,\mathrm{d}u = \mathfrak{Re}\int \mathbf{e}^{(1+\mathrm{i})u}\,\mathrm{d}u = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathbf{e}^{(1+\mathrm{i})u}\right) = \frac{\mathbf{e}^u}{\sqrt{2}}\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{2}}\left(\cos u \cos\frac{\pi}{4} + \sin u \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arctg} x}}{2}\frac{1+\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} =$ $\displaystyle= \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arctg} x}}{2}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

Osmé cvičení (další neurčité integrály)

Integrace racionálních funkcí

Parciální zlomky

Pro připomenutí: každý polynom s reálnými koeficienty lze zapsat jako součin závorek ve tvaru $(x-a_k)^{n_k}$ a závorek ve tvaru $(x^2+b_kx+c_k)^{\ell_k}$. Chceme-li rozkládat zlomek $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde P má menší stupeň než Q, na součet parciálních zlomků, postupujeme takto:

1. Rozložíme Q na součin závorek, jak je to popsáno výše.
2. Za každou závorku ve tvaru $(x-a)^n$ zapíšeme do součtu zlomky $\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_n}{(x-a)^n}$ (A_k jsou neznámé koeficienty, u každého zlomku jiné).
3. Za každou závorku ve tvaru $(x^2+bx+c)^n$ zapíšeme do součtu zlomky $\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\dfrac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$.
4. Tím jsme získali výsledný rozklad, až na to, že v něm vystupují nějaké neznámé koeficienty. Ty určíme tak, že celý součet opět dáme na společného jmenovatele a srovnáme jeho čitatel s $P(x)$.

To je aspoň učebnicový postup. Já Vám ovšem hned v další úloze předvedu něco lepšího.

92 Má-li jmenovatel zlomku jen jednoduché kořeny, lze psát $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ a rozklad tohoto zlomku lze psát ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Ukažte, že v tomto případě pro neznámé koeficienty A_k platí vzorce

$$A_k=\lim_{x\to a_k}\frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}=\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

Nápověda: Násobte obě strany $x-a_k$ a vemte limitu $x\to a_k$.

93 Upozorňuji ještě jednou, že vzorec výše funguje **pouze v případě, že jmenovatel zlomku má jen jednoduché kořeny**. Zkuste vymyslet, jak by šlo tuto metodu vylepšit, aby fungovala i v případě, že:
1. jmenovatel má i vícenásobné kořeny; **2.** jmenovatel obsahuje nerozložitelné kvadratické trojčleny.

94 Rozložte v parciální zlomky:

1. $\dfrac{1}{x^2-1}$; **2.** $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$; **3.** $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$; **4.** $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

95 Rozložením integrandu v parciální zlomky spočtěte následující integrály:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$; **2.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$; **3.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; **4.** $\displaystyle\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$; **5.** $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$.

96 Rozličnými postupy spočtěte tyto integrály:

1. $\displaystyle\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$; **2.** $\displaystyle\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx$; **3.** $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{(x-1)^{100}}$; **4.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$. **Nápověda: Ad 4.** $u=\dfrac{x+a}{x+b}$

97 Derivováním za znamením integrálu (nejlépe podle parametru c) spočtěte

$$\int\frac{dx}{(x^2+2bx+c)^2}\qquad(b^2-c<0).$$

Integrace výrazů s odmocninami

98 Vhodnými úpravami a substitucemi spočtěte následující integrály:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; **2.** $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$; **3.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$; **4.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; **5.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

Vzpomeňte si na trik, který jsme použili na cvičení: integrál typu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ jsme přepsali na $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a+bu+cu^2}}$, kde $u = 1/x$. To se bude v následujícím cvičení často hodit.

99 Spočítejte následující integrály s kvadratickými výrazy pod odmocninou:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$.

100 Užitím přiměřené substituce převeďte následující integrály na integrál z racionální funkce (ten už nedopočítávejte):

1. $\displaystyle\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; **3.** $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x$.

Goniometrické integrály

101 Vyčíslete integrály:

1. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^4 x}$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$; **5.** $\displaystyle\int \sin 5x\cos x\,\mathrm{d}x$; **6.** $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$;

7. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x+a)\,\mathrm{d}x$; **8.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\operatorname{tg} x}$.

102 Jakýkoli integrál, který je racionální funkcí sinů a kosinů (a tedy i tangent a kotangent), se dá převést na racionální lomenou funkci (tedy podíl dvou polynomů) uplatněním substituce $u = \operatorname{tg} x/2$. Jak se při této substituci dají následující veličiny vyjádřit pouze pomocí u?
1. $\mathrm{d}x$; **2.** $\sin x$; **3.** $\cos x$; **4.** $\operatorname{tg} x$.

103 S pomocí universální substituce $\operatorname{tg} x/2 = u$ spočtěte tyto integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ $(0<b<a)$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$ $(c^2>a^2+b^2)$; **3.** $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Jiné rozličné integrály

104 Pomocí integrace per partes okažte, že platí (n je přirozené číslo):

1. $\displaystyle\int x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = C+(-1)^n n!\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x^n} = C-\frac{\operatorname{li}(\mathrm{e}^x)}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{e}^x\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$, přičemž značíme $\displaystyle\operatorname{li} x = \int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

105 Vypočtěte následující integrály s exponenciálou:

1. $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int x^7\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$; **5.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{x/3}+\mathrm{e}^{x/6}}$; **6.** $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$;

7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$; **8.** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

106 Nakonec nabízím ještě várku nejroztodivnějších dalších integrálů. Poradíte si s nimi?

1. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}(x+1)\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int \ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}$;

5. $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)\mathrm{d}x$; **6.** $\displaystyle\int x\arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; **7.** $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\displaystyle\int \sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$.

Odpovědi a řešení

92. Zařídíme se přesně podle nápovědy: rovnost $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{x-a_1}+\dfrac{A_2}{x-a_2}+\dots+\dfrac{A_n}{x-a_n}$ vynásobíme $x-a_k$ (pro nějaké a_k) a vezmeme limitu $x \to a_k$. Každý sčítanec $\dfrac{A_\ell}{x-a_\ell}$ přejde na $\lim\limits_{x\to a_k} \dfrac{A_\ell(x-a_k)}{x-a_\ell}$. Jenomže všechna a jsou navzájem různá, a tak při $\ell \neq k$ jde tato limita k $\dfrac{A_\ell(a_k-a_k)}{a_k-a\ell} = \dfrac{0}{\text{něco nenulového}} = 0$. Proto všechny sčítance vpravo vypadnou, jen ten s a_k zůstane. Ten přejde na $\lim\limits_{x\to a_k}\dfrac{A_k(x-a_k)}{x-a_k} = A_k$. No a vlevo provedeme totéž, takže dostaneme $\lim\limits_{x\to a_k}\dfrac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}$. Jelikož a_k je pak a_k kořenem $Q(x)$, platí $Q(a_k)=0$, a tak lze rovněž psát $\lim\limits_{x\to a_k}\dfrac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to a_k}\dfrac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)-Q(a_k)}$. $P(x)$ můžeme dát před limitu a zůstane definice derivace, jenom v převrácené hodnotě, takže skutečně dostaneme $A_k = \dfrac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$.

93. Jsou různé možnosti. Zde popíšu jenom to, co většinou nejvíc vyhovuje mně. **Ad 1.** Tady použijeme to, že $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{(n-1)!}{(x-a)^n}$. Proto můžeme každý násobný kořen přepsat jako $\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\dfrac{1}{x-a}$, kde pak za a dosadíme příslušné číslo. Třeba $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\dfrac{1}{(x-a)(x-1)}\right]_{a=-1} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\dfrac{1}{a-1}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-1}\right)\right]_{a=-1} = \left[-\dfrac{1}{(a-1)^2}\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{a-1}\dfrac{1}{(x-a)^2}+\dfrac{1}{(a-1)^2}\dfrac{1}{x-1}\right]_{a=-1} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x-1}$. **Ad 2.** Kvadratický trojčlen se objeví, protože polynom má dva nereálné navzájem komplexně sdružené kořeny z a $z^\star$. Pokud jsou tyto kořeny jednoduché, tak se pro ně v rozvoji objeví patřičné sčítance, tj. $\dfrac{A}{x-z}+\dfrac{B}{x-z^\star}$. Protože je polynom reálný, nesmí se měnit při komplexním sdružení, a proto se ani tento součet nesmí změnit. Má tedy být $\dfrac{A}{x-z}+\dfrac{B}{x-z^\star} = \dfrac{B^\star}{x-z}+\dfrac{A^\star}{x-z^\star}$, takže má být $B=A^\star$. Proto je výsledný sčítanec roven $2\,\mathfrak{Re}\,\dfrac{A}{x-z}$. Má-li kvadratický trojčlen tvar $x^2+2ax+b=(x-z)(x-z^\star)$, vidíme, že lze psát $z=-a+\mathrm{i}\sqrt{b-a^2}$, takže nakonec je příslušný sčítanec roven $2\dfrac{\mathfrak{Re}[A(x-z^\star)]}{x^2+ax+b}$. Pokud jsou komplexní kořeny násobné, lze násobnost odstranit podobně jako v předchozím bodě.

94. **Ad 1.** $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$. **Ad 2.** Užitím výsledku cvičení 92 hned dostáváme $\dfrac{1/2}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1/2}{x-2}$. **Ad 3.** $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x} = \dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$. Užitím podobné metody jako v úloze 92 zjistíme, že $A=1$, $C=-1$. Zbývá už jen jeden sčítanec, takže ostatní od původního zlomku odečteme a dostaneme $\dfrac{1}{x(x+1)^2}\left[1-(x+1)^2+x\right] = -\dfrac{x^2+x}{x(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x+1}$. To je ten zbývající sčítanec, takže rozvoj je $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$. **Ad 4.** Při $\dfrac{1}{x-1}$ musí stát koeficient $1/3$, takže to stačí odečíst a druhý člen rozvoje je $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\left(1-\dfrac{x^2+x+1}{3}\right) = -\dfrac{(x-1)(x+2)}{3(x-1)(x^2+x+1)} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$. Celkem $\dfrac{1/3}{x-1}-\dfrac{1}{3}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$.

95. **Ad 1.** $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{1/3}{x+1}-\dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$. To už můžeme integrovat na $\dfrac{1}{3}\ln|x+1| - \dfrac{1}{6}\displaystyle\int\dfrac{(2x-1-3)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$. Tento poslední integrál rozdělíme na $\displaystyle\int\dfrac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \ln|x^2-x+1|$ a na $-3\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = -2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Celkem máme $\dfrac{1}{3}\ln|x+1|-\dfrac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **Ad 2.** Vyjdeme z toho, že $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2-\sqrt{2}x+1)$. To je potřeba rozložit na parciální zlomky. Můžeme vyjít třeba z toho, že závorka s plusem má kořeny $\mathrm{e}^{\pm3\pi\mathrm{i}/4}$ a ta s mínusem $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/4}$. Derivace jmenovatele je $4x^3$. Takže dostaneme $2\,\mathfrak{Re}\left[\dfrac{1}{4\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\pi/4}}\dfrac{x-\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\dfrac{1}{4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}\dfrac{x-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$. To se musí integrovat. Integrál $\displaystyle\int\dfrac{x\pm\sqrt{2}}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$ můžeme přepsat jako $\frac{1}{2}\left[\displaystyle\int\dfrac{2x\pm\sqrt{2}}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}\pm\sqrt{2}\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}\right] = \dfrac{1}{2}\ln|x^2\pm\sqrt{2}x+1|\pm\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x\pm1)$. Celkem tedy máme $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\right]+C$. **Ad 3.** Podle úlohy 92 vidíme, že u $\dfrac{1}{x+1}$ musí být $1/2$. To odečteme od původního zlomku a tím dostaneme druhý sčítanec. Celkem je tedy rozklad $\frac{1/2}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$. První člen se integruje na $\frac{1}{2}\ln|x+1|$, druhý se rozpadne na $-\frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. Po sečtení tedy máme $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, což je výsledek. **Ad 4.** Rozložíme zlomek v závorce a dostaneme $\frac{x}{(x-2)(x-1)}=$ $=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}$. Proto je $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x-2}$. Když to integrujeme dostaneme výsledek $4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x-2}+C$. **Ad 5.** Rozložíme $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ na $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right]$, což se snadno integruje na $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C$.

96. **Ad 1.** Všimneme si, že $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ je reciproký polynom, tj. jakýsi palindrom (zepředu a zezadu má stejné koeficienty). U takových je vždycky dobrý nápad vytknout a převést na jiný polynom v proměnné $x+\frac{1}{x}$. Když to uděláme, zjistíme, že je ten polynom roven $x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]=x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]=x^2\left[x+\frac{1}{x}+1\right]^2=(x^2+x+1)^2$. Takže máme spočítat $\int\frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$, což už je přímo nachystané na substituci. Tu uděláme a dostaneme výsledek $C-\frac{1}{x^2+x+1}$. **Ad 2.** Tady je potřeba položit $x^7=u$. Jenže to budeme potřebovat x^6 v čitateli. Naštěstí po rozšíření dostaneme $\frac{1}{7}\int\frac{1-x^7}{x^7(1+x^7)}7x^6\,\mathrm{d}x$, což je na tu substituci jako dělané. Po jejím provedení dostaneme $\frac{1}{7}\int\frac{1-u}{u(1+u)}=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{(1+x^7)^2}\right|+C$. **Ad 3.** Prostě přerozložíme x^3 tak, aby se přizpůsobilo tomu $x-1$ ve jmenovateli. Napíšeme $x^3=[(x-1)+1]^3=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+3$. Po vložení do integrálu se integrál rozpadne na součet a snadno už dostaneme výsledek $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C$. **Ad 4.** Zařídíme se podle nápovědy. U této substituce platí $\mathrm{d}u=\frac{b-a}{(x+b)^2}\mathrm{d}x$, $x+a=\frac{(b-a)u}{1-u}$ a $x+b=\frac{b-a}{1-u}$. Integrál přepíšeme takto: $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{b-a}\int\frac{(b-a)\,\mathrm{d}x}{(x+b)^2}\frac{1}{(x+a)^m(x+b)^{n-2}}$. Teď můžeme vložit substituci a integrál přejde na $\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\cdot$ $\cdot\int\frac{(1-u)^{m+n-2}\,\mathrm{d}u}{u^m}$. Integrace je teď už snadná, stačí rozepsat závorku v čitateli podle binomické věty a ze sumy oddělit ten člen, kde se bude integrovat $1/u$ (to totiž dá logaritmus a ne mocninu). Výsledek: $\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\left[\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m+n-2}{k}\frac{(-1)^k}{k-m+1}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{k-m+1}-\right.$ $\left.-(-1)^m\binom{m+n-2}{m-1}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+(-1)^m\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{m+n-2}{m+\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell+1}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\ell+1}\right]+C.$

97. Označme $D=c-b^2>0$ a počítejme $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2bx+c}$. Doplněním na čtverec se ve jmenovateli objeví $(x+b)^2+c-b^2=(x+b)^2+$ $+D$, takže počítáme $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2+D}=\frac{1}{\sqrt{D}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{D}}$. Jelikož platí $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2bx+c)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2bx+c}$, stačí nám tento výsledek derivovat podle D a budeme mít spočítáno. Navíc, jelikož $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}c}=1$, můžeme psát $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}$ jako $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}$. Počítáme tedy $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{D}}\right]$, což už je přímočaré a brzo obdržíme výsledek $\frac{1}{2D^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{D}}+\frac{(x+b)/2D}{(x+b)^2+D}=\frac{1}{2(c-b^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}+$ $+\frac{1}{2(c-b^2)}\frac{x+b}{x^2+2bx+c}+C.$

98. **Ad 1.** Položme $x=u^2$, integrál přejde na $\int\frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}=2u-2\ln|1+u|=2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|+C$. **Ad 2.** Položíme $x=u^6$, integrál přejde na $6\int \frac{u^5\,du}{u^3+u^2+u+1}$. Dělíme jako na základní škole, dostaneme $\frac{u^5}{u^3+u^2+u+1} = u^2-u+\frac{u}{(u+1)(u^2+1)}$. Posledně jmenovaný zlomek rozložíme na $\frac{1}{2}\frac{u+1}{u^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{u+1}$. To všechno se nakonec integruje na $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\ln\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}}+C$. **Ad 3.** Rozšíříme $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, ve jmenovateli se objeví dvojka a v čitateli $2x-2\sqrt{x^2-1}$. Tím jsme tedy integrál upravili na $\int(x-\sqrt{x^2-1})\,dx$. Lepší bude ho zapsat jako $\int[2x-(x+\sqrt{x^2-1})]\,dx$, první sčítanec integrovat na x^2 a v druhém položit $x=\operatorname{ch}\ln y$, $dx=\frac{y-\frac{1}{y}}{2y}dy$. Tak totiž dostaneme $y=x+\sqrt{x^2-1}$. Tím přejde druhý kus integrálu na $\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\ln y$, což po dosazení y a sečtení s předchozím kusem dá $\frac{1}{2}\left[x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]+C$. **Ad 4.** Přepíšeme integrál na $\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ a položíme $u=\frac{x+1}{x-1}$, $du=-\frac{2\,dx}{(x-1)^2}$. Tak můžeme integrál předělat na $-\frac{1}{2}\int\frac{-2\,dx}{(x-1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-2/3}=-\frac{3}{2}u^{1/3}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$. **Ad 5.** Tady rozšíříme $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$. Ve jmenovateli se objeví jednička, takže zůstane $\int\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,dx$. To už se snadno rozepíše na součet a integruje. Výsledek je $\frac{2}{5}[x^{5/2}-(x+1)^{5/2}]+\frac{2}{3}[x^{3/2}+(x+1)^{3/2}]+C$.

99. **Ad 1.** Položme $u=1+x$, integrál přejde na $\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-2u+2}}$. Vytkneme z odmocniny a položíme $y=1/u$, dostaneme $-\int\frac{dy}{\sqrt{2y^2-2y+1}}$. Ve jmenovateli vytkneme dvojku, doplníme na čtverec a dostaneme $-\frac{2}{\sqrt{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{1+(2y-1)^2}}$, což se už snadno integruje na $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|2y-1+\sqrt{(2y-1)^2+1}\right|=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}+\frac{\sqrt{2+2x^2}}{1+x}\right|+C$. **Ad 2.** Přepíšeme na $\int\frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$. To se rozpadne na součet tří integrálů: $\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}+2\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$. První dva jsou tabulkové, třetí přepíšeme tím, že vytkneme z odmocniny a položíme $y=1/x$. Tím ten integrál přejde na $-2\int\frac{dy}{\sqrt{2y^2+2y+1}}=-2\sqrt{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1+(2y+1)^2}}=$ $=-2\sqrt{2}\ln\left|2y+1+\sqrt{(2y+1)^2+1}\right|$. Sečteme všechny tři integrály a dostaneme výsledek $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-$ $-2\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{x^2+(x+2)^2}}{x}\right|+C$. **Ad 3.** Tady máme štěstí, integrál přepíšeme na $-\int\frac{-1+x-x^2+1-1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx=-\int\sqrt{1+x-x^2}+$ $+\int\frac{2}{\sqrt{1+x-x^2}}$. Pod odmocninou doplníme na čtverec: $\sqrt{1+x-x^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}$. Integrály tím přejdou na $-\frac{\sqrt{5}}{2}\int\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx+\frac{4}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}}$. V prvním integrálu položíme $\frac{2x-1}{\sqrt{5}}=\sin y$, druhý už je tabulkový a máme výsledek $\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}-\frac{2x-1}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$. **Ad 4.** Tento integrál lze také psát ve tvaru $\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,dx$. Vnitřek odmocniny přepíšeme na $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$, načež můžeme položit $u=x-\frac{1}{x}$ a integrál přejde na $\int\frac{du}{\sqrt{2+u^2}}=\ln\left|\frac{u}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{u^2}{2}+1}\right|=\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C$.

100. **Ad 1.** $\frac{5+1}{2}=3$, což je celé číslo, takže můžeme rovnou klást $u^2=1-x^2$, $-u\,du=x\,dx$. Integrál přepíšeme na $\int x^4u^{-1}x\,dx=$ $=-\int(1-u^2)^2\,du$. **Ad 2.** Tady je $\frac{0+1}{3}$ necelé, ale když k tomu přičteme mocninu toho binomu, tj. $-1/3$, dostaneme číslo celé. Máme tedy vyhodit x^3 ven a dostaneme $\int x^{-1}(1+x^{-3})^{-1/3}\,dx$. Teď položíme $u^3 = 1+x^{-3}$, a tedy $3u^2\,du = -3x^{-4}\,dx$. Integrál tedy přepíšeme na $\int x^3u^{-1}x^{-4}\,dx = \int \frac{u\,du}{1-u^3}$. **Ad 3.** Vytkneme z odmocniny x^3, dostaneme $\int x(-1+3x^{-2})^{1/3}\,dx$. Tady položíme $u^3 = -1+3x^{-2}$, tj. $x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}u^2\,du$. Integrál pak přejde na $\int x^4ux^{-3}\,dx = -\frac{9}{2}\int \frac{u^3\,du}{(u^3+1)^2}$.

101. **Ad 1.** Přepíšeme jako $\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$, klademe $u = \sin x$. Výsledek: $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$. **Ad 2.** Přepíšeme jako $\int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\,dx}{\cos^4 x}$, položíme $u = \cos x$. Výsledek: $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$. **Ad 3.** Tady přepíšeme integrál na $\int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^4\,dx}{\operatorname{tg}^4 x}$. Klademe $u = \operatorname{tg} x$, dostaneme $\int \frac{(1+u^2)^3\,du}{u^4}$. To se rozpadne na součet $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + 3\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C$. **Ad 4.** Klademe $u = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, a tedy $\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{2\,du}{1+u^4}$. Vložíme to do integrálu a dostáváme $2\int \frac{du}{1+u^4}$. Tento integrál už jsme spočítali v úloze 95, takže už se s tím nemusíme znova trápit a hned máme výsledek $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2\operatorname{tg} x}-1)\right] + C$. **Ad 5.** $\sin 5x\cos x = \frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 4x)$. Integrací dostaneme výsledek $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + C$. **Ad 6.** Tady postupujeme obdobně: $\cos x\cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{4}(1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)$. Integrujeme a máme výsledek $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + C$. **Ad 7.** Užijeme toho, že $\operatorname{tg}(x+a) = \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} a}$. Označíme $\operatorname{tg} a = \alpha$ a vložíme to do našeho integrálu. Dostaneme $\int \operatorname{tg} x\frac{\operatorname{tg} x+\alpha}{1-\alpha\operatorname{tg} x}dx$. Položíme $u = \operatorname{tg} x$, integrál přejde na $\int \frac{u(u+\alpha)\,dx}{(1+u^2)(1-\alpha u)}$. Rozložíme integrand v parciální zlomky; tím vyjde najevo, že $\frac{u(u+\alpha)}{(1+u^2)(1-\alpha u)} = \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{1}{1+u^2}$, a to se už snadno integruje na $-\frac{1}{\alpha}\ln|1-\alpha u| - \operatorname{arctg} u = -x - \frac{\ln|1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} a|}{\operatorname{tg} a} + C$. **Ad 8.** Položíme $u = \operatorname{tg} x$, dostaneme $\int \frac{du}{(3+5u)(1+u^2)}$. Zlomek rozložíme na $\frac{25}{34}\frac{1}{3+5u} - \frac{5}{68}\frac{2u}{1+u^2} + \frac{3}{34}\frac{1}{1+u^2}$, což se integruje na $\frac{5}{34}\ln|3+5\operatorname{tg} x| - \frac{5}{68}\ln|1+\operatorname{tg}^2 x| + \frac{3}{34}x + C$.

102. Nejdřív si uvědomíme, že je $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Pak se vrhneme na jednotlivé body. **Ad 1.** Máme $du = (1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})\frac{dx}{2}$, což dává $dx = \frac{2\,du}{1+^2}$. **Ad 2.** $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$. **Ad 3.** $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. **Ad 4.** Stačí dělit výsledky předchozích dvou bodů mezi sebou a dostaneme $\frac{2u}{1-u^2}$. Totéž by vyšlo, kdybychom použili, že $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

103. **Ad 1.** Použijeme tu substituci, dostaneme integrál $\int \frac{2\,du}{a(1+u^2)+b(1-u^2)} = 2\int \frac{du}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)^2}$. To už se přímočaře integruje a dostaneme výsledek $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$. **Ad 2.** Upotřebíme substituci, dostaneme $2\int \frac{du}{2au+b(1-u^2)+c(1+u^2)}$. Přeskládáme to a doplníme na čtverec, čímž obdržíme $\frac{2}{c-b}\int \frac{du}{\left(u+\frac{a}{c-b}\right)^2+\frac{c^2-a^2-b^2}{(c-b)^2}} = \frac{2(c-b)}{c^2-a^2-b^2}\int \frac{du}{1+\left[\frac{(c-b)u+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right]^2}$, což už se přímočaře integruje na $\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{(c-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right] + C$. **Ad 3.** Integrál přepíšeme na $\int \frac{dx}{\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}}$. Upotřebíme substituci, dostaneme $2\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{2u}+\frac{1}{1-u^2}} = 4\int \frac{u(1-u^2)}{1+2u-u^2}\mathrm{d}u$. Provedeme dělení a integrál standardním způsobem rozkrouháme, až dostaneme výsledek $2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+8\operatorname{tg}\frac{x}{2}+8\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+6\sqrt{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C$. Mimochodem nejde zdaleka o nejjednodušší postup, lepší je si uvědomit, že $2\sin x\cos x = (\sin x+\cos x)^2-1$ a že platí též $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

104. **Ad 1.** Označme $I_n = \int x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Jednou použijeme per partes, x^n se derivuje a e^x se integruje. Tím zjistíme, že $I_n = x^n\mathrm{e}^x - nI_{n-1}$. To už je rekurence, se kterou můžeme spočítat jakékoli I_n (když ještě uvážíme, že $I_0 = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$). Vzorec pak už snadno dokážeme indukcí: pro $n=0$ platí a pro všechna větší n má platit ta naše rekurence $I_n = x^n\mathrm{e}^x - I_{n-1}$. Když vezmeme $I_n = (-1)^n n!\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$ a ze sumy oddělíme poslední člen (s $k=n$), vskutku dostaneme $I_n = (-1)^n n!\mathrm{e}^x(-1)^n\frac{x^n}{n!}+(-1)^n n!\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$. První člen je jen $\mathrm{e}^x x^n$ a v druhém přepíšeme $(-1)^n n!$ jako $-n(-1)^{n-1}(n-1)!$, čímž je to dokázáno. **Ad 2.** Tady se e^x derivuje a x^n integruje. Zase označme $I_n = \int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x^n}$. Jedno per partes pak vydá rekurenci $I_n = -\frac{\mathrm{e}^x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}I_{n-1}$. Tato rekurence funguje až do $I_1 = \int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x}$, kde se zasekne, protože $1/x$ se neintegruje na vyšší mocninu. Ve skutečnosti v tomto integrálu můžeme pouze položit $u = \mathrm{e}^x$, čímž přejde na $\int\frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$, a to jsme podle zadání označili $\operatorname{li}(u) = \operatorname{li}(\mathrm{e}^x)$. Vzorec dokážeme už snadno, když si všimneme, že při $n=1$ platí a pro vyšší n platí rekurence, kterou ještě přepíšeme na tvar $(n-1)I_n - I_{n-1} = -\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n-1}}$. Dosadíme-li tam ten vzorec, hned vidíme, že je to pravda.

105. **Ad 1.** Nejdřív vysubstituujeme trojku tím, že položíme $u = 3x$. Integrál pak přejde na $\frac{1}{3^4}\int x^3\mathrm{e}^x$, což je podle úlohy 104 rovno $-\frac{1}{81}6\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{81}\mathrm{e}^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. **Ad 2.** Položíme $u=-x^2$, tedy $-\frac{\mathrm{d}u}{2} = x\,\mathrm{d}x$. Náš integrál tím přejde na $\int u^3\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{-x^2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C$. **Ad 3.** Tady položíme $x=u^2$, $\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$, a dostaneme $2\int u^5\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$, což je podle úlohy 104 rovno $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x^{5/2}-5x^2+20x^{3/2}-60x+120\sqrt{x}-120)+C$. **Ad 4.** Položíme $u=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, a integrál přejde na $\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u} = u-\ln(1+u) = \mathrm{e}^x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$. **Ad 5.** Položíme $u^6 = \mathrm{e}^x$, z čehož vyplývá $\mathrm{d}x = \frac{6\,\mathrm{d}u}{u}$. Po dosazení do integrálu dostaneme $6\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)(u^2+1)}$. Rozložíme v parciální zlomky, dostaneme $\frac{1}{u(u+1)(u^2+1)} = \frac{1}{u}-\frac{1/2}{u+1}-\frac{1}{4}\frac{2u}{u^2+1}-\frac{1/2}{1+u^2}$, což se už snadno integruje na $\ln u-\frac{1}{2}\ln(u+1)-\frac{1}{4}\ln\left(u^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u = x-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^x+1)-\frac{1}{4}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x+C$. **Ad 6.** Zapíšeme $\sin x$ jako $\mathfrak{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, takže integrál pak má tvar $\mathfrak{Im}\int x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix} x & \frac{1}{} \\ \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} & \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\end{matrix}\right\| = \mathfrak{Im}\left[x\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+\mathrm{i}}-\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(1+\mathrm{i})^2}\right]$. Jelikož $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, je také hned vidět, že $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$. Proto je výsledek roven $\frac{1}{\sqrt{2}}x\mathrm{e}^x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x+C$. **Ad 7.** Tady nejdřív položíme $u=\mathrm{e}^x$, což integrál převede na $\int\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\frac{\mathrm{d}u}{u}$, a pak položíme $\frac{u-1}{u+1} = y^2$. To znamená, že $\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2} = y\,\mathrm{d}y$, že $u = \frac{1+y^2}{1-y^2}$, a nakonec také $u+1 = \frac{2}{1-y^2}$. Integrál přepíšeme na $\int\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\frac{(u+1)^2}{u}\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}$ a provedeme tu substituci, čímž získáme $\int y\frac{4}{(1-y^2)^2}\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2}y\,\mathrm{d}y = 4\int\frac{y^2\,\mathrm{d}y}{(1-y^2)(1+y^2)}$. Tady máme velké štěstí, protože si hned všimneme, že je $\frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)$, a to už se snadno integruje na $\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|-$ $-2\operatorname{arctg}y+C = \ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}+C$.

106. **Ad 1.** Klaďme $u = x+1$, integrál se přepíše na $\int (u-1)\operatorname{arctg} u\,\mathrm{d}u = \int u\operatorname{arctg} u\,\mathrm{d}u - \int \operatorname{arctg} u\,\mathrm{d}u$. V obou integrálech provedeme per partes, přičemž $\operatorname{arctg} u$ se bude derivovat a ten zbytek integrovat. Nakonec tak dostaneme $\frac{u^2-2u+1}{2}\operatorname{arctg} u - \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$, což po vrácení substituce dá $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C$. **Ad 2.** Jelikož víme, že $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ je inversní funkcí k $\operatorname{sh} x$, bude zřejmě dobře položit $x = \operatorname{sh} u$. Tím integrál přejde na $\int u^2 \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$. Po dvojím per partes dostaneme výsledek $u^2\operatorname{sh} u - 2u\operatorname{ch} u + 2\operatorname{sh} u$, což po odstranění substituce dá $x\ln^2(x+\sqrt{x^2+1}) - 2\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + 2x + C$. **Ad 3.** Použijeme per partes, celý ten výraz se bude derivovat a integrovat se bude jednička. Derivace $\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(x+1)^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} - \frac{2\sqrt{x}}{(1+x)^2}\right)$. Vytkneme ze závorky $1/(1+x)$ a dostaneme $\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-4x}}\,\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, což je celkem ucházející. Po jednom per partes nám tedy zůstane pouze integrál $2\int \frac{x}{1+x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$, který po substituci $\sqrt{x} = u$ rychle vydá výsledek $2u - 2\operatorname{arctg} u$. Celkem i s prvním sčítancem z per partes tedy máme $x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$. **Ad 4.** Po rozepsání logaritmu dostaneme $\int\left(\frac{\ln(x+a)}{x+b} + \frac{\ln(x+b)}{x+a}\right)\mathrm{d}x$. Teď si uvědomíme, že $\frac{1}{x+a} = [\ln(x+a)]'$. To znamená, že integrál lze psát i jako $\int\left(\ln(x+a)[\ln(x+b)]' + \ln(x+b)[\ln(x+a)]'\right)\mathrm{d}x$. Jenže podle pravidla pro derivaci součinu pod znamením integrálu stojí $[\ln(x+a)\ln(x+b)]'$. Integrování a derivování se navzájem zruší a zůstane výsledek $\ln(x+a)\ln(x+b) + C$. **Ad 5.** Zase uděláme per partes, přičemž se celý logaritmus bude derivovat a jednička se bude integrovat. Derivace toho logaritmu je $\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}$, takže musíme integrovat $\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, což je rovno $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2}$. Přičteme k tomu první sčítanec z per partes a máme výsledek $x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2} + C$. **Ad 6.** Opět použijeme per partes: $\int x\arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix}\arccos\frac{1}{x} & \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\\ x & \frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\| = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$.
Ad 7. Rozpitváme integrál na hromadu sčítanců takto: $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int(1+x-1)\ln(1+x)\,\mathrm{d}x + \int(1-x-1)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \int(1+x)\cdot$ $\cdot\ln(1+x)\,\mathrm{d}x + \int(1-x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x - \int\ln(1+x)\,\mathrm{d}x - \int\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$. Podle bodu 5 úlohy 90 je $\int x^\alpha\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + C$ pro jakékoli $\alpha \neq -1$. Takže všechny čtyři tyto integrály už snadno spočteme. Když se prach usadí a všechno pěkně upravíme, obdržíme výsledek $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + x + C$. **Ad 8.** Už jsme dřív použili ten trik, že $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ je inversí funkce $\operatorname{sh} x$, a teď na něj bude čas znova. Položme tedy $x = a\operatorname{sh} u$. Tím integrál přejde na $a^{3/2}\int\sqrt{\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u}\,\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$. Jelikož $\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ a $\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$, je jasné, že $\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u = \mathrm{e}^u$. Celkem tedy máme $\frac{a^{3/2}}{2}\int \mathrm{e}^{u/2}(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})\,\mathrm{d}u$. Nyní položíme $\mathrm{e}^u = y^2$, tj. $\mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{d}y}{y}$, a dostaneme $\frac{a^{3/2}}{2}\int y(y^2+y^{-2})\frac{2\,\mathrm{d}y}{y} = a^{3/2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{y}\right)$. Teď je jen potřeba vrátit tu substituci. Jelikož $\operatorname{sh} u = x/a$, je zřejmě $u = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}\right) = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$, a tedy je také $y = \sqrt{\mathrm{e}^u} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}}$, takže nakonec vidíme, že výsledek je $\frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^{3/2} - \frac{a^2}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}} + C$.

Deváté cvičení (určité integrály)

Výpočty určitých integrálů

Určité integrály

Platí Newtonova-Leibnizova formule: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$, kde F je primitivní funkce f, tedy $F'=f$.

Kromě ní platí tato pravidla:

- Linearita, $\int_a^b (\alpha f+\beta g)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g\,\mathrm{d}x$ pro konstanty α a β.
- Rozdělení integrálu: $\int_a^b f\,\mathrm{d}x+\int_b^c f\,\mathrm{d}x=\int_a^c f\,\mathrm{d}x$ a prohození mezí: $\int_b^a f\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.
- Substituce: jako u neurčitého integrálu, ale není potřeba ji vracet, stačí přetransformovat i meze.
- Per partes: $\int_a^b f g'\,\mathrm{d}x = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'g\,\mathrm{d}x$.

107 Postupy popsanými výše vypočtěte následující integrály:

1. $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **4.** $\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(a>0)$; **5.** $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$; **6.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$;

7. $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$; **9.** $\int_0^{3/4}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; **10.** $\int_0^1\frac{x^{2n}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Nápověda: 7. $x-\frac{1}{x}=u$. **10.** Per partes dá rekurenci.

108 Opakovaným užitím integrace per partes vypočtěte následující integrály (pro n, k přirozené):

1. $\int_0^{\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^1 x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x$.

109 Dokažte, že platí $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}2\pi & \text{při } k=0;\\ 0 & \text{při jiném } k \text{ celočíselném.}\end{cases}$

110 Pomocí faktu z předchozí úlohy a ostatních pravidel vypočtěte následující integrály:

1. $\int_0^{\pi}\cos^{100}x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ (n celé).

111 **Aproximace π.** Všichni asi znáte školáckou aproximaci $\pi\approx\frac{22}{7}$. Víte ale, jak je přesná? Jestli ne, tak to teď zjistíte.

1. Vypočtěte integrál $\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Podívejte se na integrand. Jednoduše ukažte, je integrál kladný. Je tedy $\frac{22}{7}$ větší, nebo menší než π?

3. Jestli chcete odhad chyby aproximace, uvědomte si, že na intervalu $\langle 0;1\rangle$ platí $1\le 1+x^2\le 2$, a proto je $\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x\le\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\le$ $\le\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$. Pro určitější představu můžete $\frac{1}{1+x^2}$ pod integrálem rozvinout v řadu a vzít prvních pár členů.

Výpočty délek, ploch, objemů atd.

112 Vypočtěte plochu parabolické „čepičky“ o výšce h a podstavě a (viz obrázek na přespříští straně).

$\boxed{113}$ Spočtěte plochu následujících obrazců:

1. elipsy o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; **2.** křivky o rovnici $y^2=x^2(a^2-x^2)$; **3.** obrazce omezeného křivkou $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ a přímkou $x=2a$; **4.** hvězdice (asteroidy) o rovnici $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; **5.** trojlístku $r=a\sin 3\varphi$.

$\boxed{114}$ Vypočtěte délku následujících křivek:

1. paraboly $y=h^2-x^2$, $-h\le x\le h$; **2.** asteroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; **3.** řetězovky $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ mezi body $[0;a]$ a $[b;h]$.

$\boxed{115}$ Vypočtěte objem elipsoidu o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

$\boxed{116}$ Vypočtěte objem a povrch (ale pozor, to není lehké!) následujících rotačních těles (viz obrázky na následující straně):

1. paraboloidu, který vznikne rotací paraboly $z=a-\frac{ax^2}{r^2}$ pro $0\le x\le r$ kolem osy z (zde a je jeho výška a r poloměr podstavce); **2.** sudu, který vznikne rotací paraboly $x=R-z^2\frac{R-r}{h^2}$ pro $-h\le z\le h$ kolem osy z (zde $2h$ je výška sudu, r poloměr víka a dna a R poloměr uprostřed); **3.** vázy, která vznikne rotací křivky $x=1-\frac{\sin z}{2}$, $y=0$ při $-\pi\le z\le\frac{2\pi}{3}$ kolem osy z. Povrch nepočítejte.

$\boxed{117}$ **Simpsonův vzorec.** Ukažte, že pokud jsou plochy průřezů kolmých k ose x kvadratickou funkcí x (tedy $S(x)=Ax^2+Bx+C$), pak pro objem tělesa platí vztah $V=\frac{h}{6}(S_0+4S_{1/2}+S_1)$, kde h je délka tělesa podél osy x, S_0 a S_1 jsou plochy průřezů na krajích tělesa a $S_{1/2}$ je plocha průřezu v polovině délky. Viz obrázek na následující straně.

$\boxed{118}$ **Vodní hodiny.** Chcete si udělat vodní hodiny, tedy nějakou nádobu, která má ve dně díru o ploše S. Když tam nalejete vodu, tak ta voda za nějaký čas vyteče, a tak můžete měřit čas ve stylu: „cvičení z analysy mi trvá vypracovat tak dlouho, že hodiny třikrát musím naplnit a nechat vytéct“. Lepší by ale bylo, kdyby hladina vody v nádobě s časem klesala rovnoměrně, tedy aby rychlost klesání hladiny byla konstantní. Pak za čas t klesne hladina vždy o nějaké αt a můžeme čas měřit pravítkem.
1. Jaký rotačně symetrický tvar má mít nádoba, aby hladina vody klesala konstantní rychlostí?
2. Do jaké výšky musíte nalít vodu, abyste odměřili čas t (tj. aby za právě tento čas vytekla všechna voda)?
3. Spočtěte objem, který vaše nádoba musí mít, aby, je-li nalita až po okraj, odměřila čas t.

Nápověda: Je-li ve dně díra a voda sahá do výšky h, bude ze dna voda téct rychlostí $v=\sqrt{2gh}$ (Torricelliho vzorec).

Další integrační kejkle

$\boxed{119}$ Které z následujících integrálů můžete na první pohled prohlásit za nulové? Co Vás k tomu opravňuje?

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\sin x\,dx$; **2.** $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^5\cos^3 x\,dx}{(1+x^2)^2}$; **3.** $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$, **4.** $\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx$; **5.** $\int_0^{2\pi}\sin^3 x+\cos^3 x\,dx$.

$\boxed{120}$ Ukažte, že $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx=0$. Pomocí tohoto výsledku pak vyčíslete též $\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$. **Nápověda:** $\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$.

$\boxed{121}$ Hodně integrálů lze elegantně vyřešit tím, že převrátíte směr integrace. Tedy pokud jde integrál třeba od nuly do π, tak uděláte substituci $u=\pi-x$ atd. Vyzkoušejte si to na těchto integrálech:

1. $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$; **2.** $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$; **3.** $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x+\cos x}$; **4.** $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$; **5.** $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$.

Nápověda: Ad 4. Nejdřív udělejte záměnu proměnných $x=\operatorname{tg} u$.

$\boxed{\boxed{122}}$ **Harmonická čísla.** Součtům $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ se říká *harmonická čísla*. Platí pro ně jeden velmi užitečný odhad, který si s pomocí integrálů celkem snadno odvodíme:

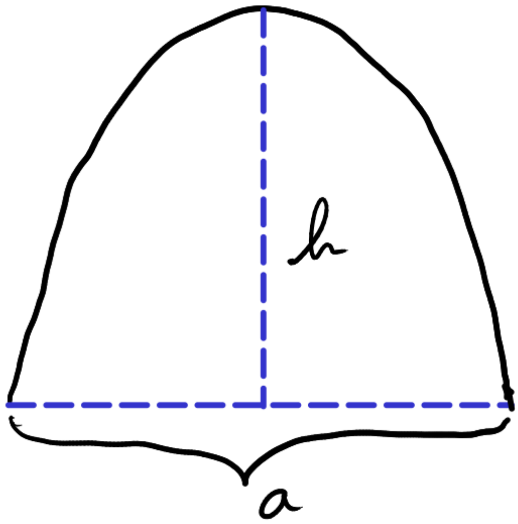
1. Uvědomte si, že platí $H_n=\int_0^1(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\,dx=\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}\,dx$.

2. Proveďte v tomto integrálu nejdřív záměnu $u=1-x$ a pak $u=y/n$. Pak integrál rozdělte ve stylu $\int_0^n(\text{něco})=\int_0^1(\text{něco})+\int_1^n(\text{něco})$.

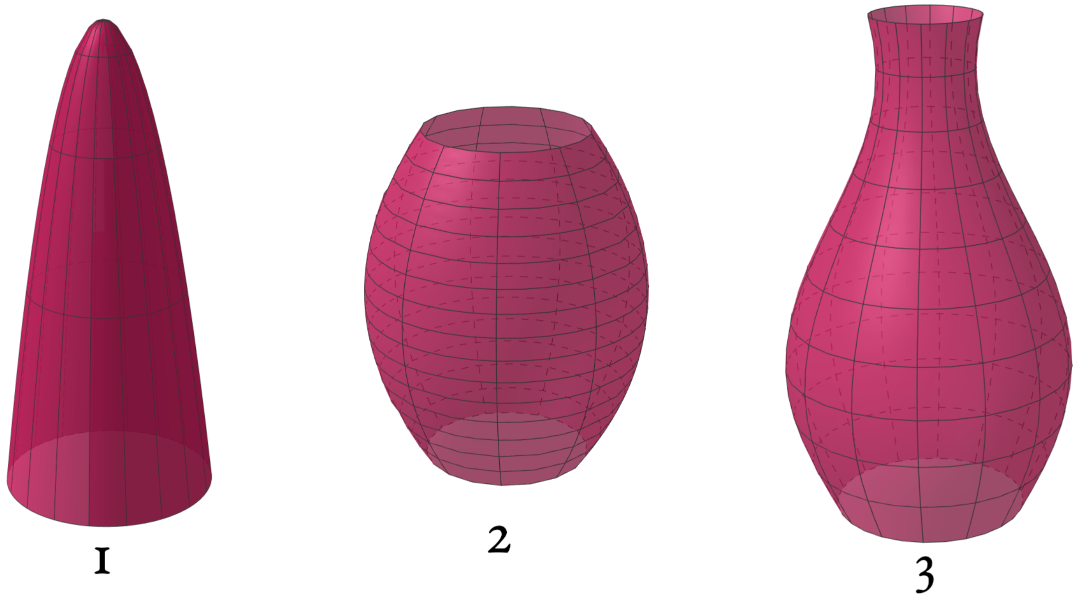
3. Integrál od 1 do n rozdělte na dva sčítance. Měli byste dostat, že $H_n=(\text{dva divné integrály})+\ln n$.
4. Chceme-li znát H_n pro nějaké veliké n, pak ty dva divné integrály budou asi dost blízké své limitě pro $n\to\infty$. Spočtete ji a přesvědčte se, že oba divné integrály jsou konečné. Tím jste ukázali, že $H_n\approx\ln n+(\text{dva divné integrály})$. Označme ty divné integrály písmenem γ. To je takzvaná *Eulerova-Mascheroniho konstanta* a její číselná hodnota je asi 0,577 216. . .

Obrazová příloha

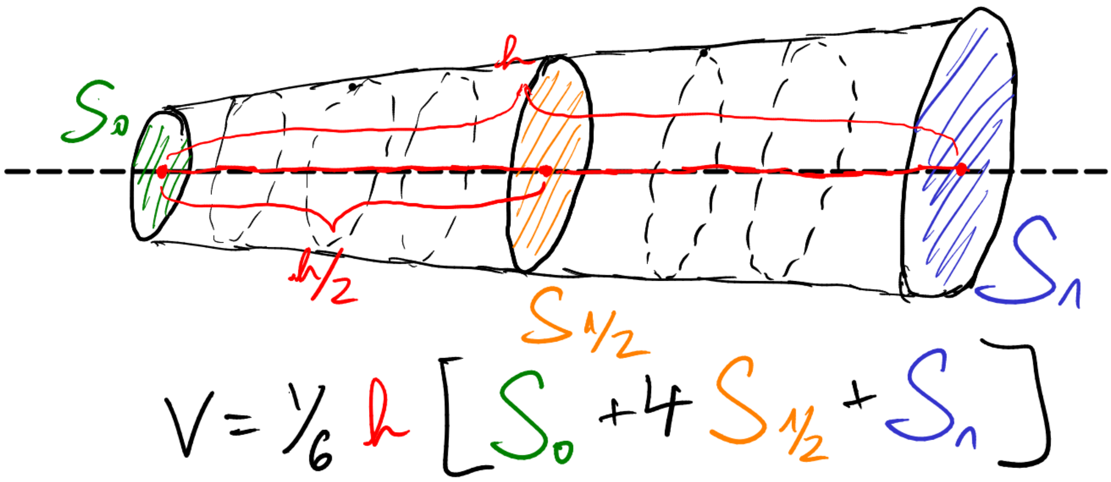
Parabolická čepička z úlohy 112:



Obrázky těles z úlohy 116:



Nedomrlá kresba k Simpsonově vzorci (úloha 117):



Odpovědi a řešení

107. **Ad 1.** Použijeme per partes: $\int\limits_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} x & 1 \\ \mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{matrix} \right\| = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{2} - [\mathrm{e}^{-x}]_0^{\ln 2} = \frac{1-\ln 2}{2}$. **Ad 2.** Zase per partes: $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} x & 1 \\ \sin x & -\cos x \end{matrix} \right\| = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \pi$, neboť poslední integrál je roven nule. **Ad 3.** To je prostě arkustangenta: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{\infty} = \pi$. **Ad 4.** $1/x^2$ se integruje na $-1/x$, takže máme výsledek $-\left[\frac{1}{x}\right]_a^{\infty} = \frac{1}{a}$. **Ad 5.** Položíme $x = \cos 2u$, $\mathrm{d}x = -2\sin 2u\,\mathrm{d}u$. Integrál tím přejde na $-2\int\limits_{\pi/2}^{0} \sqrt{1+\cos 2u}\,1-\cos 2u\,\sin 2u\,\mathrm{d}u$, což je rovno $2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{\sin u} 2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u = 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = 2\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u = \pi + [\sin 2u]_0^{\pi/2} = \pi$. **Ad 6.** Tady položíme $x = a\sin u$, $\mathrm{d}x = a\cos u\,\mathrm{d}u$. Integrál tím přejde na $\int\limits_0^{\pi/2} a^2\sin^2 u a^2\cos^2 u\,\mathrm{d}u$. Teď upravíme $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1-\cos 4x}{8}$, takže po dosazení do integrálu dostaneme $\frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\pi/2} 1-\cos 4u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{a^4}{32}[\sin 4u]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}$. **Ad 7.** Díky sudosti můžeme integrál psát jako $2\int\limits_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, což upravíme na $2\int\limits_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$. V čitateli máme $1+\frac{1}{x^2}$, což je derivací $x-\frac{1}{x}$. Proto přepíšeme jmenovatel jako $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$ a po substituci $u = x-\frac{1}{x}$ máme $2\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}$, což po standardních úpravách přejde na $2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **Ad 8.** Podle bodu 1 úlohy 95 je $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Takže do toho stačí dosadit $x = 2$ a $x = 0$ a získaná čísla od sebe odečíst. Dostane se výsledek $\frac{\ln 3}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **Ad 9.** Položme nejdřív $u = 1+x$, dostaneme $\int\limits_1^{7/4} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-2u+2}}$. Teď uděláme standardní trik s vytknutím z odmocniny a s přechodem k $v = 1/u$; to dá nakonec $\int\limits_{4/7}^{1} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{2v^2-2v+1}}$. Zapíšeme $2v^2-2v+1$ jako $\frac{1}{2}[1+(2v-1)^2]$ a položíme $y = 2v-1$, což integrál nakonec převede na $\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{1/7}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\frac{1}{7}+\sqrt{1+\frac{1}{49}}}$, což lze po nějakých úpravách rovněž přepsat na $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **Ad 10.** Tady použijeme per partes. Označme si ten náš integrál I_n. Pak zapíšeme $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left\| \begin{matrix} x^{2n-1} & (2n-1)x^{2n-2} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & -\sqrt{1-x^2} \end{matrix} \right\| = -[x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}]_0^1 + (2n-1)\int\limits_0^1 x^{2n-2}\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Hranatá závorka je nulová a v druhém integrálu hodíme odmocninu do jmenovatele takto: $I_n = (2n-1)\int\limits_0^1 \frac{x^{2n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n$. Po převedení I_n na jednu stranu dostaneme rekurenci $I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$. Nakonec si uvědomíme, že $I_0 = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ a máme výsledek: $I_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2}$. Když rozšíříme ještě jednou součinem $2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$ a uvědomíme si, že tento součin je roven $2^n n!$, můžeme nakonec napsat $I_n = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

108. **Ad 1.** Označme $I_n = \int\limits_0^{\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ a proveďme per partes. x^n budeme derivovat na nx^{n-1}, e^{-x} se integruje na $-\mathrm{e}^{-x}$. Celkem tedy dostaneme $I_n = -[x^n\mathrm{e}^{-x}]_0^{\infty} + n\int\limits_0^{\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}$. Hranatá závorka je nulová, takže máme $I_n = nI_{n-1}$ a konečně také $I_0 = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, takže celkem dostáváme $I_n = n!$. Podotkněme, že tento integrál konverguje pro jakoukoli *komplexní* hodnotu n, jen když je $\mathfrak{Re}\, n > -1$. Tomuto integrálu se pak říká $\Gamma(n+1)$. **Ad 2.** Označme $I_{n,k} = \int\limits_0^\infty x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x$. Pomocí opakovaného per partes budeme postupně chtít odstranit jeden ten činitel, třeba $(1-x)^k$. To tedy budeme derivovat a x^n budeme integrovat, takže dostaneme $I_{n,k} = \left\Vert \begin{matrix} (1-x)^k & -k(1-x)^{k-1} \\ x^n & \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{matrix} \right\Vert =$ $= -\dfrac{1}{n+1}\Big[(1-x)^k x^{n+1}\Big]_0^1 + \dfrac{k}{n+1} I_{n+1,k-1}$. Hranatá závorka je nulová, neboť předpokládáme $n \geq 1$, $k \geq 1$. Takže za tohoto předpokladu máme rekurenci $I_{n,k} = \dfrac{k}{n+1} I_{n+1,k-1}$. Tu můžeme používat stále dokola až do okamžiku, kdy se k sníží na nulu. V tom okamžiku budeme mít $I_{n,k} = \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} I_{n+k,0}$. Zbývající integrál už snadno vypočteme, protože je $I_{n+k,0} = \int\limits_0^1 x^{n+k}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+k+1}$, takže celkem máme $I_{n,k} = \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)} = \dfrac{k!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)}$. Když to rozšíříme ještě $n!$, doplní se tím jmenovatel na $(n+k+1)!$ a máme tedy celkem $I_{n,k} = \dfrac{n!k!}{(n+k+1)!}$.

109. V případě $k = 0$ je to lehké, protože $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = 1$ a integruje se jen jednička, takže se naintegruje skutečně 2π. V ostatních případech máme $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \dfrac{1}{\mathrm{i}k}\Big[\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k} - \mathrm{e}^0\Big] = \dfrac{1}{\mathrm{i}k}[1-1] = 0$.

110. **Ad 1.** Zapíšeme $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$. To znamená, že $\cos^{100} x = \dfrac{1}{2^{100}} \mathrm{e}^{100\mathrm{i}x}(1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^{100}$. Integrand se tedy rozpadne na obrovský součet, ve kterém bude člen s $\mathrm{e}^{100\mathrm{i}x}$, pak člen s $\mathrm{e}^{98\mathrm{i}x}$, atd., zkrátka členy se sudými mocninami až do -100. Jenže už $\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$ je nula (stačí udělat záměnu $u = 2x$ a použít úlohu 109), takže všechny tyto členy vypadnou. Jediné, co zůstane, je konstanta, tedy člen s $\mathrm{e}^{0\mathrm{i}x}$, protože ten se zintegruje na π. Proto stačí ze součtu vybrat člen, kde není žádné $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, násobit ho π, a to je výsledek. Po užití binomické věty vyjde najevo, že to je $\dfrac{\pi}{2^{100}}\dbinom{100}{50}$.

Ad 2. Po rozepsání obou sinů podle Eulerových vzorců dostaneme $\dfrac{1}{2^{n+1}\mathrm{i}^{n+1}} \int\limits_0^\pi \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^n (\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2^{n+1}\mathrm{i}^{n+1}} \int\limits_0^\pi (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}-1)\cdot$ $\cdot(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^n\,\mathrm{d}x$. Teď můžeme klást $2x = u$, což převede integrál na $\dfrac{1}{2^{n+2}\mathrm{i}^{n+1}} \int\limits_0^{2\pi} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}nu}-1)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})^n\,\mathrm{d}x$. Teď už je jasné, že přežijí jen členy, v nichž není žádné $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Výraz $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nu}-1)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})^n$ rozepíšeme na dva kusy, dostaneme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nu}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})^n - (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})^n$. Takže v prvním sčítanci celá mocnina vypadne, zůstane jen jeden krajní člen, a stejně tak i ve druhém. Celkem dostaneme $\dfrac{2\pi}{2^{n+2}\mathrm{i}^{n+1}}((-1)^n - 1)$. Je-li n sudé, je $(-1)^n = 1$ a výsledek je nulový; při n lichém je $(-1)^n - 1$ rovno -2, takže výsledek je: $\int\limits_0^\pi \sin^n x \sin nx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{\pi}{2^n} & \text{při } n \text{ lichém;} \\ 0 & \text{při } n \text{ sudém.} \end{cases}$

Ad 3. Zcela obdobnou metodou jako v předchozím bodě dostaneme výsledek $\dfrac{\pi}{2^n}$.

Ad 4. Opět rozepíšeme siny podle Eulerova vzorce, čímž dostaneme $\int\limits_0^\pi \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x$. Vytkneme z čitatele i ze jmenovatele kladnou exponenciálu a tím se integrál upraví na $\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx}}{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x$. Použijeme ještě vztah pro součet geometrické posloupnosti a nakonec máme $\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x}\left(1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \cdots + \mathrm{e}^{-(2n-2)\mathrm{i}x}\right)\mathrm{d}x$. Teď mohou nastat dvě možnosti: buď je n liché, tj. $n-1$ je sudé a stejně jako v předchozích úlohách přežijí jen členy bez $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Takový je ovšem právě jeden (činitel před závorkou se vždycky strefí do prostředního člene v rozvoji geometrické posloupnosti), a tak všechno vypadne a zůstane jen jednička, která se integruje na π. Na druhou stranu, je-li n sudé, můžeme závorky roznásobit. Tím dostaneme pod integrálem součet $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-3)x} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \cdots + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-3)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}$. Jedna taková exponenciála $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ se integruje na $-2/\mathrm{i}k$, takže po podrobnějším zkouknutí exponenciál zjistíme, že se tyto zlomky sežerou navzájem a vyjde nula. Výsledek je tedy $\int\limits_0^\pi \dfrac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{při } n \text{ lichém,} \\ 0 & \text{při } n \text{ sudém.} \end{cases}$

111. **Ad 1.** Rozepíšeme čitatel na $x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4$ a vydělíme to x^2+1 jako na základní škole, čímž obdržíme výsledek $\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\dfrac{4}{x^2+1}$. To se integruje na $\dfrac{1}{7}-\dfrac{4}{6}+1-\dfrac{4}{3}+4-4\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{22}{7}-\pi$. **Ad 2.** Evidentně platí $\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \geq 0$ (protože x^2, a tedy i x^4, je vždy nezáporné). Proto je integrál kladný a musí tudíž být $\dfrac{22}{7}-\pi > 0$, tj. $\dfrac{22}{7}$ je *větší* než π. **Ad 3.** Integrál $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$ snadno vypočteme a zjistíme, že je roven $\dfrac{1}{9}-\dfrac{4}{8}+\dfrac{6}{7}-\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{630}$. Proto podle nerovnosti v zadání platí $\dfrac{1}{1260} \leq \dfrac{22}{7}-\pi \leq \dfrac{1}{630}$, nebo, jinými slovy, π je někde mezi $\dfrac{22}{7}-\dfrac{1}{630}=$ a $\dfrac{22}{7}-\dfrac{1}{1260}$. Nebo můžeme rozvinout zlomek v řadu: $\dfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$ (při $|x|<1$, což je zde splněno) a integrovat jednotlivé členy rozvoje, čímž získáme $\dfrac{22}{7}-\pi = \dfrac{1}{630}+\dfrac{1}{2310}+\dfrac{1}{6435}+\cdots$.

112. Nejdřív musíme vymyslet, jakým funkčním předpisem je zadána parabola, jejíž plochu máme počítat. Chceme, aby mezi jejími kořeny byla vzdálenost a a aby byla otočená vrcholem vzhůru. Tomu vyhoví funkce tvaru $\alpha x(a-x)$ (při $\alpha>0$). Vrchol je v bodě $x=a/2$, kde má funkce hodnotu $\alpha\dfrac{a^2}{4}$. My chceme, aby ta hodnota byla h, takže musíme položit $\alpha = \dfrac{4h}{a^2}$. Chceme tedy zjistit plochu, která je mezi grafem funkce $\dfrac{4h}{a^2}x(a-x)$ a osou x, a ta je dána integrálem $\dfrac{4h}{a^2}\displaystyle\int_0^a x(a-x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4h}{a^2}\left(\dfrac{a^3}{2}-\dfrac{a^3}{3}\right) = \dfrac{4ah}{6} = \dfrac{2}{3}ah$.

113. **Ad 1.** Spočteme jen plochu čtvrtelipsy. Z rovnice vyjádříme $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Plocha pod touto křivkou od $x=0$ až do $x=a$ je právě ta čtvrtina plochy, takže máme $S = 4\displaystyle\int_0^a \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x=a\sin u$, $\mathrm{d}x = a\cos u\,\mathrm{d}u$ a dostaneme $S = 4ab\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = 2ab\displaystyle\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u = \pi ab$. **Ad 2.** Tady máme $y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$, takže ta půlka útvaru, která je nad vodorovnou osou, je stejná jako ta, co je pod ní (protože je omezují stejné křivky, jen s opačným znamením). Osu x to protíná v bodech $\pm a$ a 0. Lze tedy předpokládat, že půjde o jakousi osmičku (y' je v bodech $\pm a$ nekonečná, tj. tam křivka jde kolmo k ose x, a v nule je rovna $\pm a$, tj. jde nějak šikmo a nulou prochází křivka dvakrát). Také je vidět, že levé ucho osmičky omezuje stejnou plochu jako pravé, takže stačí udělat jen čtvrtinu. Celkem máme $S = 4\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $a^2-x^2=u^2$, tj. $x\,\mathrm{d}x = -u\,\mathrm{d}u$, a dostaneme $4\displaystyle\int_0^a u^2\,\mathrm{d}u = \dfrac{4a^2}{3}$. **Ad 3.** Nejdřív si uvědomíme, že když má být $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$, tak musí být $\dfrac{x^3}{2a-x}$ nezáporné. To ale nastane jen při $0 \leq x < 2a$. Křivka $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ má také dvě větve symetrické podle osy x, takže stačí počítat jenom plochu horní půlky obrazce. Celková plocha je tedy $S = 2\displaystyle\int_0^{2a}\dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}\,\mathrm{d}x$. Povšimněme si, že to je binomický integrál s $m=3/2$, $n=1$ a $p=-1/2$. Vidíme, že $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{5}{2}$ není celé, ale když k tomu přičteme ještě p, dostaneme celé číslo. Musíme tedy nejdřív vytknout ze závorky s rozdílem, čímž dostaneme $2\displaystyle\int_0^{2a} x(2ax^{-1}-1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$, a teď položíme $u^2 = 2ax^{-1}-1$, tj. $2u\,\mathrm{d}u = -2ax^{-2}\,\mathrm{d}x$. Integrál touto substitucí nakonec přejde na $16a^2\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3}$. Tento poslední integrál spočítáme tak, že vezmeme integrál $\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+a} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}$ a dvakrát ho derivujeme, načež položíme $a=1$. Tím ovšem dostaneme *dvojnásobek* původního integrálu, protože se při derivování vyhodí $(-1)\cdot(-2)=2$. Takže platí $\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}\right]_{a=1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2} = \dfrac{3\pi}{16}$. Celková plocha je $16a^2$-násobek tohoto čísla, tedy $3\pi a^2$. **Ad 4.** To je opět křivka, která je symetrická podle vodorovné i svislé osy. Stačí tedy opět počítat čtvrtinu, takže po vyjádření y z rovnice dostaneme pro plochu výraz $S = 4\displaystyle\int_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x = a\sin^3 u$, takže $\mathrm{d}x = 3a\sin^2 u\cos u\,\mathrm{d}u$ a po dosazení obdržíme $12a^2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^4 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Tato funkce je sudá, takže si můžeme půjčit dvojku a přepsat integrál jako $6a^2\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Teď dosadíme $\sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ a $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$, takže dostaneme $-\dfrac{6a^2}{2^6} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x$. Zde přežijí (podobně jako v úloze 110) jen ty sčítance, které neobsahují vůbec žádné $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Když v malé závorce vybereme $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$, z dlouhé se vybere $4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$; když v malé vybereme $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$, ve velké se vybere $4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$, a když v malé vybereme -2, z velké se vybere 6. Celkem tedy dostáváme výsledek $-\dfrac{6a^2}{2^6}(4+4-12)\cdot\pi = \dfrac{3\pi}{8}a^2$. **Ad 5.** Počítáme podle formulky $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \dfrac{1-\cos 6\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

114. Budeme vždy postupovat podle vzorce $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$. **Ad 1.** Tady je $y' = -2x$, takže délka je $L = \displaystyle\int_{-h}^{h} \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$. Díky sudosti můžeme psát též $L = 2\displaystyle\int_0^h \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} u$, a tedy $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$, čímž dostaneme $L = \displaystyle\int_0^{\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)} \operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u =$ $= \dfrac{1}{2}\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right) + \left[\dfrac{\operatorname{sh} 2u}{4}\right]_0^{\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)}$. Jelikož $\operatorname{sh} x$ je inversní vůči $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, uděláme dobře, když napíšeme $\operatorname{sh} 2u =$ $= 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2\operatorname{sh} u\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}$, což znamená, že konečně dostaneme $\dfrac{1}{2}\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right) + h\sqrt{4h^2+1}$. **Ad 2.** Tady je $y = \pm(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ a $y' = \mp x^{-1/3}\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$. Zase budeme počítat jen čtvrtinu délky, takže máme $L = 4\displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + x^{-2/3}(a^{2/3} - x^{2/3})}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^a a^{1/3}x^{-1/3}\,\mathrm{d}x =$ $= 4a\cdot\dfrac{3}{2} = 6a$. **Ad 3.** Tady je $y' = \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$, takže délka je $L = \displaystyle\int_0^b \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x$. Položíme $\dfrac{x}{a} = u$, takže máme $L = a\displaystyle\int_0^{b/a} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\,\mathrm{d}u =$ $= a\displaystyle\int_0^{b/a} \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = a\operatorname{sh}\frac{b}{a}$.

115. Rozkrájíme elipsoid na plátky podél osy x. Řízněme ho rovinou $x = x_0$ a zjistěme, jaký tvar řez bude mít. To uděláme snadno tak, že dosadíme do rovnice elipsoidu, která přejde na $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x_0^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - x_0^2}{a^2}$. Když teď vydělíme tím zlomkem na pravé straně, dostaneme rovnici $\left(\dfrac{y}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)^2 = 1$, což je zase rovnice elipsy, a o té podle bodu 1 úlohy 113 víme, že má plochu π krát součin obou poloos. Poloosy jsou jmenovatele těch obrovských zlomků, takže plocha řezu je $\pi\dfrac{b}{a}\dfrac{c}{a}(a^2 - x_0^2)$. No a teď nám stačí řezat všemi rovinami od $x_0 = -a$ až po $x_0 = a$ a sčítat tyto plochy krát $\mathrm{d}x$. Celkem tedy pro objem dostaneme $V = \dfrac{\pi bc}{a^2}\displaystyle\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$. Díky sudosti přepíšeme na $\dfrac{2\pi bc}{a^2}\displaystyle\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2\pi bc}{a^2}\left(a^3 - \dfrac{a^3}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

116. Ve všech třech příkladech upotřebíme vztahy $V = \pi\displaystyle\int_a^b x^2\,\mathrm{d}z$ a $S = 2\pi\displaystyle\int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}\,\mathrm{d}z$. **Ad 1.** Vyjádříme x, dostaneme $x = r\sqrt{\dfrac{a-z}{a}}$. Derivace je $x' = \dfrac{-r}{2\sqrt{a}\sqrt{a-z}}$. Objem spočítáme jako $V = \pi r\displaystyle\int_0^a \left(1 - \frac{z}{a}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi r^2$. Povrch je $S = 2\pi\dfrac{r}{\sqrt{a}}\displaystyle\int_0^a \sqrt{a + \frac{r^2}{4a} - z}\,\mathrm{d}z$. Pod odmocninou je lineární funkce, takže můžeme hned integrovat a dostaneme $2\pi\dfrac{r}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2}{3}\left[\left(a + \dfrac{r^2}{4a}\right)^{3/2} - \dfrac{r^3}{8a^{3/2}}\right]$, což snadno upravíme na $\dfrac{\pi r}{6a^2}[(4a^2 + r^2)^{3/2} - r^3]$. **Ad 2.** Tady máme $x = R - \dfrac{R-r}{h^2}z^2$, což má derivaci $x' = -2z\dfrac{R-r}{h^2}$. Objem je $V = \pi\displaystyle\int_{-h}^{h} x^2\,\mathrm{d}z$, díky symetrii můžeme integrovat jen půl sudu, takže dostaneme $V = 2\pi\displaystyle\int_0^h \left[R^2 - 2Rz^2\frac{R-r}{h^2} + z^4\frac{(R-r)^2}{h^4}\right]\mathrm{d}z$. Mocniny se integrují snadno a po několika úpravách dostaneme výsledek $V = 2\pi h\dfrac{8R^2 + 4Rr + 3r^2}{15}$. S povrchem je to ale mnohem horší. Zase integrujeme jen přes půl sudu, dostaneme $S = 4\pi\displaystyle\int_0^h \left(R - z^2\frac{R-r}{h^2}\right)\sqrt{1 + 4z^2\frac{(R-r)^2}{h^4}}\,\mathrm{d}z$. Abychom nějak znormalisovali tu odmocninu, položíme $\frac{2(R-r)}{h^2}z = u$. Tím je integrál převeden na $\frac{2\pi h^2}{R-r}\int\limits_0^{2(R-r)/h}\left(R-\frac{h^2}{4(R-r)}u^2\right)\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, což se rozpadne na dva typy integrálů: $\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ a $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Oba se vyřeší tím, že se v nich položí $x=\operatorname{sh}u$: ten první přejde na $\int\operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u\int\frac{1+\operatorname{ch}2u}{2}\,\mathrm{d}u$ a vyjde $\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)]+C$, ten druhý přejde na $\int\operatorname{sh}^2 u\operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u = \int\frac{\operatorname{ch}4u-1}{8}\,\mathrm{d}u$ a vyjde $\frac{1}{8}[x(1+x^2)^{3/2}+x^3\sqrt{1+x^2}-$ $-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)]+C$. Když tyto výsledky upotřebíme a hodně dlouho budeme upravovat, dostaneme nakonec příšerný vztah $S=$ $=\frac{2\pi h^2}{R-r}\left[\left(\frac{R}{2}+\frac{h^2}{32(R-r)}\right)\ln\frac{2(R-r)+\sqrt{4(R-r)^2+h^2}}{h}+\frac{1}{h^2}\sqrt{4(R-r)^2+h^2}\left(\frac{(R-r)^2}{2}+R(R-r)-\frac{1}{16h^2}\right)\right]$ (za správnost neručím!) **Ad 3.** Objem je $V=\pi\int\limits_{-\pi}^{2\pi/3}\left(1-\sin z+\frac{\sin^2 z}{4}\right)\mathrm{d}z$. Přepíšeme $\sin^2 z$ na $\frac{1-\cos 2z}{2}$ a už se to snadno integruje na $\pi\left(\frac{15}{8}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{32}\right)$.

117. Objem je prostě roven $\int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$, kde a a b označují začátek a konec tělesa. Je tedy $h=b-a$. Integrál spočteme a dostaneme $V=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)$. Z toho všeho lze vytknout $b-a=h$ a také šestku. Vytkněme to tedy a dostaneme $V=\frac{b-a}{6}\left[2A(a^2+ab+b^2)+3B(a+b)+6C\right]$. Z druhé strany si zapišme $S_0=Aa^2+Ba+C$, $S_1=Ab^2+Bb+C$ a $S_{1/2}=\frac{A}{4}(a^2+2ab+b^2)+$ $+\frac{B}{2}(a+b)+C$ a pokusme se výraz $2A(a^2+ab+b^2)+3B(a+b)+6C$ vyrobit jako lineární kombinaci $\alpha S_0+\beta S_1+\gamma S_{1/2}$. Teď se ptejme: kolik C bude v tomto součtu? Je jasné, že $\alpha+\beta+\gamma=6$. Kolik tam bude Aab? To může pocházet jedině z $S_{1/2}$, kde je tento člen 1/2-krát, takže musíme vzít $\gamma=4$. Nakonec Ba i Bb má být stejně, takže $\alpha=\beta$. Z toho už dostáváme $\alpha=\beta=1$, $\gamma=4$, což jsme potřebovali.

118. **Ad 1.** Voda odtéká v každém okamžiku rychlostí $v=\sqrt{2gh}$, takže za čas $\mathrm{d}t$ se objem vody v nádobě sníží o $Sv\,\mathrm{d}t$, kde S je plocha díry ve dně. Proto je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-S\sqrt{2gh}$. Řekněme, že nádobu vytvoříme rotací křivky $x=x(z)$ kolem osy z. To pak znamená, že když zvýšíme výšku hladiny o $\mathrm{d}h$, zvýší se objem o $\pi x(h)^2\mathrm{d}h$. Proto můžeme také psát $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{\pi x(h)^2}$. Nakonec víme, že rychlost snižování hladiny $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ má být konstantní. Označme si ji třeba $-w$ (voda klesá, proto je derivace záporná). Z řetězového pravidla máme $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-w=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{S\sqrt{2gh}}{\pi x(h)^2}$. Z toho už stačí vyjádřit naši funkci $x(h)$, takže hnedle dostaneme předpis $x=\sqrt{\frac{\sqrt{2g}S}{\pi w}\sqrt{h}}$, takže nádoba má mít tvar $x=A\sqrt[4]{h}$, kde $A=\sqrt{\frac{\sqrt{2g}S}{\pi w}}=\text{const.}$ **Ad 2.** Hladina klesá rovnoměrně rychlostí $-w$, takže když nalijeme vodu do výšky H, po čase t bude voda sahat jen do výšky $H-wt$. Chceme-li tedy odměřit čas t, musíme nalít vodu do výšky wt. w lze vyjádřit z konstanty A (ta je daná tím, jak je nádoba udělaná) jako $w=\frac{\sqrt{2g}S}{\pi A^2}$. **Ad 3.** Chceme-li, aby nádoba nalitá po okraj odměřila čas t, musí být vysoká wt. Chceme-li znát objem, musíme spočítat integrál $V=\pi\int\limits_0^{wt}x(z)^2\,\mathrm{d}z=\pi\int\limits_0^{wt}A^2\sqrt{z}\,\mathrm{d}z=\pi A^2\cdot\frac{2}{3}(wt)^{3/2}$. Teď sem musíme dosadit za w jako v minulém bodě, což nakonec dá fantastický výsledek $V=\frac{2^{7/4}g^{3/4}S^{3/2}t^{3/2}}{\sqrt{\pi}A}$.

119. **Ad 1. Tento ne.** Integrand je sudý a vesměs kladný, takže to nula jistě není. **Ad 2. Tento ano.** Integrand je lichý a integruje se na intervalu, který je symetrický vůči počátku. **Ad 3. Tento ano.** Integrand je lichý a integruje se na symetrickém intervalu. **Ad 4. Tento ne.** Integrand je vesměs kladný, takže se nemůže naintegrovat nula. **Ad 5. Tento ano.** Integruje se přes celou periodu. Když rozepíšeme $\sin^3$ a $\cos^3$ podle Eulerova vzorce, vidíme, že se integrál rozpadne na součet $\mathrm{e}^{\pm 3\mathrm{i}x}$ a $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}x}$. To se obojí ovšem integruje na nulu.

120. Zařídíme se podle nápovědy a zapíšeme $\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. V prvním integrálu položíme $x=1/y$, čímž integrál přejde na $-\int\limits_1^\infty\frac{\ln y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$. To je přesně totéž jako ten druhý sčítanec, jenom s mínusem. Oba se tedy zruší a integrál je roven nule. Pokud jde o $\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, v něm vytkneme a^2, takže dostaneme $\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{\mathrm{d}x}{a}$. Položme $u=x/a$. Meze se tím nezmění, takže dostaneme $\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty\frac{\ln ua}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. Teď rozepíšeme $\ln ua=\ln u+\ln a$ a integrál se rozpadne na součet $\int\limits_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, což už víme, že je nula, a

$\frac{\ln a}{a}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

121. **Ad 1.** Když položíme $u = \frac{\pi}{2} - x$, tak se stane toto: meze se prohodí, ale kvůli mínusu z diferenciálu se prohodí zase zpátky. Celkem se tedy nezmění. Za druhé, ze sinu se stane kosinus a opačně. Takže když si náš integrál označíme jako I, dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$. Když tyto dva výrazy sečteme, dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, a proto je $I = \frac{\pi}{4}$. **Ad 2.** Když položíme $u = \pi - x$, sinus se nezmění a kosinus změní znamení. Celkem tedy dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$. Opět oba výrazy sečteme a dostaneme prostě $2I = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$, v čemž můžeme provést snadno substituci $\cos x = u$ a dostaneme $2I = \pi\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2}$. Výsledek je tedy $I = \frac{\pi^2}{4}$. **Ad 3.** Tohle je opět stejná pohádka: zjistíme, že je $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$. Sečteme obojí a dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$. Uděláme substituci $u = x - \pi/4$, pak použijeme sudost integrandu a dostaneme $\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$. Rozšíříme $\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,u}}$ a položíme $\mathrm{tg}\,u = y$, čímž integrál přejde na $\sqrt{2}\int\limits_0^{1} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Výsledek je tedy $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **Ad 4.** Zařídíme se podle nápovědy a položíme $x = \mathrm{tg}\,u$, čímž integrál přejde v $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}\,u)\,\mathrm{d}x$. Nyní položíme $u = \frac{\pi}{4} - v$ a tím se dozvíme, že rovněž platí $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln\left(1+\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-v)\right)\mathrm{d}v$. Dosadíme $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-v\right) = \frac{1-\mathrm{tg}\,v}{1+\mathrm{tg}\,v}$ a dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\mathrm{tg}\,v}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi\ln 2}{4} - I$, z čehož už hbitě spočteme $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$. **Ad 5.** Stejně jako v předchozích bodech zjistíme, že je $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$. Když tyto integrály sečteme, dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} (\ln\sin 2x - \ln 2)\,\mathrm{d}x = = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi\ln 2}{2}$. Ovšem sinus je vlevo od $\pi/2$ stejný jako vpravo. Proto je $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x = 2I$ a celkem máme $2I = I - \frac{\pi \ln 2}{2}$, z čehož už vidíme výsledek $I = \frac{\pi\ln 2}{2}$.

122. **Ad 1.** Tady stačilo použít vztah pro součet geometrické posloupnosti. **Ad 2.** Po provedení obou řečených záměn dostaneme $\int\limits_0^{n} \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y$. To rozepíšeme na $H_n = \int\limits_0^{1} \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y + \int\limits_1^{n} \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y$. **Ad 3.** Opět rozdělíme integrály a dostaneme $H_n = \int\limits_0^{1} \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y - \int\limits_1^{n} \frac{\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y + \int\limits_1^{n} \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Posledně jmenovaný integrál je opravdu roven $\ln n$. **Ad 4.** Tady upotřebíme slavnou limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-y}$. Pak máme $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int\limits_0^{1} \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y - \int\limits_1^{n} \frac{\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y\right] = \int\limits_0^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{y}$. První integrál vypadá, že by mohl divergovat v nule, ale když rozvineme $\mathrm{e}^{-y} = 1 - y + y^2/2 - \cdots$, zjistíme, že se jedničky odečtou a integrál se chová slušně. Druhý konverguje určitě, protože integrand je součinem e^{-y}, které klesá superrychle, a to je ještě násobené další klesající funkcí. Oba integrály tedy skutečně konvergují k nějakému číslu, a to je ta Eulerova-Mascheroniho konstanta $\gamma \approx 0{,}577\,216\ldots$.