1 Zkuste spočítat následující goniometrické integrály:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x \,dx$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x \,dx$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \,dx$; **4.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$;

Není potřeba v tom hledat složitosti, všechny čtyři se dají vyřešit substitucí $u = \sin x$ nebo $u = \cos x$ a využitím goniometrické jedničky. V posledním příkladě zkuste rozšířit $\sin x$.

2 Vzpomeňte si, že platí $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Pak vypočtěte integrály:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,dx$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \,dx$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x \,dx$.

3 Pokud jsou v integrandu jen sudé mocniny sinu a kosinu, hodí se použít substituci $\operatorname{tg} x = u$.

1. Vyjádřete $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ jen pomocí $\operatorname{tg} x$. **2.** Ukažte, že při $\operatorname{tg} x = u$ platí $dx = \frac{du}{1+u^2}$.

Vyčíslete: **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$; **4.** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^4 x}$; **5.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\cos x}$ (zde $0 < b < a$).

4 Integrály s odmocninami se často dají pěkně vyřešit pomocí goniometrické substituce, protože $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ (a podobně i pro $\sin x$). Zkuste si to na těchto příkladech:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \,dx$; **2.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; **3.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; **4.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x(1+x)}\,dx}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$.

U posledního bodu se bude hodit vložit nějakou hyperbolickou funkci. Pamatujte, že $1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$.

5 Integrujte per partes:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x \,dx$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \,dx$; **3.** $\displaystyle\int_0^{1} \ln x \,dx$; **4.** $\displaystyle\int_0^{1} x \operatorname{arc\,tg} x \,dx$; **5.** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \,dx$.

Pozor! V pátém bodě integrujete $e^{-x} \sin x$. Po každém per partes se podívejte, jestli náhodou ten integrál, který z per partes vyšel, není taky z $e^{-x} \sin x$, jinak se zacyklíte navěky.

6 Pomocí integrace per partes dokažte následující vztahy ($n \geq 2$ je přirozené číslo):

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,dx$. Zapište explicitně výsledek $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,dx$ pro n sudé a liché.

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$. (**Nápověda:** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.)

7 Vyzkoušejte si ještě per partes na těchto integrálech (a pozor, musí se udělat hodněkrát!):

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \,dx$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. ($n$ je zde přirozené číslo.)

8 Určete:

1. objem a povrch tělesa vzniklého rotací křivky $r = \sin z$ pro $0 < z < \pi$;
2. délku jednoho oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ pro $0 < t < 2\pi$;
3. plochu mezi parabolami $y = a(x^2 - 1)$ a $y = -b(x^2 - 1)$, kde a, b jsou kladné;
4. plochu omezenou trojlístkem, který má v polárních souřadnicích rovnici $r = \sin 3\varphi$;
5. délku křivky zadané v polárních souřadnicích $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$ (pro $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$).