$\boxed{1}$ Řekneme, že r-okolí konečného bodu (tj. čísla) x_0 je množina všech bodů x, které se od x_0 liší méně než o r. Zapište to matematicky nějakou nerovností. Vysvětlete jednoduše, co je zač to r.

$\boxed{2}$ U nekonečen se musí postupovat trochu jinak. Řekneme, že M-okolí bodu $+\infty$ je množina všech čísel x, která jsou větší než M, tj. množina všech $x > M$. Analogicky zaveďte M-okolí bodu $-\infty$.

$\boxed{3}$ Nakreslete si číselnou osu a na ní vyznačte následující okolí (tato úloha je tu proto, abyste si udělali intuitivní představu o tom, co to ta okolí jsou):
1. 1-okolí bodu 2; **2.** 10-okolí bodu $+\infty$; **3.** 5-okolí bodu $-\infty$.

$\boxed{4}$ Teď už můžeme „přeložit“ obecnou definici limity pro konkrétní případy.

1. Vysvětlete, jak se v případě konečné limity v konečném bodě stane z obecné definice toto: „Řekneme, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, pokud pro každé $\epsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé x splňující $|x - x_0| < \delta$ je $|f(x) - L| < \epsilon$.“
Podobně obecnou definici přeložte i pro: **2.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ (pro L konečné); **3.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

$\boxed{5}$ Ještě se vraťme trochu k případu konečné limity v konečném bodě. V naší definici se říká, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že se cosi splní. Je dobré si to představit jako jakousi „černou krabičku“, která funguje takto: ať už do ní strčím jakékoli kladné ϵ, vždycky mi z ní vypadne nějaké kladné δ takové, že vyhoví zbytku definice.
Platí $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$. Představte si, že jste „černá krabička“, která to dokazuje. Co odpovíte, když do Vás někdo strčí: **1.** $\epsilon = 1$ **2.** $\epsilon = 10$ **3.** $\epsilon = \frac{1}{100}$?

$\boxed{6}$ Jaká čísla bude vydávat černá krabička namísto δ, pokud uvážíme případ konečné limity v bodě $+\infty$? Dokažte, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, a to tak, že připravíte vhodnou odpověď krabičky pro jakékoli ϵ kladné, které by do ní někdo mohl vhodit. Zvládli byste touto metodou dokázat i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$, kde $\alpha > 0$?

$\boxed{7}$ A co případ limity rovné $+\infty$ v bodě $+\infty$? Vysvětlete, jaké číslo se bude do krabičky dávat a jaké číslo bude vydávat v tomto případě, a zase připravte vhodné odpovědi, kterými dokážete $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. Pak můžete také zkusit dokázat $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$ pro $\alpha > 0$.

$\boxed{8}$ Obdobnou metodou (skoro přes kopírák) ještě spočítejte podobné výsledky pro $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha$ je rovno nule pro $\alpha > 0$ a jedné pro $\alpha = 0$. Sami popište, jak to bude pro $\alpha < 0$.

$\boxed{9}$ Všechny funkce, se kterými pracujeme, jsou téměř všude spojité, takže pro většinu bodů platí $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. V konečných bodech tedy funguje strategie vyjádřená slovy „prostě do limity dosadíme a podíváme se, jestli není problém". Zkuste si to na těchto příkladech:

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3}{x+9}$; **2.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; **3.** $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x^2+x+1}$.

$\boxed{10}$ Dál se věnujme zlomkům z polynomů. Vypočtěte $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-3}$ tak, že ve zlomku pod limitou vynásobíte čitatel i jmenovatel $1/x$. Pak použijte věty o limitě součtu a podílu a to, že $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$.

$\boxed{11}$ Fintu z minulého cvičení využijte k vyčíslení následujících limit:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+2x+7}{3x^2-14x+8}$; **2.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$; **3.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/3}+x^{1/3}+1}{x-x^{2/3}-x^{1/3}}$; **4.** $\lim_{x\to\infty} \frac{100000x}{x^2+1}$. **5.** $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}$.

$\boxed{12}$ Zkuste spočítat podobné limity, když by x šlo místo toho k nule (může pomoci dát $x = 1/u$).

1. $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+2x+7}{3x^2-14x+8}$; **2.** $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$; **3.** $\lim_{x\to 0} \frac{x^{2/3}+x^{1/3}+1}{x-x^{2/3}-x^{1/3}}$; **4.** $\lim_{x\to 0} \frac{100000x}{x^2+1}$. **5.** $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}$.

$\boxed{13}$ Další typickou početní situaci představuje limita typu $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

1. Je výraz pod limitou pro $x = 2$ definován? **2.** Pečlivě se podívejte na definici limity. Závisí hodnota limity na hodnotě funkce v tom bodě, kde se limituje? **3.** Pro $x \neq 2$ lze zlomek poněkud upravit. Udělejte to a limitu spočítejte.

$\boxed{14}$ Vypočtěte ještě limity:

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$; **2.** $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} \sin\frac{\pi x}{4}\right)$.

$\boxed{15}$ Velmi častou chybou mezi studenty je výpočet typu $\lim_{x\to\infty}(x^2-x) = \infty - \infty = 0$.

1. Spočítejte tu limitu správně. **2.** Napište podobnou limitu typu „$\infty - \infty$", která skutečně vyjde 0. **3.** Napište další limitu tohoto typu, která bude rovna konečnému nenulovému číslu.
Je tedy vidět, že „$\infty - \infty$" se může rovnat celkem čemukoli! Je to takzvaný *neurčitý výraz*.