Domácí cvičení k limitám

1 Vypočtěte následující velmi podobné limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)-1}{x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-1}{x}$;

4. Zkuste obecný případ: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, kde n je přirozené.

2 Pomocí předchozího výsledku spočtěte též: **1.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{(1+x)^n}-1}{x}$ ($n \in \mathbb{N}$; zkuste položit $1+x = \frac{1}{1+u}$);

2. Nejobecnější případ: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{n/k}-1}{x}$ (zde n a k jsou celá čísla; zkuste položit $1+x = (1+u)^k$).

3 Spočítejte též následující limity tím, že se pokusíte upravit výrazy pod limitou do takového tvaru, aby tam vystupovala často limita z předchozí úlohy (α a β jsou racionální čísla, n a k jsou přirozená čísla):

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}\sqrt[k]{1+\beta x}-1}{x}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{n}{1-x^n} - \dfrac{k}{1-x^k}\right)$.

4 No a podobně funguje vlastně skoro všechno ostatní počítání limit bez výdobytků diferenciálního počtu. Pár příkladů za všechny:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin \alpha x}{\operatorname{arc\,tg} \beta x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ (zkuste položit $x = \log_a(1+\frac{1}{u})$);

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$; **5.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; **6.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$; **7.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{1+x}+b^{1+x}+c^{1+x}}{a+b+c}\right)^{1/x}$.

Odpovědi a řešení

1 **Ad 1.** Zřejmě je to 1. **Ad 2.** Při $x \to 0$ mám $\frac{1+2x+x^2-1}{x} = 2 + x \to 2$. **Ad 3.** Podobně: mám $\frac{1+3x+3x^2+x^3-1}{x} = 3+3x+x^2 \to 3$. **Ad 4.** Asi nepřekvapí, že použijeme binomickou větu a dostaneme, že $\frac{(1+x)^n-1}{x} = \frac{1}{x}\left[\binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right] = n + \binom{n}{2}x + \binom{n}{3}x^2 + \cdots x^{n-1} \to n$, protože všechny členy až na ten první obsahují x v aspoň první mocnině, a tak při $x \to 0$ vypadnou.

2 **Ad 1.** Položíme $1 + x = 1/(1 + u)$, pak při $x \to 0$ musí být taky $u \to 0$ a mám

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^n - 1}{\frac{1}{1+u} - 1} = -\lim_{u\to 0}\left[(1+u)\cdot\frac{(1+u)^n - 1}{u}\right] = -n.$$

Ad 2. Zas se zařídíme podle nápovědy a dáme $1 + x = (1 + u)^k$. Zase dostaneme, že při $x \to 0$ je též $u \to 0$ a mám

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^n - 1}{(1+u)^k - 1} = \lim_{u\to 0} \frac{[(1+u)^n - 1]/u}{[(1+u)^k - 1]/u} = \frac{n}{k}.$$

3 **Ad 1.** V čitateli i ve jmenovateli vytkneme všechna a, čímž dostaneme $a^{\alpha-\beta} \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta - 1}$. Teď můžeme položit $x/a = 1 + u$. Když jde $x \to a$, tak jde $x/a \to 1$ a $u \to 0$, takže dostaneme

$$a^{\alpha-\beta} \lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^\alpha - 1}{(1+u)^\beta - 1} = a^{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ad 2. Zapišme zde $\sqrt[k]{1+\beta x}$ jako $\sqrt[k]{1+\beta x} - 1 + 1$. Tím dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}\left[\sqrt[k]{1+\beta x} - 1\right] + \sqrt[n]{1+\alpha x} - 1}{x} = \beta \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}\left[\sqrt[k]{1+\beta x} - 1\right]}{\beta x} + \alpha \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - 1}{\alpha x} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{k}.$$

Ad 3. Dám $x = 1 + u$, pak u půjde k nule a limita přejde na $\lim_{u\to 0}\left[\frac{k}{(1+u)^k-1} - \frac{n}{(1+u)^n-1}\right]$. Dám na společného jmenovatele a čitatel i jmenovatel podělím u^2, čímž to upravím na monstrvýraz

$$\lim_{u\to 0} \frac{[k(1+u)^n - n(1+u)^k + n - k]/u^2}{\frac{(1+u)^k-1}{u}\cdot\frac{(1+u)^n-1}{u}}.$$

Ve jmenovateli už máme výrazy, ze kterých limitu známe, takže z toho zůstane jen $1/nk$. Zato v čitateli po rozepsání mocnin podle binomické věty zjistíme, že absolutní i lineární členy se pobijí mezi sebou a zůstane tam

$$k\frac{n(n-1)}{2} - n\frac{k(k-1)}{2} + k\binom{n}{3}u - n\binom{k}{3}u + \cdots,$$

ale při $u \to 0$ z toho zůstane jenom $nk\frac{n-k}{2}$. Už předtím se nám před limitou objevilo $1/nk$, takže výsledek je prostě $\frac{n-k}{2}$.

4 **Ad 1.** Tady je dobře si uvědomit, že když v $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$ položím $x = \sin u$, dostanu $\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = 1$. Takže $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ a úplně stejnou úvahou dostaneme i $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1$. Proto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin \alpha x}{\operatorname{arc\,tg} \beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha\frac{\arcsin \alpha x}{\alpha x}}{\beta\frac{\operatorname{arc\,tg} \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ad 2. Máme $\sin(\pi x^\alpha) = -\sin[\pi(x^\alpha - 1)]$. Udělám to s oběma siny a položím $x = 1 + u$, takže u jde k nule a upravili jsme to na

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin[\pi((1+u)^\alpha - 1)]/\pi((1+u)^\alpha - 1)}{\sin[\pi((1+u)^\beta - 1)]/\pi((1+u)^\beta - 1)} \cdot \frac{(1+u)^\alpha - 1}{(1+u)^\beta - 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ad 3. Uděláme, co se nám doporučuje, a položíme $x = \log_a(1 + \frac{1}{u})$. Pak je stále $u \to 0$ a máme

$$\lim_{u\to 0} \frac{1/u}{\log_a(1+\frac{1}{u})} = \ln a \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln[(1+\frac{1}{u})^u]} = \ln a \cdot \frac{1}{\ln \mathbf{e}} = \ln a.$$

Ad 4. Dám $x = 1/u$, čímž u půjde do $\pm\infty$ a dostaneme $\lim_{u\to\pm\infty} \ln[(1+\frac{1}{u})^u]$, což se v obou případech rovná $\ln \mathbf{e} = 1$ — uvnitř logaritmu je ta význačná limita z přednášky. **Ad 5.** Uděláme takový malý řetízek rozšíření: napíšeme

$$\ln\cos ax = -\frac{\ln(1 + \cos ax - 1)}{\cos ax - 1} \cdot 2\left(\frac{\sin ax/2}{ax/2}\right)^2 \cdot \frac{a^2x^2}{4}.$$

Toto vyjádření má totiž tu výhodu, že první dva zlomky jdou v limitě $x \to 0$ k jedné, jak už víme. Přepíšeme-li podobně $\ln\cos bx$, zjistíme, že mínusy vlevo, dvojky vprostřed a $x^2/4$ vpravo se zkrátí, zlomky jdou všechny k jedné a po limitě zůstane a^2/b^2. **Ad 6.** Použijeme „exp ln“ trik a přepíšeme limitu na

$$\exp \lim_{x\to\infty} \left[x \ln\left(\frac{a^{1/x} - 1 + b^{1/x} - 1}{2} + 1\right)\right].$$

Zase si uděláme řetízek rozšíření a napíšeme

$$x\ln\left(1 + \frac{a^{1/x} - 1 + b^{1/x} - 1}{2}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{a^{1/x}-1+b^{1/x}-1}{2}\right)}{\frac{a^{1/x}-1+b^{1/x}-1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{a^{1/x} - 1}{1/x} + \frac{b^{1/x} - 1}{1/x}\right).$$

Jenže ten velký zlomek jde v limitě zase k jedničce a uvnitř kulatých závorek zůstane $\ln a + \ln b$. Výsledek je tedy $\exp\frac{\ln a + \ln b}{2} = \sqrt{ab}$.

Ad 7. Tady můžeme využít limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{x} = 1$, kterou jsme viděli už na cvičení (a pokud jsme ji neviděli, tak ji hned dostaneme z bodu 3 této úlohy). Můžeme totiž psát

$$a^{1+x} = a\mathbf{e}^{x\ln a} = a\frac{\mathbf{e}^{x\ln a} - 1}{x\ln a} \cdot x\ln a + a$$

a podobně i pro b a c. Zlomek jde zase v limitě k jedné. Dáme $x = 1/u$, takže u jde k $\pm\infty$ a pro limitu dostáváme výraz

$$\lim_{u\to\pm\infty} \left[1 + \frac{1}{u} \frac{a\ln a\frac{\mathbf{e}^{\ln(a)/u}-1}{\ln(a)/u} + b\ln b\frac{\mathbf{e}^{\ln(b)/u}-1}{\ln(b)/u} + c\ln c\frac{\mathbf{e}^{\ln(c)/u}-1}{\ln(c)/u}}{a+b+c}\right]^u = \lim_{u\to\pm\infty}\left[1 + \frac{1}{u}\frac{a\ln a + b\ln b + c\ln c}{a+b+c}\right]^u =$$

$$= \exp\frac{a\ln a + b\ln b + c\ln c}{a+b+c} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$