1 Všechny funkce, se kterými pracujeme, jsou téměř všude spojité, takže pro většinu bodů platí $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. V konečných bodech tedy funguje strategie vyjádřená slovy „prostě do limity dosadíme a podíváme se, jestli není problém“. Zkuste si to na těchto příkladech:

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3}{x+9}$; **2.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; **3.** $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x^2+x+1}$.

2 Použijte „žebříček“ rychlosti růstu k rychlému spočtení následujících limit:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$; **2.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+\mathrm{e}^x}$; **3.** $\lim_{x\to\infty} \frac{2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-17}{\mathrm{e}^x+3}$; **4.** $\lim_{x\to\infty} \frac{1000000x}{x^2+1}$; **5.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^{2x}}$.

3 Dál se věnujme zlomkům z polynomů. Vypočtěte $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-3}$ tak, že ve zlomku pod limitou vynásobíte čitatel i jmenovatel $1/x$. Pak použijte věty o limitě součtu a podílu a to, že $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$.

4 Fintu z minulého cvičení využijte k vyčíslení následujících limit:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x+7}{3x^2-14x+8}$; **2.** $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$; **3.** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}+x^{1/3}+1}{x-x^{2/3}-x^{1/3}}$; **4.** $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}$; **5.** $\lim_{x\to\infty}\frac{5\mathrm{e}^{2x}+3}{7\mathrm{e}^{2x}+17\mathrm{e}^x-2}$.

5 Další typickou početní situaci představuje limita typu $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

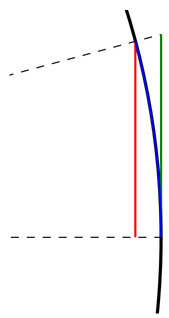
1. Je výraz pod limitou pro $x = 2$ definován? **2.** Pečlivě se podívejte na definici limity. Závisí hodnota limity na hodnotě funkce v tom bodě, kde se limituje? **3.** Pro $x \neq 2$ lze zlomek poněkud upravit. Udělejte to a limitu spočítejte.

6 Vypočtěte podobně následující limity:

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$; **2.** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}\sin\frac{\pi x}{4}\right)$.

7 Na rozdíly typu „$\infty-\infty$“ je potřeba si dávat pozor. Vhodným rozšířením a použitím vzorce $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ spočtěte tyto limity: **1.** $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)$; **2.** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$; **3.** $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{a+\frac{1}{x}}-\sqrt{a}\right)$ (zde $a \geq 0$); **4.** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

8 Koukněte se na obrázek (je na něm kus jednotkové kružnice). Vidíte z něho, že při $0 < x < \frac{\pi}{2}$ platí nerovnosti $\sin x < x < \operatorname{tg} x$? Pokud ne, prostě porovnejte dvě vyznačené délky a délku oblouku mezi oběma čárkovanými čarami. Pak tyto nerovnosti upravte na $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.



1. Co se s těmito nerovnostmi stane při $-\frac{\pi}{2} < x < 0$?

2. Ukažte pomocí té druhé, že $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$? (Vzpomeňte na větu o třech limitách.)

9 S pomocí limity z předchozího cvičení vypočtěte také následující:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$; **2.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$; **3.** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{x}$; **4.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (užijte vztah $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$).

10 Další důležitá a slavná limita je tato: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$, kterou už asi znáte z přednášky. Odvoďte z ní, že platí také $\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{a}{u}\right)^u = \mathrm{e}^a$. (Zkuste na to jít tak, že v původní limitě položíte $x = u/a$. Kam pak jde u, když x jde do nekonečna? Podle toho limitu přepište.)

11 S pomocí předchozího cvičení vypočtěte také tyto limity:

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; **2.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$; **3.** $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; **4.** $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$; **5.** $\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg} x}$.

Ve všech případech bude potřeba najít nějakou substituci, která (podobně jako v minulé úloze) převede tu limitu na tvar, který už umíme spočítat. Třeba v prvním bodě to bude $u = x^2-2$, ve čtvrtém $x = \ln(1+u)$. U ostatních bodů to zkuste najít sami. V posledním použijte to, že $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}$.

$\boxed{12}$ Protože všechny elementární funkce jsou (skoro) všude spojité, můžeme bez problémů „vlézt" s limitou dovnitř takových funkcí. Tedy $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$. Zkuste si tak spočítat následující limity: **1.** $\lim_{x\to\infty} \cos\frac{\sqrt{x}+2}{x+3}$; **2.** $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}-\frac{x+2}{2x+1}}$; **3.** $\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}-\ln\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Ale **POZOR!!** Rozhodně třeba **NEFUNGUJE** $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1^\infty = 1$ — to už víme z minulého cvičení. Blbě řečeno, při tomto triku nesmíte s limitou překročit žádné x (tedy žádný výskyt té proměnné, podle které se limituje).

$\boxed{13}$ Podle principu z předchozí úlohy můžeme často pohodlně spočítat limity, ve kterých se hodně násobí nebo umocňuje. Pomůže nám takováto finta: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\exp(\ln f(x)) = \exp\lim_{x\to\infty}\ln f(x)$. Spočtěte tak tyto limity:

1. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{a}$ (a je kladné); **2.** $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$; **3.** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$ (tohle je limita posloupnosti).

Větší využití téhle finty ale uvidíme až později — až budeme umět derivovat.