Odpovědi k vyšetřování průběhu funkce

OBRÁZKY FUNKCÍ můžete nalézt na `https://www.geogebra.org/calculator/vhvwb7g5`.

1 **Ad 1.** Pro všechna reálná čísla. **Ad 2.** Lichá. **Ad 3.** Není. **Ad 4.** $3x-x^3 = -x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, takže kořeny jsou 0 a $\pm\sqrt{3}$. Nalevo od $-\sqrt{3}$ je funkce kladná, pak záporná, pak kladná a pro velká x zas záporná. **Ad 5.** Ne. **Ad 6.** Derivace je $3-3x^2 = -3(x-1)(x+1)$, extrémy jsou v ± 1, funkce je postupně klesající, rostoucí, klesající. **Ad 7.** Druhá derivace je $-6x$, inflexní bod je v nule, vlevo od něj je funkce konvexní, vpravo konkávní. V extrémech je hodnota ± 2. Graf viz níže.

2 **Ad 1.** Definována pro všechna x, není sudá ani lichá, ale je 2π-periodická. Proto nám stačí kreslit jenom interval mezi nulou a 2π. Kořeny (v tomto intervalu) jsou $2\pi-\psi$ a $\pi+\psi$, kde $\psi = \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Derivace je $f' = \cos x - 2\sin x\cos x$, kořeny jsou $\pi/6$ a $5\pi/6$. Druhá derivace je $f'' = 4\sin^2 x - \sin x - 2$, takže inflexní body jsou čtyři: $\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $\pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $\pi + \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}$ a $2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}$.

Ad 2. Zjevně je jeden kořen v nule a jedna svislá asymptota v -1. Platí $x^2 = [(x+1)-1]^2 = (x+1)^2 - 2(x+1)+1$, takže $\frac{x^2}{x+1} = x+1-2+\frac{1}{x+1}$. Derivujme: máme $f' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$, takže extrémy jsou v nule a v -2. Derivujme znovu, máme $f'' = \frac{2}{(x+1)^3}$, takže inflexní bod není žádný, v nule je minimum a v -2 maximum.

Ad 3. Jediný kořen je v nule. Jinde už kořen není, protože arkustangenta roste všude pomaleji než x (srovnej derivace: arkustangenta má $\frac{1}{1+x^2}$, x má 1). Derivace je $f' = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, jediný kořen je v nule, ale vlevo i vpravo od nuly je funkce rostoucí, takže tam není extrém. $f'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, takže inflexní bod je v nule, vlevo je funkce konkávní, vpravo konvexní. Při velkém x je arkustangenta skoro $\pi/2$, při velkém záporném je to skoro $-\pi/2$, takže máme dvě asymptoty: $x-\pi/2$ pro $-\infty$ a $x+\pi/2$ pro $+\infty$.

Ad 4. $\mathbf{e}^{2x-x^2} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^{-(x-1)^2}$, takže kdo ví, jak vypadá gaussovka, může prostě nakreslit gaussovku s vrcholem nad jedničkou a $\mathbf{e}$-krát naškálovanou. Kdo neví, snadno to zjistí: $f' = -2(x-1)\mathbf{e}^{-(x-1)^2+1}$, takže jediný extrém je v jedničce, před ním funkce roste a pak klesá, takže je to maximum, a $f'' = \mathbf{e}^{-(x-1)^2+1}[4(x-1)^2-1]$, takže inflexní body jsou v $x = \frac{1}{2}$ a $x = \frac{3}{2}$.

Ad 5. Tahle funkce je definována jen pro $x \geq 0$, kořeny jsou v nule a ve trojce. Máme $f' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$, takže máme jeden extrém v jedničce. Před ním funkce klesá, po něm roste, takže je to minimum. Po dalším derivování máme $f'' = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^{3/2}}\right)$, takže inflexní bod není a funkce je všude konvexní.

Ad 6. Definována jen při $x > 0$. Při $x \to 0$ jde do $(-\infty)\cdot(\infty) = -\infty$, jediný extrém je v jedničce. Derivujme, dostaneme $f' = \frac{1-\ln x}{x^2}$, jediný extrém je v $x = \mathbf{e}$, nalevo od něj funkce roste, napravo klesá, je to tedy maximum s hodnotou $1/\mathbf{e}$. Pak máme $f'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$, takže jediný inflexní bod je v $x = \mathbf{e}^{3/2}$, nalevo od něj je funkce konkávní, napravo konvexní.

Ad 7. Kořen zjevně není žádný, funkce je lichá a v $x = 0$ je svislá asymptota. Dívejme se jen na kladné hodnoty, záporné doplníme zrcadlově. Zde je funkce všude kladná. Derivujme, máme $f' = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{x^2})$, extrém je v jedničce. před ním funkce klesá, pak roste, je to minimum (a symetricky doplníme extrém do -1, což je maximum). Derivujme znovu, máme $1/x^3$, inflexní bod není, funkce je konvexní (a pro záporná konkávní). Při velkých x je $1/x$ nedůležité, takže se to chová asi jako $x/2$ (a symetricky dokreslíme asymptotu i pro záporné hodnoty).

Odpovědi ke slovním úlohám na extrémy

1 Odřízneme-li v každém rohu čtvereček o straně λa ($0 < \lambda < \frac{1}{2}$ — strana odříznutých čtverečků nemůže převyšovat polovinu plechu, pak by se tam všechny nevešly), dostaneme nádobu s výškou λa a čtvercovým dnem o straně $(1-2\lambda)a$. Její objem je tedy $\lambda(1-2\lambda)^2 a^3$. Derivujeme podle λ a položíme rovno nule; dostaneme

$$(1-2\lambda)^2 - 4\lambda(1-2\lambda) = 12\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0,$$

což má dva kořeny, $\lambda = \frac{1}{6}$ a $\lambda = \frac{1}{2}$. Máme tedy tři kandidáty na globální extrém: kraje intervalu $\lambda = 0$ a $\lambda = \frac{1}{2}$, v nichž je objem nádoby nulový, a $\lambda = \frac{1}{6}$, kde je roven $\frac{2}{27}a^3$.

2 Řekněme, že trám bude mít strany $2a$ a $2b$, přičemž $a^2 + b^2 = R^2$, kde R je poloměr kmene. Řekněme taky, že třeba $b > a$; pak je nosnost úměrná $8ab^2$. Vyjádříme $b^2 = R^2 - a^2$, čímž obdržíme pro nosnost $8aR^2 - 8a^3$. Derivujeme a položíme rovno nule, vyjde $R^2 - 3a^2 = 0$, takže kratší strana trámu bude $R/\sqrt{3}$ a delší pak $\sqrt{2}R/\sqrt{3}$. Výsledek lze formulovat i tak, že chceme vytesat trám o poměru stran $1 : \sqrt{2}$ (což je mimochodem stejný poměr stran, jako má papír A4 ◡̈).

3 Dno nechť má stranu a a výška nechť je h. Pak máme $a^2h = V = \text{const.}$ a chceme minimalisovat $S = a^2 + 4ah$. Vložíme $h = V/a^2$ a minimalisujeme podle a; po derivování a položení rovno nule dostaneme $2a - 4V/a^2 = 0$, takže $a = \sqrt[3]{2V}$ a $h = V/a^2 = \sqrt[3]{V/4}$; proto má být výška rovna polovině strany dna.

4 Řešíme podobně jako v předchozí úloze: objem válce je $V = \pi r^2 h$, takže jeho výšku vyjádříme jako $h = V/\pi r^2$. Minimalisujeme povrch $S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, derivujeme a položíme rovno nule, čímž obdržíme $4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$. Z toho pak už zjistíme, že $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r$. Válec tedy má být stejně vysoký jako široký.

5 Vycentrujeme vepsaný obdélník na prostředek půlkruhu. Dva rohy budou na rovném kraji půlkruhu, řekněme ve vzdálenosti x od středu, další dva budou nad nimi. Tyto body musí splnit rovnici kružnice $x^2 + y^2 = R^2$, takže mají $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Celkem tedy máme obdélník o stranách $2x$ a y, takže má plochu $2x\sqrt{R^2 - x^2}$. Můžeme klidně maximalisovat její čtverec, tedy $4x^2(R^2 - x^2)$. Buď můžeme derivovat, nebo můžeme využít středoškolských znalostí o parabolách a dojít k závěru, že je tu jedno maximum při $x^2 = R^2/2$. Celkem tedy máme čtverec plochy roven R^4, tedy plocha je R^2. Půlkruh zabírá plochu $\pi R^2/2$, takže tento obdélník zabírá $2/\pi$ z této plochy.

6 Lampa je nad prostředkem stolu, takže mezi ní a krajem stolu máme pravoúhlý trojúhelník o stranách h, r a 1. Z toho jednak vidíme, že $r = \sqrt{1 + h^2}$, jednak též vidíme, že $\sin\varphi = \frac{h}{r}$. Tím jsme vyjádřili intensitu pomocí h jako $I = \frac{kh}{(1+h^2)^{3/2}}$. Derivujme, dostaneme $I' = I \cdot \left[\frac{1}{h} - \frac{3}{2}\frac{2h}{1+h^2}\right]$. Položíme-li to rovno nule, dostaneme buď $h = 0$, což je zjevně minimum, nebo $1 + h^2 - 3h^2 = 0$, tj. $h = \sqrt{2}$, což je maximum.

7 Obvod výseče je prostě φ a stejný je i obvod podstavy kornoutu. Jeho poloměr je tedy dán rovnicí $2\pi r = \varphi$. Z druhé strany taky víme, že poloměr původní výseče (rovný jedné) je po slepení vzdálenost mezi špičkou a obvodem kornoutu. Pro výšku kornoutu h tedy platí Pythagorova věta: $r^2 + h^2 = 1$. Objem kornoutu je roven $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{24\pi^2}\varphi^2\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}$. Derivujeme a položíme rovno nule, dostaneme $V\left[\frac{2}{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{2\varphi}{4\pi^2 - \varphi^2}\right] = 0$. Závorka se bude rovnat nule při $\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, a při tomto úhlu nastává maximum objemu $\frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

8 Auto se nejlíp vytočí tak, že jeden jeho bod bude přímo v rohu odbočky. Pokud s krajnicí svírá úhel φ, může být ta část, která je v širší silnici, mít nejvýše délku $\frac{a}{\cos\varphi}$, a ta, která je v užší, nejvýše $\frac{b}{\sin\varphi}$. Celkem tedy maximální délka auta, které svírá s krajnicí úhel φ, je $\frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi}$. Derivujme a položíme rovno nule, tím dostaneme rovnici $a\sin^3\varphi = b\sin^3\varphi$, a tak získáme $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Dosadíme-li to zpět do $\frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi}$, dostaneme po použití vztahů $\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ a $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ a nějakých úpravách vztah $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

Poznamenejme ještě, že tohle je *minimum*. Auto totiž musí při zatáčení projet postupně všemi úhly od $\pi/2$ až do nuly, a pokud by jeho délka přesáhla toto minimum, někde by vyjelo ze silnice.

9 Zase nakreslíme obrázek. Řekněme, že postavíme přípojku ve vzdálenosti $b - x$ od Horní Dolní. Přípojka má pak délku $\sqrt{a^2 + x^2}$ a zbytek do Horní Dolní délku $b-x$, takže po započtení toho, co musíme za kterou část cesty zaplatit, dostaneme celkové náklady $p\sqrt{a^2 + x^2} + (b-x)q$. Derivujeme, položíme rovno nule a máme $\frac{xp}{\sqrt{a^2 + x^2}} = q$, což po vzetí čtverce a nějakém přerovnání dá $x^2 = \frac{a^2q^2}{p^2-q^2}$. Kromě toho máme i $a^2 + x^2 = \frac{a^2p^2}{p^2-q^2}$, takže $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{q}{p}$ (přičemž φ je úhel mezi přípojkou a stávající železnicí).

Odpovědi k Taylorově řadě

1 $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$.

2 $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$.

3 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ a $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$.

4 $\ln(1+x) = \sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$.

5 Uděláme to, co se po nás chce. Roznásobíme pravou stranu rovnice a setřídíme podle mocnin x:

$$x - \frac{x^3}{6} + \cdots = a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \tfrac{1}{2}a_0\right)x^2 + \left(a_3 - \tfrac{1}{2}a_1\right)x^3 + \cdots$$

Dál už vpravo nebudeme roznásobovat, protože vlevo jsme to udělali stejně jen do třetí mocniny. Protože koeficienty vlevo i vpravo musí být stejné, dostaneme jejich porovnáním čtyři rovnice:

$$0 = a_0, \qquad 1 = a_1, \qquad a_2 - \tfrac{1}{2}a_0 = 0, \qquad a_3 - \tfrac{1}{2}a_1 = -\tfrac{1}{6}.$$

První dvě rovnice nám přímo dávají $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$. Do třetí dosadíme $a_0 = 0$ a dostaneme také $a_2 = 0$. Do poslední pak dosadíme $a_1 = 1$ a obdržíme $a_3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, takže $a_3 = \frac{1}{3}$. Proto dostáváme první čtyři členy v rozvoji tangenty:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Odpovědi k l'Hospitalovi

1 $x - x_0$ se zkrátí, zůstane výsledek a/b.

2 Mám $\mathrm{d}f = f'\,\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}g = g'\,\mathrm{d}x$. Jestliže je $f(x_0) = 0$, vím z těch diferenciálů, že $f(x_0 + \mathrm{d}x) \approx \approx f(x_0) + \mathrm{d}f = 0 + f'\,\mathrm{d}x$ a podobně pro g, takže by mělo fungovat

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{0 + f'\,\mathrm{d}x}{0 + g'\,\mathrm{d}x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Z toho je vidět, že l'Hospital opravdu nebude fungovat, pokud čitatel i jmenovatel nejde k nule. Jinak se totiž místo té nuly v čitateli, resp. ve jmenovateli, ke které se přičítá $\mathrm{d}f$, resp. $\mathrm{d}g$, objeví nějaké číslo a nemůžeme najednou krátit!!

3 Pomůžeme si trikem: $L = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g}{1/f}$. Jelikož f i g jdou do nekonečna, najednou máme nahoře i dole něco, co jde k nule, a můžeme na to použít pravidlo z předchozího bodu. Proto je

$$L = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g}{1/f} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'/g^2}{f'/f^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'}{f'} \cdot \left(\frac{f}{g}\right)^2 = L^2 \lim_{x\to x_0} \frac{g'}{f'}.$$

Po úpravě máme $\lim_{x\to x_0} \frac{g'}{f'} = \frac{1}{L}$ a po převrácení opět $L = lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Při tomto výpočtu jsme ale tiše předpokládali, že obě limity v této rovnosti jsou konečné.

4 Máme $\frac{x+\cos x}{x} = 1 + \frac{\cos x}{x}$. Druhý sčítanec jde podle věty o třech limitách do nuly, takže tato limita je rovna jedné. Pokud ale budeme l'Hospitalovat, zůstane nám $\lim_{x\to\infty}(1 - \sin x)$, což neexistuje! Takže tuhletu limitu l'Hospital nespočítal dobře. Poučení je opravdu takové, že jestliže po l'Hospitalovi limita neexistuje, znamená to, že se l'Hospital rozbil a musíme zkusit něco jiného.

5 **Ad 1.** 1; **Ad 2.** 0; **Ad 3.** 1; **Ad 4.** 0; **Ad 5.** $\frac{1}{2}$.

Odpovědi k větám o střední hodnotě

1 Před narozením jste měřili méně než metr. Teď měříte (aspoň předpokládám!) více. Je-li Vaše výška spojitou funkcí času, říká Weierstrassova věta, že na uzavřeném intervalu (to je celý Váš život) nabývá Vaše výška nějaké minimální hodnoty, nějaké maximální hodnoty, a také všech hodnot mezi nimi. Takže pokud jste někdy měřili méně než metr a někdy více než metr, museli jste někdy mít i všechny výšky mezi těmito hodnotami — tedy i přesně metr.

2 Uděláme podobnou úvahu s rozdílem výšek: je v čase spojitý a na uzavřeném intervalu (celý náš dosavadní život) nabýval nějaké kladné hodnoty (při jeho narození jsem byl vyšší než on) a nějaké záporné (teď je vyšší on), takže musel nabývat i nulové hodnoty.

3 **Ad 1.** To je přesně stejná úvaha jako v předchozí úloze. **Ad 2.** Kdyby byla derivace všude kladná, byla by funkce na celém intervalu rostoucí, a to je spor s předpokladem, že má na krajích intervalu nulové hodnoty. Pokud by všude rostla, musela by být vpravo větší hodnota než vlevo. Úplně stejná úvaha platí i pro zápornou derivaci, jen s klesáním. **Ad 3.** Není možné, aby derivace byla pořád jen kladná nebo pořád záporná. Proto nám zůstávají už jen případy, kdy je aspoň někde nulová. Nemůže se totiž stát, aby byla někde derivace kladná, jinde záporná a neprocházela nulou — viz první bod.

4 Nechť $s(t)$ je dráha, kterou uběhl od startu. Pak platí $s(t_{\text{začátek}}) = s(t_{\text{konec}}) = 0$. Za předpokladu spojité diferencovatelnosti $s(t)$ nám Rolleova věta hned říká, že pro nějaké $t \in \langle t_{\text{začátek}}; t_{\text{konec}}\rangle$ musí být $s'(t) = 0$, tj. rychlost rovna nule.

5 **Ad 1.** Odečteme $f(a)$. **Ad 2.** Teď je v bodě a nulová hodnota, ale v bodě b je $f(b) - f(a)$. Odečteme tedy lineární funkci, která bude v bodě a nulová a v bodě b bude mít právě hodnotu $f(b) - f(a)$. Takovou funkcí je $\frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$. **Ad 3.** Vezmeme tedy funkci $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Použijeme Rolleovu větu a máme, že někde na intervalu $\langle a; b\rangle$ musí být $g' = f' - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, takže někde tam musí být $f' = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

6 Budeme měřit teplotu $T(\varphi)$ jako funkci zeměpisné šířky. Pak je to zřejmě 2π-periodická funkce. Kromě toho si uděláme ještě posunutou funkci $F(\varphi) = T(\varphi+\pi)$, která ukazuje teplotu přesně naproti bodu s úhlem φ. I tato funkce je 2π-periodická. Utvořím rozdíl těchto funkcí: $d(\varphi) = T(\varphi) - T(\varphi + \pi)$. Z toho už vidím, že $d(0) = T(0) - T(\pi)$ a $d(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - T(0) = -d(0)$ díky periodicitě. Pak už jsou možné jen dva případy: buď $d(0) = 0$ a pak jsme hned našli dva protilehlé body se stejnou teplotou (s úhly 0 a π), nebo je $d(0) \neq 0$. Pak ovšem $d(\pi)$ má přesně opačné znamení, takže (protože d je spojitá) je podle Weierstrassovy věty někde mezi nulou a π takový bod, že $d(x) = 0$.

Odpovědi k hledání tečen

$\boxed{1}$ Pokud je bod $[x_0; y_0]$ na přímce $y = kx + c$, musí být $y_0 - kx_0 = c$. Dosadíme zpět do rovnice, máme $y = kx + c = kx + y_0 - kx_0$, takže máme $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$\boxed{2}$ **Ad 1.** $\pi/2$. **Ad 2.** Ta směrnice je prostě hodnota derivace: $y' = \sin x - x\cos x$, takže $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$. **Ad 3.** Takže tečna v bodě $[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ má směrnici 1, a proto máme rovnici směrnice prostě $y = x$.

$\boxed{3}$ **Ad 1.** $y = x$; **Ad 2.** $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$; **Ad 3.** $y = (\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1})x + 2\mathrm{e}^{-1}$.

$\boxed{4}$ **Ad 1.** Tyhle křivky se protínají například v $x = \pi/4$. V tomto bodě je $(\sin x)' = \cos x = 1/\sqrt{2}$ a $(\cos x)' = -1/\sqrt{2}$, takže sinus roste pod úhlem $\operatorname{arc\,tg} 1/\sqrt{2}$ vzhledem k vodorovné přímce, a kosinus klesá pod stejným úhlem. Rozdíl těchto dvou úhlů je $2 \operatorname{arc\,tg} 1/\sqrt{2}$, což je úhel mezi těmi dvěma křivkami. **Ad 2.** Stejná myšlenka: průsečík je v $x = 1$ a úhel je $\operatorname{arc\,tg} 2 - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$.

$\boxed{5}$ Tečna k hyperbole $x^2 - y^2 = a$ se zjistí tak, že to přepíšeme na $y = \sqrt{x^2 - a}$ a derivujeme: pak je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a}}$. Směrový vektor tečny je tedy $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \left(1; \frac{x}{\sqrt{x^2-a}}\right)\mathrm{d}x$. Stejně tak tečna k hyperbole $xy = b$ je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -b/x^2$ a její směrový vektor je rovnoběžný s $\left(1; \frac{-b}{x^2}\right)$. Jestliže se ty dvě hyperboly protínají pro nějakou hodnotu x, můžeme úhel mezi oběma křivkami spočítat pomocí skalárního součinu: máme

$$\left(1; \frac{x}{\sqrt{x^2 - a}}\right) \cdot \left(1; \frac{-b}{x^2}\right) = 1 - \frac{b}{x\sqrt{x^2 - a}}.$$

Jenže průsečík je tam, kde jsou splněny obě rovnice $x^2 - y^2 = a$ a $xy = b$ zároveň. Z druhé vyjádříme $y = b/x$ a dosadíme do první, máme $x^2 - \frac{b^2}{x^2} = a$, což lze přepsat na $x^2 - a = \frac{b^2}{x^2}$, a to zas na $\frac{b^2}{x^2(x^2-a)} = 1$. Po odmocnění vidíme, že skalární součin mezi oběma tečnými vektory je nulový a proto jsou na sebe skutečně kolmé.

Odpovědi k finálním úlohám

$\boxed{1}$ Funkce je lichá. Při malém x můžeme rozvinout do prvního řádu a máme $2^{2/3}\frac{2}{3}x$, takže nulou to prochází jako takováto úsečka. Zase při velkém x můžeme to x z obou závorek vytknout a máme $x^{2/3}\frac{8/3}{x} = \frac{8}{3x^{1/3}}$, takže při $x \to \pm\infty$ to jde pomalu k nule jako $1/\sqrt[3]{x}$. Je tedy jasné, že když to v nule rostlo a v nekonečnu klesá, musí někde mezi tím být maximum. Derivujme a položme rovno nule; dostaneme, že musí být

$$\frac{2}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right] = 0.$$

Zkraťme $\frac{2}{3}$ a násobme $(x+2)^{-2/3} + (x+2)^{-1/3}(x-2)^{-1/3} + (x-2)^{-2/3}$. Zůstane

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{-4}{x^2 - 4},$$

takže kořen není nikde! Jak je to možné⁈

Musíme si uvědomit, že extrém může být nejen tam, kde je derivace nulová, ale i tam, kde vůbec neexistuje — například funkce $f(x) = |x|$ má v nule minimum, ale derivace tam vůbec není definovaná. V našem případě je to v bodech ± 2, kde je skutečně maximum (resp. minimum) s hodnotou $\pm 2^{4/3}$.

2 Obdélník bude mít při základně šířku d a výšku y takovou, aby se dotýkal obou zbylých stran trojúhelníka. Na zjištění toho, jaká výška y odpovídá zadané šířce d, můžeme použít třeba trik, se kterým přišel pan Ohlídal: plocha celého trojúhelníka je rovna $\frac{1}{2}xh$, a ta se nám rozpadla na jeden malý trojúhelník nad obdélníkem s plochou $\frac{1}{2}d(h-y)$, na ten obdélník s plochou yd a na dva trojúhelníky po bocích, z nichž každý má plochu $\frac{1}{2}y\frac{x-d}{2}$. Celkem máme rovnost

$$xh = d(h-y) + 2yd + y(x-d) = dh + xy,$$

ze které spočteme $y = (x-d)h/x$, kde x a h jsou konstanty. Takže hledáme extrém obvodu:

$$2(y+d) = 2\left(d + \frac{h(x-d)}{x}\right) = 2h + 2\left(1 - \frac{h}{x}\right)d.$$

Takže při $h > x$ obvod klesá s d a potřebujeme co nejmenší d, tedy obdélník s nulovou šířkou a výškou h. Zato při $h < x$ obvod roste s d, chceme co největší d a máme obdélník s nulovou výškou a šířkou x. Nakonec pokud se h rovná x, je obvod těchto obdélníků vždycky konstantní $2h$, a je úplně jedno, který z těchto obdélníků vezmeme — všechny mají ten stejný maximální obvod.

3 Hledáme extrém čtverce vzdálenosti $x^2 + (y-b)^2$, přičemž x a y jsou vázány rovnicí elipsy. Z ní vyjádříme třeba x pomocí y a dostaneme $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$, takže čtverec vzdálenosti je

$$d^2 = a^2 + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 - 2yb + b^2.$$

Extrém bychom mohli najít i bez derivování (jen doplněním na čtverec), ale když už umíme derivovat, tak toho využijme. Dostaneme $-2\frac{a^2-b^2}{b^2}y - 2b = 0$, takže musí být $y = -\frac{b^3}{a^2-b^2}$. Tomu odpovídají dvě možné x-ové souřadnice

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{b^4}{(a^2-b^2)^2}\right) = a^2\frac{a^4 - 2a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pm\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-2b^2}.$$

4 Nejjednodušší je nepoužít Taylorův vzorec a místo toho to vzít postupně zevnitř. Pak máme $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots$ (stačí nám pracovat do prvního řádu), a proto $\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+\cdots) = 1 + 2x + \cdots$. Obdobně $\frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + \cdots$. Nakonec můžeme využít binomickou větu a napsat

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt[3]{1 + 2x + \cdots} - \sqrt[1-2x+\cdots]{=} \left(1 + \frac{2}{3}x + \cdots\right) - \left(1 - \frac{2}{3}x + \cdots\right) = \frac{4}{3}x + \cdots.$$

5 Máme $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 - x^6/720 + \cdots$ a $\mathbf{e}^y = 1 + y + y^2/2 + y^3/6 + \cdots$. Dosadíme $y = -x^2/2$, takže musí být $\mathbf{e}^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \cdots$. Proto je

$$\cos x - \mathbf{e}^{-x^2/2} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \cdots\right) = \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{45} + \cdots.$$

Takže

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathbf{e}^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{45} + \cdots}{x^4}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{45} + \cdots\right) = \frac{1}{6}.$$

Stojí za zmínku, že to zabralo mnohem méně času, než kdybychom se hmoždili s l'Hospitalem. Toho bychom totiž museli dělat celkem čtyřikrát, než by se konečně zjevil výsledek.

6 **Ad 1.** 2; **Ad 2.** $-\frac{1}{2}$.

7 $y - 5 = 6(x - 1)$, tj. $x - y - 1 = 0$.

8 Stejná myšlenka jako u úloh na větu o střední hodnotě. Udělám rozdíl jeho poloh při cestě nahoru a dolů ve stejný čas. Ráno byl první den dole, druhý nahoře, rozdíl poloh je záporný, večer byl první den nahoře, druhý dole, rozdíl poloh je kladný. Jelikož je rozdíl poloh spojitý, musí podle Weierstrassovy věty nabývat i všech hodnot mezi těmito dvěma mezemi, mimo jiné tedy i nulové hodnoty.