Vyšetření průběhu funkce

1 Uvažme funkci $f(x) = 3x - x^3$. Pro tuto funkci zodpovězte následující otázky:

1. Kde je definována? **2.** Je sudá, lichá, nebo ani jedno? **3.** Je periodická?
4. Kde jsou kořeny (tj. kde se funkce rovná nule)? Kde nabývá kladných a kde záporných hodnot? (**Nápověda:** mezi dvěma kořeny je funkce buď všude jen kladná, nebo všude jen záporná.)
5. Má tato funkce nějakou asymptotu?
6. Spočtěte první derivaci. Kde má kořeny, kde je kladná a kde záporná? Z toho zjistěte, kde $f(x)$ roste, kde klesá a kde má extrémy.
7. Spočtěte druhou derivaci. Kde má kořeny, kde je kladná a kde záporná? Z toho zjistěte, kde je konvexní, kde konkávní a kde jsou inflexní body.
8. Spočítejte funkční hodnoty ve všech důležitých bodech (extrémech, inflexních bodech atd.)
9. S pomocí všech těchto informací načrtněte graf.
Tomuto procesu se říká *vyšetření průběhu funkce.*

2 Vyšetřete průběh následujících funkcí:

1. $\sin x + \cos^2 x$; **2.** $\frac{x^2}{x+1}$; **3.** $x - \operatorname{arc\,tg} x$; **4.** e^{2x-x^2}; **5.** $(x-3)\sqrt{x}$; **6.** $\frac{\ln x}{x}$; **7.** $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$.

Slovní úlohy na extrémy

1 Máme čtvercový kus plechu o straně a, z něhož chceme udělat hranatou nádobu. V rozích odřežeme čtyři čtverečky, načež čtyři postranní části ohneme nahoru a spojíme. Jak vysokou máme nádobu udělat, chceme-li, aby měla co největší objem?

2 Z válcového kmene chceme vytesat trám obdélného průřezu tak, aby měl co největší nosnost. Jaký má být poměr stran, je-li nosnost úměrná součinu šířky a čtverce výšky trámu?

3 Jaký tvar má mít kvádrový bazén s čtvercovým dnem, aby se při zadaném objemu spotřebovalo co nejméně materiálu na vyzdění dna a stěn?

4 Jaký tvar má mít válec, aby měl při zadaném objemu co nejmenší povrch?

5 Jakou největší část plochy půlkruhu může zabírat obdélník, který je do něj vepsán?

6 Do jaké výšky máme pověsit lampu nad střed kruhového stolu o poloměru 1, chceme-li, aby byla na kraji stolu co možná největší intensita osvětlení? Intensita je v každém bodě stolu rovna $\frac{k \sin \varphi}{r^2}$, kde φ je úhel mezi dopadajícími paprsky a deskou stolu, r je vzdálenost daného bodu od lampy a k je konstanta úměrnosti.

7 Z kruhu o poloměru 1 vyřízneme výseč se středovým úhlem φ a rovné části slepíme k sobě, takže vznikne kornout. Jaký má být středový úhel, aby byl objem výsledného kornoutu co největší? (**Nápověda:** Výseč má obvod φ (nepočítáme-li části, které se později slepí). Z tohoto obvodu se po slepení stane obvod podstavy kužele.)

8 Ze silnice o šířce a odbočuje pod pravým úhlem menší silnička o šířce b. Jaká je největší délka vozidla, které se na odbočce dokáže vytočit, aniž by opustilo vozovku?

9 Mějme železnici vedoucí ze severu na jih, která končí v Horní Dolní. O kus dál je fabrika, která je od železnice vzdálena o a kilometrů a je o b kilometrů severněji než Horní Dolní. Pod jakým úhlem máme z fabriky postavit přípojku k železnici, pokud chceme, aby přeprava z fabriky do Horní Dolní vyšla co nejlevněji? Přeprava po přípojce stojí p zlaťáků za kilometr, po původní železnici q zlaťáků na kilometr ($p > q$).

Taylorova řada

Pro připomenutí nabízím Taylorův vzorec:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n.$$

Takto získané nekonečné řady mají často smysl jen pro některé hodnoty h. Obory platnosti těchto řad vždycky uvádím v závorce, ale to nemusíte dokazovat (to Vás čeká až za dva semestry).

1 Rozviňte funkci $(1+x)^\alpha$ v nekonečnou řadu kolem bodu $x = 0$ ($|x| < 1$, α je libovolné reálné číslo).

2 Rozviňte funkci e^x v nekonečnou řadu kolem bodu $x = 0$ ($x \in \mathbb{R}$). Pak ji rozviňte v řadu kolem bodu $x = a$, kde a je jakékoli reálné číslo.

3 Rozviňte funkce $\sin x$ a $\cos x$ v nekonečné řady kolem bodu $x = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

4 Rozviňte funkci $\ln(1+x)$ v nekonečnou řadu kolem bodu $x = 0$ ($|x| < 1$).

5 Rozviňte $\operatorname{tg} x$ do řady (až do x^3) bez použití Taylorova rozvoje takto: řekněme, že $\operatorname{tg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$, kde a_0 atd. jsou koeficienty, které zatím neznáme. Jelikož platí $\sin x = \cos x \operatorname{tg} x$, platí také

$$x - \frac{x^3}{6} + \cdots = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right).$$

Roznásobením součinu vpravo a porovnáním jednotlivých mocnin zjistěte hodnoty neznámých koeficientů a_k. Tím dostanete začátek rozvoje tangenty.

L'Hospitalovo pravidlo

1 Řekněme, že mám dvě lineární funkce $a(x - x_0)$ a $b(x - x_0)$, které obě procházejí v bodě x_0 nulou. Načrtněte schematický obrázek nějakých dvou takových funkcí. Spočtěte $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a(x - x_0)}{b(x - x_0)}$.

2 Řekněme, že mám jakékoli dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, které mají v bodě x_0 derivaci a procházejí tam nulou. Použijte diferenciál k tomu, abyste v okolí x_0 nahradili $f(x)$ a $g(x)$ kousky úseček. Jaké jsou směrnice těchto úseček? Pomocí předchozí úlohy zjistěte, jak lze zapsat limitu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

3 Kdyby bylo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, předchozí přístup nebude přímo fungovat, ale můžeme to obejít. Pokud bychom měli zase počítat $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g} = L$, můžeme přepsat zlomek pod limitou jako $\frac{1/g}{1/f}$ a použít předchozí pravidlo. Udělejte to a ze získaného vztahu vyjádřete L.

4 Spočtěte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x}$ *bez pomoci* l'Hospitalova pravidla. Pak to zkuste s ním. Co dostanete? (Závěr: pokud po l'Hospitalovi limita neexistuje, znamená to, že se l'Hospital rozbil, ne že původní limita neexistuje.)

5 Vypočtěte následující limity (ne vždy jde l'Hospital použít hned):

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$; **2.** $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$; **3.** $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$; **4.** $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln x \ln(1 - x)$; **5.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

Věty o střední hodnotě

Začneme *Weierstrassovou větou*: Je-li funkce spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, znamená to, že na tomto intervalu nabývá minimální i maximální hodnoty a všech hodnot mezi nimi.

1 Dokažte, že v některém okamžiku Vašeho života jste měřili právě jeden metr (za předpokladu, že Vaše výška je spojitou funkcí času).

2 Když se narodil můj mladší bratr, byl o dost menší než já. Teď je ale vyšší než já. Dokažte, že v některém okamžiku jsme byli stejně vysocí. (**Nápověda:** zkuste použít Weierstrassovu větu na *rozdíl* našich výšek.)

3 Funkce $f(x)$ má v bodech a a b hodnotu 0 a všude mezi těmito body má spojitou derivaci.
1. Pomocí Weierstrassovy věty ukažte, že pokud je někde mezi body a a b derivace $f(x)$ kladná a někde jinde je záporná, pak musí na tomto intervalu být někde i nulová.
2. Vysvětlete, proč je nemožné, aby $f(x)$ měla všude v tomto intervalu kladnou derivaci (nebo všude zápornou). Využijte toho, že je $f(a) = f(b) = 0$.
3. Z toho vydedukujte, že někde mezi body a a b musí být $f'(x) = 0$. Tomu se říká *Rolleova věta*.
4. Nakreslete si obrázky pár takových funkcí a vyznačte body, kde je $f'(x) = 0$. Přesvědčte se, že Rolleova věta vlastně znamená, že v tomto případě existuje bod, kde je tečna k funkci rovnoběžná s přímkou spojující oba krajní body.

4 Běžec se cvičí v běhu na přímé dráze tak, že běží ze startu do cíle a pak zase zpátky. Dokažte, že pokud je jeho rychlost spojitá, musela být v nějakém okamžiku nulová.

5 Na obrázcích z bodu 3 se nic nezmění, když je různě posuneme a natočíme — vždycky bude někde existovat bod, v němž tečna k funkci bude rovnoběžná se spojnicí obou krajních bodů. Mějme tedy jakoukoli funkci $f(x)$ se spojitou derivací na intervalu $\langle a; b\rangle$ (na kraji nemusí být nulové hodnoty).
1. Něco od té funkce odečtěte tak, aby výsledek měl v bodě a nulovou hodnotu.
2. Odečtěte ještě nějakou lineární funkci tak, aby měl výsledek nulovou hodnotu taky v bodě b.
3. Na funkci, která vznikne tímto odčítáním, použijte Rolleovu větu. Dostanete *Lagrangeovu větu*.

6 Dokažte, že na rovníku jsou dva takové body přesně naproti sobě, v nichž je stejná teplota.

Hledání tečen

1 Asi víte, že $y = kx + c$ je rovnice přímky a že číslu x se říká *směrnice* této přímky. Napište, jak by vypadala rovnice přímky, která má směrnici k a prochází bodem $[x_0; y_0]$. (**Nápověda:** pokud ten bod leží na přímce, musí splnit rovnici. Vyjádřete z toho konstantu c.)

2 Mějme funkci $y(x) = x \sin x$.
1. Zjistěte hodnotu této funkce v bodě $x = \frac{\pi}{2}$. **2.** Zjistěte směrnici tečny $k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ v témže bodě.
3. Dosaďte tyto údaje do rovnice odvozené v předchozím bodě. Tím jste získali rovnici tečny k této funkci v bodě $\pi/2$.

3 Nalezněte rovnici tečny pro následující funkce:
1. $y = x^2 - x + 1$ v bodě $x = 1$; **2.** $y = \operatorname{arc\,tg} x$ v bodě $x = \sqrt{3}$; **3.** $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ v bodě $x = 1$.

4 Pod jakým úhlem se protínají následující křivky?
1. $y = \sin x$ a $y = \cos x$; **2.** $y = x^2$ a $x = y^2$.

5 Ukažte, že hyperboly $x^2 - y^2 = a$ a $xy = b$ tvoří *ortogonální síť*, tedy jakákoli hyperbola z první množiny protíná jakoukoli hyperbolu z druhé množiny pod pravým úhlem.