1 Dokažte „hyperbolickou jedničku“ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

2 Kružnici o poloměru R lze zadat rovnicí $x^2 + y^2 = R^2$, díky čemuž ji můžeme parametrisovat například takto: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$; to funguje díky vztahu $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

Podobným způsobem využijte vztah $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ k parametrisaci hyperboly $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Tím by mělo být vysvětleno, proč se těmto funkcím říká hyperbolické.

3 Vypočtěte derivace funkcí $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ a $\operatorname{th} x$ a vyjádřete je pomocí hyperbolických funkcí.

4 Vyšetřete průběh funkcí $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ a $\operatorname{th} x$ a načrtněte jejich grafy (vyjděte z definice).

5 Řešte rovnici $u = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Tím zjistíte, jak se dá spočítat x ze zadané hodnoty $u = \operatorname{sh} x$. Zapište explicitní vztah pro inversní funkci k $\operatorname{sh} x$, která se označuje (mezi jinými) $\operatorname{ar sh} x$. Stejně vyjádřete i $\operatorname{ar ch} x$ a $\operatorname{ar th} x$.

6 Derivujte vztah $\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh} x) = 1$ a položením $\operatorname{sh} x = y$ vyjádřete derivaci $\operatorname{ar sh} y$. Stejným způsobem nalezněte derivace $\operatorname{ar ch} x$ a $\operatorname{ar th} x$.

7 Ukažte, že platí následující vztahy mezi hyperbolickými a goniometrickými funkcemi:
1. $\sin ix = i \operatorname{sh} x$; **2.** $\operatorname{sh} ix = i \sin x$; **3.** $\cos ix = \operatorname{ch} x$; **4.** $\operatorname{ch} ix = \cos x$; **5.** Napište obdobné vztahy pro funkce $\operatorname{th} x$ a $\operatorname{tg} x$.

8 Díky vztahům z minulé úlohy můžete snadno přepsat už známé vzorce pro goniometrické funkce na jejich „hyperbolické“ verse:
1. Platí $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$; čemu se rovná $\operatorname{sh}(a+b)$? **2.** Platí $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; čemu se rovná $\operatorname{ch}^2 x$? **3.** Platí $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$; čemu se rovná $\operatorname{th} 2x$?

---

9 Rozložte v parciální zlomky:

1. $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$; **2.** $\frac{x+1}{(x^2-4)(x+3)}$; **3.** $\frac{x^2}{(x+2)^2(x-3)}$; **4.** $\frac{1}{(x^2-9)^2}$; **5.** $\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$;
6. $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$; **7.** $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$; **8.** $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$; **9.** $\frac{1}{x^3+1}$; **10.** $\frac{1}{x^4+1}$.
(**Nápověda:** $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$; $x^4+1 = \underbrace{x^4+1+2x^2}_{(x^2+1)^2} - 2x^2$; zkuste vztah pro rozdíl čtverců.)

10 Pokud je ve jmenovateli nerozložitelný trojčlen, metoda výše nebude fungovat. Zkuste najít nějaký způsob, jak ji spravit. (Jeden fajn způsob funguje jen v případě, že je tam ten trojčlen jen jeden.)

11 S násobnými kořeny je vždycky problém. Dobrý způsob, jak se jich zbavit, může být pomocí derivování. Řekněme např., že chceme rozložit $\frac{1}{(x-2)^2(x+1)}$. Udělejte to tak, že nejdřív rozložíte $\frac{1}{(x-a)(x+1)}$ (bez druhé mocniny). Obě strany rozkladu derivujte podle a a pak položte $a = 2$. Co vyjde? Zkuste tuhle metodu uplatnit i v příkladě 10.