**1** V Newtonově-Leibnizově formuli $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$ dosaďte:

**1.** $f(x) = \alpha g(x) + \beta h(x)$ ($\alpha$ a $\beta$ jsou konstanty) a dokažte tím linearitu integrálu;
**2.** $f(x) = g(x)h(x)$ a odvoďte pravidlo o integraci per partes;
**3.** $f(x) = g(u(x))$ a odvoďte pravidlo o substituci.

**2** Ke (skoro) každé funkci $f(x)$ se dá najít *primitivní funkce* $F(x)$, jejíž je $f(x)$ derivací. (Tedy: $F'(x) = f(x)$.) Zapište $F(x)$ pomocí určitého integrálu. Je dána jednoznačně? (Často píšeme $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a říkáme tomu *neurčitý integrál.*)

**3** Vypočtěte integrály s pomocí lineární substituce ($a$ je konstanta):

**1.** $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x+a}$; **2.** $\displaystyle\int_0^1 (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{2/5} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$; **4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$; **5.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{a/b}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-bx^2}}$ $(a > b > 0)$;

**4** Doplněním na čtverec vyčíslete: **1.** $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$; **2.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$; **3.** $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

**5** Ukažte, že pro libovolnou (dost slušnou) funkci $f$ platí $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|$. Pak díky tomu vypočtěte integrály: **1.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-4}$; **2.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2-1}{x^3-x+7}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2}$.

**6** Pomocí substitucí vypočtěte: **1.** Příklady od jiné skupinky. **2.** $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$; **5.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$; **6.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

**7** Protože už umíme rozklady v parciální zlomky a jednoduché substituce, můžeme (v principu) integrovat jakoukoli racionální lomenou funkci prostě tak, že integrand rozložíme v parciální zlomky. Každý ten zlomek se pak už integruje celkem snadno (aspoň většinou...) Zkuste si to:

**1.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x+7)}$; **2.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-9)^2}$; **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+9)}$; **4.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x+1)}$; **5.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

**P. S.:** Jde vesměs o zlomky, které jste rozkládali minule. (A pozor, jsou to neurčité integrály!)

**8** Integrujte per partes:

**1.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x$; **5.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

**Pozor!** V pátém bodě integrujete $\mathrm{e}^{-x}\sin x$. Po každém per partes se podívejte, jestli náhodou ten integrál, který z per partes vyšel, není taky z $\mathrm{e}^{-x}\sin x$, jinak se zacyklíte navěky.

**9** Pomocí integrace per partes dokažte následující vztahy ($n \geq 2$ je přirozené číslo):

**1.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$. Zapište explicitně výsledek $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ pro $n$ sudé a liché.

**2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} x}$. (**Nápověda:** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.)

**10** Pepíček se snažil integrovat, ale moc mu to nejde. V každém z výpočtů, které následují níže, se dopustil nějaké chyby. **Najděte v každém výpočtu chybu** a pak **spočítejte integrál správně**.

1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left|\left| u = x^2 \right|\right| = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx = \left(\int_0^{\pi/2} x^2 \, dx\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx\right) = \frac{\pi^3}{2^3 \cdot 3} \cdot 1 = \frac{\pi^3}{24}.$$

3.

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \left|\left| \begin{matrix} u &= 1/x \\ du &= \ln x \, dx \end{matrix} \right|\right| = \int u \, du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2x^2} + C.$$

4.

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\left| \begin{matrix} f = x & f' = 1 \\ g' = 1 - x^2 & g = x - \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right|\right| = x^2 - \frac{x^4}{3} - \int \left(x - \frac{x^3}{3}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C.$$

5.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \left|\left| \begin{matrix} f = \cos x & f' = \sin x \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{matrix} \right|\right| = [\sin x \cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx,$$

takže $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$ musí splňovat rovnici $I = -\frac{\pi}{2} + I$, a ta nemá řešení… takže ten integrál vůbec neexistuje???

6.

$$\int_0^1 x^2 \arcsin x \, dx = \left|\left| \begin{matrix} f = \arcsin x & f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g' = x^2 & g = x^3/3 \end{matrix} \right|\right| = \left[\frac{x^3}{3} \arcsin x\right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left|\left| \begin{matrix} f = x^3 & f' = \cdots \\ g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & g = \cdots \end{matrix} \right|\right| \cdots$$

7.

$$\int \cos^2 x \, dx = \left|\left| \begin{matrix} f = \cos x & f' = -\sin x \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{matrix} \right|\right| = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= \left|\left| \begin{matrix} f = \sin x & f' = \cos x \\ g' = \sin x & g = -\cos x \end{matrix} \right|\right| = \sin x \cos x - \sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx =$$

$$= \left|\left| \begin{matrix} f = \cos x & f' = -\sin x \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{matrix} \right|\right| = \sin x \cos x - \sin x \cos x + \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \cdots$$

… a jestli Pepíček neumřel, tak tak počítá dodnes.

# POZOR!!!
# VŠECHNY TYHLE VÝPOČTY JSOU BLBĚ! FAKT!!