

# 10. AFINNÍ PODPROSTORY A SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky  
Masarykova univerzita

7. prosince 2022

# Obsah

- 1 Afinní podprostory a soustavy lineárních rovnic
  - Podprostor řešení homogenní soustavy a jeho báze
  - Podprostor řešení nehomogenního systému
- 2 Parametrické a všeobecné rovnice afinních podprostorů
- 3 Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů
- Frobeniova věta a řešení nehomogenní soustavy

# Abstrakt

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

# Abstrakt

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru  $K^n$

# Abstrakt

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru  $K^n$

a obráceně, každý takový afinní (lineární) podprostor lze popsat jako množinu řešení vhodné lineární (homogenní) soustavy.

# Abstrakt

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru  $K^n$

a obráceně, každý takový afinní (lineární) podprostor lze popsat jako množinu řešení vhodné lineární (homogenní) soustavy.

V celé kapitole  $K$  označuje pevné těleso,  $V$  označuje nějaký pevný, ale jinak libovolný, vektorový prostor nad tělesem  $K$ ,  $m$ ,  $n$  jsou přirozená čísla.

# Obsah

- 1 Afinní podprostory a soustavy lineárních rovnic
  - Podprostor řešení homogenní soustavy a jeho báze
  - Podprostor řešení nehomogenního systému
  - Frobeniova věta a řešení nehomogenní soustavy
- 2 Parametrické a všeobecné rovnice afinních podprostorů
- 3 Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

# Podprostor řešení I

Nechť  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ . Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$



# Podprostor řešení I

Nechť  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ . Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí  $\mathbf{A}$  a pravou stranou  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

# Podprostor řešení I

Nechť  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ . Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí  $\mathbf{A}$  a pravou stranou  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

# Podprostor řešení I

Nechť  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ . Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí  $\mathbf{A}$  a pravou stranou  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

resp.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

# Podprostor řešení II

Předpisem  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  je definované lineární zobrazení  $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ , přičemž  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \text{Ker } \varphi$ .

# Podprostor řešení II

Předpisem  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  je definované lineární zobrazení  $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ , přičemž  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \text{Ker } \varphi$ .

Z toho okamžitě vyplývá

## Tvrzení 1.1

*Pro libovolnou matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  množina  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  řešení homogenní soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tvoří lineární podprostor vektorového prostoru  $K^n$ .*

# Podprostor řešení III

Každou bázi prostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

# Podprostor řešení III

Každou bázi prostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

# Podprostor řešení III

Každou bázi prostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.



# Podprostor řešení III

Každou bázi prostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.

Fundamentální systém řešení najdeme následujícím postupem:

# Podprostor řešení III

Každou bázi prostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.

Fundamentální systém řešení najdeme následujícím postupem:

Matici  $\mathbf{A}$  upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar  $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ .

# Podprostor řešení IV

Množinu  $\{1, \dots, n\}$  rozdělíme na dvě podmnožiny  $J$  a  $J'$ , podle toho, zda se v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{B}$  nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

## Podprostor řešení IV

Množinu  $\{1, \dots, n\}$  rozdělíme na dvě podmnožiny  $J$  a  $J'$ , podle toho, zda se v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{B}$  nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme  $k$  počet prvků množiny  $J'$  a zapišme ji ve tvaru  $J' = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$ .

## Podprostor řešení IV

Množinu  $\{1, \dots, n\}$  rozdělíme na dvě podmnožiny  $J$  a  $J'$ , podle toho, zda se v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{B}$  nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme  $k$  počet prvků množiny  $J'$  a zapišme ji ve tvaru  $J' = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$ .

Pro každý index  $j_l \in J'$  sestrojíme vektor  $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \dots, v_{nl})^T \in K^n$  takto:

## Podprostor řešení IV

Množinu  $\{1, \dots, n\}$  rozdělíme na dvě podmnožiny  $J$  a  $J'$ , podle toho, zda se v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{B}$  nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme  $k$  počet prvků množiny  $J'$  a zapišme ji ve tvaru  $J' = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$ .

Pro každý index  $j_l \in J'$  sestrojíme vektor  $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \dots, v_{nl})^T \in K^n$  takto:

Zvolíme  $v_{j_l l} = 1$  a  $v_{j_i l} = 0$  pro  $i \neq l$ .

## Podprostor řešení IV

Množinu  $\{1, \dots, n\}$  rozdělíme na dvě podmnožiny  $J$  a  $J'$ , podle toho, zda se v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{B}$  nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme  $k$  počet prvků množiny  $J'$  a zapišme ji ve tvaru  $J' = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$ .

Pro každý index  $j_l \in J'$  sestrojíme vektor  $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \dots, v_{nl})^T \in K^n$  takto:

Zvolíme  $v_{j_l l} = 1$  a  $v_{j_i l} = 0$  pro  $i \neq l$ .

Pro  $j \in J$  vypočítáme hodnoty  $v_{jl}$  k uvedeným hodnotám parametrů  $v_{j_1 l}, \dots, v_{j_k l}$  tak, aby celý vektor  $\mathbf{v}_l$  vyhovoval podmínce  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$ .

## Podprostor řešení IV

Množinu  $\{1, \dots, n\}$  rozdělíme na dvě podmnožiny  $J$  a  $J'$ , podle toho, zda se v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{B}$  nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme  $k$  počet prvků množiny  $J'$  a zapišme ji ve tvaru  $J' = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$ .

Pro každý index  $j_l \in J'$  sestrojíme vektor  $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \dots, v_{nl})^T \in K^n$  takto:

Zvolíme  $v_{j_l l} = 1$  a  $v_{j_i l} = 0$  pro  $i \neq l$ .

Pro  $j \in J$  vypočítáme hodnoty  $v_{jl}$  k uvedeným hodnotám parametrů  $v_{j_1 l}, \dots, v_{j_k l}$  tak, aby celý vektor  $\mathbf{v}_l$  vyhovoval podmínce  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$ .

Potom vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  tvoří bázi podprostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ . Přitom zřejmě platí  $k = n - h(\mathbf{A})$ .



# Podprostor řešení V

## Příklad 1.2

*Předpokládejme, že jsme matici **A** pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 3 a 4.*

# Podprostor řešení V

## Příklad 1.2

*Předpokládejme, že jsme matici  $\mathbf{A}$  pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 3 a 4.*

*Tedy neznámé  $x_2$  a  $x_5$  si zvolíme za parametry a neznámé  $x_1$ ,  $x_3$  a  $x_4$  si vyjádříme s jejich pomocí.*

# Podprostor řešení VI

## Příklad 1.2 (Pokračování)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Naše první volba je  $x_2 = 1$ ,  $x_5 = 0$ . Tomu odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$ .*

# Podprostor řešení VI

## Příklad 1.2 (Pokračování)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Naše první volba je  $x_2 = 1$ ,  $x_5 = 0$ . Tomu odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$ .*

*Druhá volba parametrů je  $x_2 = 0$ ,  $x_5 = 1$ . Tomu odpovídá vektor  $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$ .*

# Podprostor řešení VI

## Příklad 1.2 (Pokračování)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Naše první volba je  $x_2 = 1$ ,  $x_5 = 0$ . Tomu odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$ .*

*Druhá volba parametrů je  $x_2 = 0$ ,  $x_5 = 1$ . Tomu odpovídá vektor  $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$ .*

*Potom vektory  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  tvoří bázi podprostoru (fundamentální systém) řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^5$ .*

# Podprostor řešení VII

## Tvrzení 1.3

*Pro libovolnou matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  platí*

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

# Podprostor řešení NS I

## Tvrzení 1.4

*Necht'  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .*

# Podprostor řešení NS I

## Tvrzení 1.4

*Necht'  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .*

*(a) Pokud  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ , pak  $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ .*



# Podprostor řešení NS I

## Tvrzení 1.4

Necht'  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .

(a) Pokud  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ , pak  $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ .

(b) Pokud  $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ , pak  $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ .

# Podprostor řešení NS I

## Tvrzení 1.4

Necht'  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .

(a) Pokud  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ , pak  $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ .

(b) Pokud  $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ , pak  $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) &= \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z} + \mathbf{x}; \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})\} \\ &= \mathbf{z} + [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \\ &= \{\mathbf{z} + c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k; c_1, \dots, c_k \in K\}.\end{aligned}$$

# Podprostor řešení NS II

## Tvrzení 1.5

*Nechť  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .*

# Podprostor řešení NS II

## Tvrzení 1.5

*Nechť  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .*

*Pokud soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má aspoň jedno řešení, tak  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  je afinní podprostor v  $K^n$  se zaměřením  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ .*

# Podprostor řešení NS II

## Tvrzení 1.5

Nechť  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .

Pokud soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má aspoň jedno řešení, tak  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  je afinní podprostor v  $K^n$  se zaměřením  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ .

To znamená, že

$$\text{Dir}\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$$

a

$$\dim\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \dim\mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

# Frobeniova věta I

## Věta 1.6

**(Frobenius)** Necht'  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .

Potom nehomogenní soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má řešení právě tehdy, když  $h(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = h(\mathbf{A})$ .

# Frobeniova věta I

## Věta 1.6

**(Frobenius)** Necht'  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .

Potom nehomogenní soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má řešení právě tehdy, když  $h(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = h(\mathbf{A})$ .

Soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má alespoň jedno řešení  $\mathbf{z} \in K^n$  právě tehdy, když  $\mathbf{b} \in \text{Im}\varphi$  (kde  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ). Pak

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A}).$$

# Frobeniova věta I

## Věta 1.6

**(Frobenius)** Necht'  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .

Potom nehomogenní soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má řešení právě tehdy, když  $h(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = h(\mathbf{A})$ .

Soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má alespoň jedno řešení  $\mathbf{z} \in K^n$  právě tehdy, když  $\mathbf{b} \in \text{Im} \varphi$  (kde  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ). Pak

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A}).$$

*Frobeniova věta říká:* nehomogenní soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  nemá řešení právě tehdy, když se při úpravě její rozšířené matice  $(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  na redukovaný stupňovitý tvar objeví nějaký řádek tvaru  $(0, \dots, 0 | d) \in K^{n+1}$ , kde  $0 \neq d \in K$ . Takovýto řádek totiž zodpovídá rovnici  $0 = d$ .



# Frobeniova věta II

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  na redukovaný stupňovitý tvar  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ , kde  $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$  a  $\mathbf{c} \in K^m$ , tak  $\mathbf{B}$  je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

# Frobeniova věta II

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  na redukovaný stupňovitý tvar  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ , kde  $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$  a  $\mathbf{c} \in K^m$ , tak  $\mathbf{B}$  je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom  $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$  právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$  nenachází v posledním, t. j.  $n + 1$ -ním sloupci.

## Frobeniova věta II

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  na redukovaný stupňovitý tvar  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ , kde  $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$  a  $\mathbf{c} \in K^m$ , tak  $\mathbf{B}$  je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom  $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$  právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$  nenachází v posledním, t. j.  $n + 1$ -ním sloupci.

Bázi prostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$  najdeme dříve popsáním postupem.

## Frobeniova věta II

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici  $(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  na redukovaný stupňovitý tvar  $(\mathbf{B} | \mathbf{c})$ , kde  $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$  a  $\mathbf{c} \in K^m$ , tak  $\mathbf{B}$  je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} | \mathbf{c}) \neq \emptyset$  právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice  $(\mathbf{B} | \mathbf{c})$  nenachází v posledním, t. j.  $n + 1$ -ním sloupci.

Bázi prostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$  najdeme dříve popsáním postupem.

Nech  $J$ ,  $J'$  a  $k$  mají dříve uvedený význam.

## Frobeniova věta II

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici  $(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  na redukovaný stupňovitý tvar  $(\mathbf{B} | \mathbf{c})$ , kde  $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$  a  $\mathbf{c} \in K^m$ , tak  $\mathbf{B}$  je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} | \mathbf{c}) \neq \emptyset$  právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice  $(\mathbf{B} | \mathbf{c})$  nenachází v posledním, t. j.  $n + 1$ -ním sloupci.

Bázi prostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$  najdeme dříve popsáním postupem.

Nech  $J$ ,  $J'$  a  $k$  mají dříve uvedený význam.

Jedno řešení  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$  nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů  $z_{j_1} = \dots = z_{j_k} = 0$  pro  $j_l \in J'$ .

## Frobeniova věta II

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  na redukovaný stupňovitý tvar  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ , kde  $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$  a  $\mathbf{c} \in K^m$ , tak  $\mathbf{B}$  je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom  $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$  právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$  nenachází v posledním, t. j.  $n + 1$ -ním sloupci.

Bázi prostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$  najdeme dříve popsáním postupem.

Nech  $J$ ,  $J'$  a  $k$  mají dříve uvedený význam.

Jedno řešení  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$  nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů  $z_{j_1} = \dots = z_{j_k} = 0$  pro  $j_l \in J'$ .

Zbývající hodnoty  $z_j$  potom vypočítáme tak, aby  $\mathbf{z}$  vyhovovalo podmínce  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{c}$ , t. j.  $z_j = c_j$  pro  $j \in J$ .

## Frobeniova věta III

## Příklad 1.7

*Předpokládejme, že jsme matici  $(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$(\mathbf{B} | \mathbf{c}) = \left( \begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

## Frobeniova věta III

## Příklad 1.7

*Předpokládejme, že jsme matici  $(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$(\mathbf{B} | \mathbf{c}) = \left( \begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

*Vidíme, že  $h(\mathbf{B} | \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$ , tedy  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} | \mathbf{c}) \neq \emptyset$ .*



## Frobeniova věta III

## Příklad 1.7

*Předpokládejme, že jsme matici  $(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$(\mathbf{B} | \mathbf{c}) = \left( \begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

*Vidíme, že  $h(\mathbf{B} | \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$ , tedy  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} | \mathbf{c}) \neq \emptyset$ .*

*Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.*

## Frobeniova věta III

## Příklad 1.7

*Předpokládejme, že jsme matici  $(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$(\mathbf{B} | \mathbf{c}) = \left( \begin{array}{cccccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

*Vidíme, že  $h(\mathbf{B} | \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$ , tedy  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} | \mathbf{c}) \neq \emptyset$ .*

*Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.*

*Tedy neznámé  $x_4$ ,  $x_5$  a  $x_6$  si zvolíme za parametry a neznámé  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  si vyjádříme pomocí nich.*

# Frobeniova věta IV

První volbě  $x_4 = 1, x_5 = x_6 = 0$  odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$ .

# Frobeniova věta IV

První volbě  $x_4 = 1, x_5 = x_6 = 0$  odpovídá vektor  
 $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$ .

Druhá volba  $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$  nám dá vektor  
 $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$ .

# Frobeniova věta IV

První volbě  $x_4 = 1, x_5 = x_6 = 0$  odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$ .

Druhá volba  $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$  nám dá vektor  $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$ .

Třetí volbou  $x_4 = x_5 = 0, x_6 = 1$  získáme vektor  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$ .

# Frobeniova věta IV

První volbě  $x_4 = 1, x_5 = x_6 = 0$  odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$ .

Druhá volba  $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$  nám dá vektor  $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$ .

Třetí volbou  $x_4 = x_5 = 0, x_6 = 1$  získáme vektor  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$ .

Potom vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  tvoří bázi podprostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$  příslušné homogenní soustavy.

# Frobeniova věta IV

První volbě  $x_4 = 1, x_5 = x_6 = 0$  odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$ .

Druhá volba  $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$  nám dá vektor  $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$ .

Třetí volbou  $x_4 = x_5 = 0, x_6 = 1$  získáme vektor  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$ .

Potom vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  tvoří bázi podprostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$  příslušné homogenní soustavy.

Konečně volbou parametrů  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$  získáme jedno řešení  $\mathbf{z} = (2, -1, -2/7, 0, 0, 0)^T$  nehomogenní soustavy.

# Frobeniova věta V

Výsledek můžeme zapsat do tabulky:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{z}$
$x_1$	-3	-1/4	0	2
$x_2$	-4	-2	1	-1
$x_3$	-1	5	-6	-2/7
$x_4$	1	0	0	0
$x_5$	0	1	0	0
$x_6$	0	0	1	0



# Obsah

- 1 Afinní podprostory a soustavy lineárních rovnic
  - Parametrické rovnice afinních podprostorů
  - Všeobecné rovnice afinních podprostorů
- 2 Parametrické a všeobecné rovnice afinních podprostorů
- 3 Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

# Parametrické a všeobecné rovnice I

Každý afinní podprostor  $M \subseteq K^n$  má tvar

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$$

pro nějaký bod  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T \in M$  a vhodnou uspořádanou  $k$ -tici  $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  vektorů z  $K^n$ , kde  $\mathbf{u}_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})^T$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice I

Každý afinní podprostor  $M \subseteq K^n$  má tvar

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = \mathbf{p} + [\alpha]$$

pro nějaký bod  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T \in M$  a vhodnou uspořádanou  $k$ -tici  $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  vektorů z  $K^n$ , kde  $\mathbf{u}_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})^T$ .

To znamená, že pro libovolné  $\mathbf{x} \in K^n$  platí  $\mathbf{x} \in M$  právě tehdy, když existuje  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)^T \in K^k$  tak, že

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t},$$

kde jsme uspořádanou  $k$ -tici  $\alpha$  jako obyčejně ztotožnili s maticí  $(u_{ij}) \in K^{n \times k}$  se sloupci  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice II

Rovnost  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$  je maticovým zápisem **parametrických rovnic** afinního podprostoru  $M \subseteq K^n$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice II

Rovnost  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$  je maticovým zápisem **parametrických rovnic** afinního podprostoru  $M \subseteq K^n$ .

Vektor  $\mathbf{t} \in K^n$  nazýváme **vektorem parametru** a jeho složky  $t_1, \dots, t_k \in K$  **parametry**.

# Parametrické a všeobecné rovnice II

Rovnost  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$  je maticovým zápisem **parametrických rovnic** afinního podprostoru  $M \subseteq K^n$ .

Vektor  $\mathbf{t} \in K^n$  nazýváme **vektorem parametrů** a jeho složky  $t_1, \dots, t_k \in K$  **parametry**.

Po rozepsání do složek

$$x_1 = p_1 + u_{11}t_1 + u_{12}t_2 + \dots + u_{1k}t_k$$

$$x_2 = p_2 + u_{21}t_1 + u_{22}t_2 + \dots + u_{2k}t_k$$

$$x_n = p_n + u_{n1}t_1 + u_{n2}t_2 + \dots + u_{nk}t_k$$

dostaneme obvyklejší tvar, se kterým jsme se v dimenzi  $n = 2$  resp.  $n = 3$  už potkali v středoškolské analytické geometrii.

# Parametrické a všeobecné rovnice III

Jsou-li navíc vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  lineárně nezávislé, což můžeme vždy dosáhnout vynecháním "nadbytečných vektorů", pak parametrické rovnice podprostoru  $M$  nám přímo ukáží jeho dimenzi:  $\dim M = k$ .

## Parametrické a všeobecné rovnice III

Jsou-li navíc vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  lineárně nezávislé, což můžeme vždy dosáhnout vynecháním "nadbytečných vektorů", pak parametrické rovnice podprostoru  $M$  nám přímo ukáží jeho dimenzi:  $\dim M = k$ .

Zápis afinního podprostoru  $M \subseteq K^n$  ve tvaru  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ , kde  $\mathbf{p} \in M$  a  $\alpha$  je nějaká uspořádaná  $k$ -tice, která generuje jeho zaměření  $\text{Dir}M$  (můžeme si dovolit předpokládat, že  $\alpha$  je dokonce báze v  $\text{Dir}M$ ), budeme nazývat jeho **parametrickým vyjádřením**.



## Parametrické a všeobecné rovnice III

Jsou-li navíc vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  lineárně nezávislé, což můžeme vždy dosáhnout vynecháním "nadbytečných vektorů", pak parametrické rovnice podprostoru  $M$  nám přímo ukáží jeho dimenzi:  $\dim M = k$ .

Zápis afinního podprostoru  $M \subseteq K^n$  ve tvaru  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ , kde  $\mathbf{p} \in M$  a  $\alpha$  je nějaká uspořádaná  $k$ -tice, která generuje jeho zaměření  $\text{Dir}M$  (můžeme si dovolit předpokládat, že  $\alpha$  je dokonce báze v  $\text{Dir}M$ ), budeme nazývat jeho **parametrickým vyjádřením**.

Parametrické vyjádření  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$  afinního podprostoru můžeme přímo přepsat do jeho parametrických rovnic  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ , ( $\mathbf{t} \in K^k$ ). Naopak, z jeho parametrických rovnic můžeme okamžitě získat jeho parametrické vyjádření.

# Parametrické a všeobecné rovnice IV

Každá soustava lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  s rozšířenou maticí  $(\mathbf{A} | \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$  (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) \subseteq K^n$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice IV

Každá soustava lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  s rozšířenou maticí  $(\mathbf{A} | \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$  (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) \subseteq K^n$ .

Vyřešit soustavu lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  znamená vlastně najít nějaké pěkné parametrické rovnice afinního podprostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice IV

Každá soustava lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  s rozšířenou maticí  $(\mathbf{A} | \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$  (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) \subseteq K^n$ .

Vyřešit soustavu lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  znamená vlastně najít nějaké pěkné parametrické rovnice afinního podprostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$ .

Nechť tedy  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$  je afinní podprostor v  $K^n$ , daný bodem  $\mathbf{p} \in K^n$  a uspořádanou  $k$ -ticí  $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  vektorů z  $K^n$ , kterou ztotožníme s maticí  $\alpha = (u_{ij}) \in K^{n \times k}$  se sloupci  $\mathbf{u}_j$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice V

Parametrické rovnice  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$  podprostoru  $M$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$  je vektor neznámých a  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)^T \in K^k$  je vektor parametrů, můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p},$$

který lze reprezentovat pomocí blokové matice

$$(\mathbf{I}_n \mid \alpha \mid \mathbf{p}).$$

# Parametrické a všeobecné rovnice V

Parametrické rovnice  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$  podprostoru  $M$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$  je vektor neznámých a  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)^T \in K^k$  je vektor parametrů, můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p},$$

který lze reprezentovat pomocí blokové matice

$$(\mathbf{I}_n \mid \alpha \mid \mathbf{p}).$$

Naše metoda bude založená na **eliminaci parametrů**  $t_1, \dots, t_k$  úpravou této matice pomocí ERO.

# Parametrické a všeobecné rovnice V

Parametrické rovnice  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$  podprostoru  $M$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$  je vektor neznámých a  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)^T \in K^k$  je vektor parametrů, můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p},$$

který lze reprezentovat pomocí blokové matice

$$(\mathbf{I}_n \mid \alpha \mid \mathbf{p}).$$

Naše metoda bude založená na **eliminaci parametrů**  $t_1, \dots, t_k$  úpravou této matice pomocí ERO.

Matici  $(\mathbf{I}_n \mid \alpha \mid \mathbf{p})$  budeme upravovat na řádkově ekvivalentní matici tak, aby prostřední blok ve výsledné matici byl ve stupňovitém tvaru.

# Parametrické a všeobecné rovnice VI

Mohou pak nastat dvě možnosti:

- (1)  $h(\alpha) = n$ , což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové.



# Parametrické a všeobecné rovnice VI

Mohou pak nastat dvě možnosti:

- (1)  $h(\alpha) = n$ , což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové.

V tomto případě  $M = V$  a všeobecné rovnice tohoto podprostoru tvoří prázdná soustava (t. j. soustava, která neobsahuje žádnou rovnici).

# Parametrické a všeobecné rovnice VII

- (2)  $h(\alpha) < n$ . Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků  $\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ , kde horní blok  $\mathbf{D}$  je stupňovitá matice typu  $h(\alpha) \times k$ , která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr  $(n - h(\alpha)) \times k$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice VII

- (2)  $h(\alpha) < n$ . Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků  $\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ , kde horní blok  $\mathbf{D}$  je stupňovitá matice typu  $h(\alpha) \times k$ , která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr  $(n - h(\alpha)) \times k$ .

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

# Parametrické a všeobecné rovnice VII

- (2)  $h(\alpha) < n$ . Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků  $\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ , kde horní blok  $\mathbf{D}$  je stupňovitá matice typu  $h(\alpha) \times k$ , která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr  $(n - h(\alpha)) \times k$ .

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right).$$

# Parametrické a všeobecné rovnice VII

- (2)  $h(\alpha) < n$ . Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků  $\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ , kde horní blok  $\mathbf{D}$  je stupňovitá matice typu  $h(\alpha) \times k$ , která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr  $(n - h(\alpha)) \times k$ .

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right).$$

Potom  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  jsou všeobecné rovnice afinního podprostoru  $M$ , t. j. platí  $M = \mathbf{p} + [\alpha] = \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice VIII

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \mid \boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right),$$

# Parametrické a všeobecné rovnice VIII

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \mid \boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right),$$

kde  $\mathbf{D}$  je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky (jejichž počet je tedy nutně  $h(\mathbf{D}) = h(\boldsymbol{\alpha})$ ).

# Parametrické a všeobecné rovnice VIII

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \mid \boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right),$$

kde  $\mathbf{D}$  je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky (jejichž počet je tedy nutně  $h(\mathbf{D}) = h(\boldsymbol{\alpha})$ ).

Z  $k$ -tice  $\boldsymbol{\alpha}$  můžeme vybrat bázi zaměření  $\text{Dir}M = [\boldsymbol{\alpha}]$ :  
je tvořená vektory  $\mathbf{u}_{j_1}, \dots, \mathbf{u}_{j_l}$ , kde  $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$  jsou  
indexy těch sloupců matice  $\mathbf{D}$ , ve kterých se nacházejí vedoucí  
prvky jejich řádků.



# Parametrické a všeobecné rovnice IX

## Tvrzení 2.1

Nechť  $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{n \times k}$  a  $\mathbf{p} \in K^n$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice IX

## Tvrzení 2.1

Nechť  $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{n \times k}$  a  $\mathbf{p} \in K^n$ .

Pokud bloková matice  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{p})$  je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right).$$

# Parametrické a všeobecné rovnice IX

## Tvrzení 2.1

Nechť  $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in K^{n \times k}$  a  $\mathbf{p} \in K^n$ .

Pokud bloková matice  $(\mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{p})$  je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right).$$

kde  $\mathbf{D}$  je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky, tak

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \{ \mathbf{x} \in K^m; (\exists \mathbf{t} \in K^k)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p}) \}.$$

# Obsah

- 1 Afinní podprostory a soustavy lineárních rovnic
- 2 Parametrické a všeobecné rovnice afinních podprostorů
- 3 Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

## Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

Uvažujme tři možnosti zadání původních podprostorů:

- (1) Oba podprostory jsou zadané všeobecnými rovnicemi.

## Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

Uvažujme tři možnosti zadání původních podprostorů:

- (1) Oba podprostory jsou zadané všeobecnými rovnicemi.
- (2) Oba podprostory jsou zadané parametricky.

## Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

Uvažujme tři možnosti zadání původních podprostorů:

- (1) Oba podprostory jsou zadané všeobecnými rovnicemi.
- (2) Oba podprostory jsou zadané parametricky.
- (3) Jeden podprostor je zadán pomocí všeobecných rovnic a druhý parametricky.

(1) Necht' afinní podprostory  $M, N \subseteq K^n$  mají všeobecné rovnice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  resp.  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$ , kde  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ ,  $\mathbf{B} \in K^{l \times n}$ ,  $\mathbf{c} \in K^l$ . Potom všeobecnými rovnicemi průniku  $M \cap N$  je soustava

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

s rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{B} & \mathbf{c} \end{array} \right).$$



Parametrické vyjádření průniku  $M \cap N$  můžeme získat vyřešením této soustavy.

Parametrické vyjádření průniku  $M \cap N$  můžeme získat vyřešením této soustavy.

Parametrické vyjádření podprostoru  $M \sqcup N$  můžeme získat tak, že nejprve najdeme parametrická vyjádření podprostorů  $M$  a  $N$  a použijeme úvahy z předchozí kapitoly. Následně pak můžeme odvodit všeobecné rovnice podprostoru  $M \sqcup N$ .

### Příklad 3.1

*Afinní podprostory  $M, N$  vektorového prostoru  $\mathbf{Q}^4$  jsou dané soustavami*

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3$$

*resp.*

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 6$$

Upravme rozšířené matice původních soustav:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 & 6 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2/3 & -1/3 & -1 \end{array} \right).$$

Z upravených matic okamžitě dostáváme parametrické vyjádření původních podprostorů (matice v hranatých závorkách označuje lineární podprostor generovaný jejími sloupci)

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pokud napíšeme obě upravené rozšířené matice všeobecných rovnic podprostorů  $M$  a  $N$  do bloků pod sebe, dostaneme rozšířenou matici všeobecných rovnic podprostoru  $M \cap N$ .

Pokud napíšeme obě upravené rozšířené matice všeobecných rovnic podprostorů  $M$  a  $N$  do bloků pod sebe, dostaneme rozšířenou matici všeobecných rovnic podprostoru  $M \cap N$ .

Její úpravou na stupňovitý tvar vyjde

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \textcircled{5} & -4 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Odtud už přímo vyplývá parametrické vyjádření

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$



Odtud už přímo vyplývá parametrické vyjádření

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zjistili jsme, že dvojrozměrné afinní podprostory  $M$ ,  $N$  mají jednorozměrný průnik, tedy jsou **různoběžné**. Proto též  $\dim(M \sqcup N) = 2 + 2 - 1 = 3$ .

Dáme-li vedle sebe generátory směrových podprostorů  $\text{Dir}M$  a  $\text{Dir}N$ , úpravou příslušné matice zjistíme, že první tři jsou lineárně nezávislé a poslední z nich je lineární kombinací předcházejících.

Dáme-li vedle sebe generátory směrových podprostorů  $\text{Dir}M$  a  $\text{Dir}N$ , úpravou příslušné matice zjistíme, že první tři jsou lineárně nezávislé a poslední z nich je lineární kombinací předcházejících.

Tedy sloupce matice

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi zaměření afinního podprostoru  $M \sqcup N$ .

Jeho parametrické vyjádření je

$$M \sqcup N = \mathbf{p} + [\beta],$$

kde  $\mathbf{p} = (3, 2, 5, -1)^T$ .

Jeho parametrické vyjádření je

$$M \sqcup N = \mathbf{p} + [\beta],$$

kde  $\mathbf{p} = (3, 2, 5, -1)^T$ .

Úpravou blokové matice  $(\mathbf{I}_4 \mid \beta \mid \mathbf{p})$  podle našeho algoritmu, výměnou prvního a posledního řádku dostaneme všeobecné rovnice podprostoru  $M \sqcup N$ :

$$x_1 = 3.$$

(2) Necht'  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ ,  $N = \mathbf{q} + [\beta]$  jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v  $K^n$ .

(2) Necht'  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ ,  $N = \mathbf{q} + [\beta]$  jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v  $K^n$ .

Potom  $M \sqcup N = \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta]$  a vynecháním vhodných sloupců z blokové matice  $(\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta)$  můžeme dostat bázi zaměření  $\text{Dir}(M \sqcup N)$ .

(2) Necht'  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ ,  $N = \mathbf{q} + [\beta]$  jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v  $K^n$ .

Potom  $M \sqcup N = \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta]$  a vynecháním vhodných sloupců z blokové matice  $(\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta)$  můžeme dostat bázi zaměření  $\text{Dir}(M \sqcup N)$ .

Všeobecné rovnice podprostoru  $M \sqcup N$  dostaneme úpravou blokové matice  $(\mathbf{I}_n \mid \mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta \mid \mathbf{p})$ , případně matice, v které je prostřední blok nahrazený bází zaměření  $\text{Dir}(M \sqcup N)$  podle našeho algoritmu.



Všeobecné rovnice průniku  $M \cap N$ , získáme tak, že parametrické rovnice každého z podprostorů  $M$ ,  $N$  převedeme na všeobecné rovnice a ty pak spojíme dohromady.

Všeobecné rovnice průniku  $M \cap N$ , získáme tak, že parametrické rovnice každého z podprostorů  $M$ ,  $N$  převedeme na všeobecné rovnice a ty pak spojíme dohromady.

Parametrické vyjádření průniku  $M \cap N$  dostaneme vyřešením jeho všeobecných rovnic.

Jiná cesta k parametrickým rovnicím průniku  $M \cap N$ : lze při ní jako vedlejší produkt získat báze zaměření  $\text{Dir}M$ ,  $\text{Dir}N$ ,  $\text{Dir}(M \sqcup N)$ , tedy i parametrické rovnice spojení  $M \sqcup N$ .

Jiná cesta k parametrickým rovnicím průniku  $M \cap N$ : lze při ní jako vedlejší produkt získat báze zaměření  $\text{Dir}M$ ,  $\text{Dir}N$ ,  $\text{Dir}(M \sqcup N)$ , tedy i parametrické rovnice spojení  $M \sqcup N$ .

Metoda: blokovou matici  $(\alpha \mid \beta \mid \mathbf{q} - \mathbf{p})$  upravujeme pomocí ERO na stupňovitý tvar

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' & \mathbf{c}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{c} \end{array} \right),$$

kde matice  $\mathbf{A}'$  má všechny řádky nenulové (tedy lineárně nezávislé a jejich počet je  $h(\mathbf{A}') = h(\alpha) = \dim M$ ).

Průnik  $M \cap N$  je tvořený všemi  $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t} \in N$ , které patří zároveň do  $M$ , t.j. existuje vektor parametrů  $\mathbf{s}$  tak, že  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{s}$ . Hledáme tedy všechny vektory parametrů  $\mathbf{t}$ , ke kterým existuje nějaký vektor parametrů  $\mathbf{s}$  tak, že platí

$$\alpha \cdot \mathbf{s} = \beta \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

K danému  $\mathbf{t}$  existuje takovéto  $\mathbf{s}$  právě tehdy, když  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$ .

K danému  $\mathbf{t}$  existuje takovéto  $\mathbf{s}$  právě tehdy, když  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$ .  
Vyřešením této soustavy dostaneme parametrické vyjádření

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z},$$

které dosadíme do parametrických rovnic podprostoru  $N$ .

K danému  $\mathbf{t}$  existuje takovéto  $\mathbf{s}$  právě tehdy, když  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$ .  
Vyřešením této soustavy dostaneme parametrické vyjádření

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z},$$

kteří dosadíme do parametrických rovnic podprostoru  $N$ .  
Dostaneme tak parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \beta \cdot (\mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{r}) + (\beta \cdot \gamma) \cdot \mathbf{z}$$

podprostoru  $M \cap N$ .



## Příklad 3.2

*Necht'*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

*jsou afinní podprostory v  $\mathbf{R}^4$ .*

Zřejmě  $\text{Dir}N_1 = \text{Dir}N_2$ ; označme tento lineární podprostor  $D$ .  
Obě úlohy o dvojicích podprostorů  $M, N_1$  i  $M, N_2$  budeme řešit  
současně.

Zřejmě  $\text{Dir}N_1 = \text{Dir}N_2$ ; označme tento lineární podprostor  $D$ .  
Obě úlohy o dvojicích podprostorů  $M, N_1$  i  $M, N_2$  budeme řešit  
současně.

Platí

$$\left( \begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 11 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice  $0 = 0$  z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice  $0 = 0$  z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Lineární podprostor  $\text{Dir}M \cap D$  je tvořený právě všemi lineárními kombinacemi  $\beta \cdot \mathbf{t}$ , kde  $\beta$  je matice generátorů  $D$  (a jeho báze) a  $\mathbf{t}$  vyhovuje uvedené homogenní rovnici.

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice  $0 = 0$  z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Lineární podprostor  $\text{Dir}M \cap D$  je tvořený právě všemi lineárními kombinacemi  $\beta \cdot \mathbf{t}$ , kde  $\beta$  je matice generátorů  $D$  (a jeho báze) a  $\mathbf{t}$  vyhovuje uvedené homogenní rovnici.

Tedy  $\dim(\text{Dir}M \cap D) = \dim \text{Dir}M = 2$ . Proto  $\text{Dir}M \subseteq D$  a platí  $M \parallel N_1$  a  $M \parallel N_2$ .

Soustava

$$\begin{aligned}4t_1 - 2t_2 + 6t_3 &= 2 \\ 0 &= 1,\end{aligned}$$

které musí vyhovovat vektor parametrů  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ , aby jím určený bod z  $N_1$  patřil i do  $M$ , nemá řešení.

Soustava

$$\begin{aligned}4t_1 - 2t_2 + 6t_3 &= 2 \\ 0 &= 1,\end{aligned}$$

které musí vyhovovat vektor parametrů  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ , aby jím určený bod z  $N_1$  patřil i do  $M$ , nemá řešení.

Proto  $M \cap N_1 = \emptyset$  a  $M, N_1$  jsou *pravé rovnobežky*.



Naopak, analogická soustava pro dvojici  $M, N_2$  vede na jedinou, očividně řešitelnou rovnici

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 1.$$

Naopak, analogická soustava pro dvojici  $M, N_2$  vede na jedinou, očividně řešitelnou rovnici

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 1.$$

Tedy  $M \subseteq N_2$ .

(3) Necht' afinní podprostor  $M \subseteq K^n$  je daný všeobecnými rovnicemi  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  a afinní podprostor  $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$  je daný parametricky.

(3) Necht' afinní podprostor  $M \subseteq K^n$  je daný všeobecnými rovnicemi  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  a afinní podprostor  $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$  je daný parametricky.

Pokud hledáme všeobecné rovnice průniku  $M \cap N$ , stačí najít všeobecné rovnice podprostoru  $N$  a přidat je k soustavě  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

(3) Necht' afinní podprostor  $M \subseteq K^n$  je daný všeobecnými rovnicemi  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  a afinní podprostor  $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$  je daný parametricky.

Pokud hledáme všeobecné rovnice průniku  $M \cap N$ , stačí najít všeobecné rovnice podprostoru  $N$  a přidat je k soustavě  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Jejich vyřešením potom můžeme obdržet i parametrické vyjádření  $M \cap N$ .

Pokud hledáme popis spojení  $M \sqcup N$ , nejvýhodnější je vyřešit všeobecné rovnice podprostoru  $M$  a z parametrických vyjádření obou podprostorů  $M, N$  sestavit parametrické vyjádření  $M \sqcup N$ .

Pokud hledáme popis spojení  $M \sqcup N$ , nejvýhodnější je vyřešit všeobecné rovnice podprostoru  $M$  a z parametrických vyjádření obou podprostorů  $M, N$  sestavit parametrické vyjádření  $M \sqcup N$ .

Eliminací parametrů dostaneme všeobecné rovnice podprostoru  $M \sqcup N$ .

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku  $M \cap N$  spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru  $N$  do všeobecných rovnic podprostoru  $M$ .



Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku  $M \cap N$  spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru  $N$  do všeobecných rovnic podprostoru  $M$ .

Tím dostaneme soustavu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{b},$$

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku  $M \cap N$  spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru  $N$  do všeobecných rovnic podprostoru  $M$ .

Tím dostaneme soustavu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{b},$$

nebo po úpravě s ní ekvivalentní soustavu

$$(\mathbf{A} \cdot \beta) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q},$$

které musí vyhovovat vektor parametrů  $\mathbf{t}$ , aby jím určený bod  $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t} \in N$  patřil i do podprostoru  $M$ , tedy do průniku  $M \cap N$ .

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice  
 $(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$ .

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice  $(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$ .

Podobně jako v případě (2) řešení dostaneme v parametrickém tvaru

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}$$

a dosadíme ho do parametrických rovnic podprostoru  $N$ .

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice  $(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$ .

Podobně jako v případě (2) řešení dostaneme v parametrickém tvaru

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}$$

a dosadíme ho do parametrických rovnic podprostoru  $N$ .

Tak získáme parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \gamma) \cdot \mathbf{z}$$

podprostoru  $M \cap N$ .

### Příklad 3.3

*Afinní podprostor  $M \subseteq \mathbf{R}^4$  má všeobecné rovnice*

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3.\end{aligned}$$

### Příklad 3.3

Afinní podprostor  $M \subseteq \mathbf{R}^4$  má všeobecné rovnice

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3.\end{aligned}$$

Afinní podprostor  $N \subseteq \mathbf{R}^4$  je určený jako afinní obal

$N = \ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$  bodů  $\mathbf{p} = (3, 0, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{q} = (4, -1, 2, 2)^T$ ,  
 $\mathbf{r} = (4, 1, 2, 0)^T$  a  $\mathbf{s} = (7, 3, 4, 5)^T$ .

## Příklad 3.3

Afinní podprostor  $M \subseteq \mathbf{R}^4$  má všeobecné rovnice

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3.\end{aligned}$$

Afinní podprostor  $N \subseteq \mathbf{R}^4$  je určený jako afinní obal  
 $N = \ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$  bodů  $\mathbf{p} = (3, 0, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{q} = (4, -1, 2, 2)^T$ ,  
 $\mathbf{r} = (4, 1, 2, 0)^T$  a  $\mathbf{s} = (7, 3, 4, 5)^T$ .

Jeho parametrické vyjádření potom je

$$\begin{aligned}N &= \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{s} - \mathbf{p}] \\&= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$



Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bod tvaru  $\mathbf{p} + t_1(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t_2(\mathbf{r} - \mathbf{p}) + t_3(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \in N$  patří do průniku  $M \cap N$  právě tehdy, když příslušný vektor parametrů  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$  vyhovuje soustavě s rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \end{array} \right).$$

Podprostor řešení této soustavy má parametrické vyjádření

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podprostor řešení této soustavy má parametrické vyjádření

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dosazením do parametrického vyjádření  $N$  dostaneme

$$\begin{aligned} M \cap N &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a  $\dim(M \cap N) = 1$ .

Hodnost matice soustavy podprostoru  $M$  je 2, proto  $\dim M = 4 - 2 = 2$ , a  $\dim N = 3$ .

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a  $\dim(M \cap N) = 1$ .

Hodnost matice soustavy podprostoru  $M$  je 2, proto  $\dim M = 4 - 2 = 2$ , a  $\dim N = 3$ .

Z tohoto důvodu  $M \cap N$  je vlastní podprostor jak v  $M$  tak v  $N$ , tj.  $M, N$  jsou **různoběžné**.