5. cvičení z M1110, podzim 2021

Bylo by dobré zvládnout úlohy 1 až 6. Zbývající dva příklady jsou pro případ, že by už nebylo co dělat. (Týkají se lineární nezávislosti, která se na přednášce bude dělat až ve středu 13. 10.)

Příklad. 1. Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorových prostorů s operacemi stejnými jako na vektorovém prostoru jsou vektorové podprostory.

(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\, a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

(c) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\, f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

Pokud zjistíte, že jde o vektorový podprostor, najděte v něm konečnou množinu vektorů takovou, že všechny že všechny další vektory podprostoru jsou jejich lineární kombinací. Takové vektory se nazývají generátory vektorového podprostoru.

Příklad. 2. Uvažujme v $\mathbb{R}^5$ vektory $v_1 = (1, 2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -3, -1, 1, 0)$ a $u = (1, 7, 3, -1, 2)$. Zjistěte, zda vektor u leží v lineárním obalu $[v_1, v_2, v_3]$.

Příklad. 3. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ zjistěte, zda polynom $1 + 3x + 5x^2 + 10x^3$ leží v lineárním obalu

$$[1 + x + 2x^2 - x^3, 1 + 2x + x^3, 1 + x + 3x^2 - x^3, 2 + 2x + 4x^2 + 5x^3].$$

Pokud ano, napište ho jako konkrétní lineární kombinaci daných polynomů.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □

Příklad. 4. Podprostor U v $\mathbb{R}^5$ je množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \end{array}$$

Napište jej jako lineární obal několika vektorů.

Příklad. 5. Rozhodněte, zda platí:

(a) $[(4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)] = \mathbb{R}^4$,

(b) $[(1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4)] = \mathbb{R}^5$.

Příklad. 6. Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a nechť $u, v, w \in U$. Dokažte rovnost lineárních obalů

$$[u, v, w, 2u - 3v + 10w] = [u, v, w] = [u, v, 2u - 3v + 10w].$$

Příklad. 7. Zjistěte, zda jsou vektory $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 2, -1, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$ a $v_4 = (3, 2, 0, 5)$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Příklad. 8. Zjistěte, zda jsou polynomy $x^2 + x + 1$, $2x^2 + 2$, $x^2 - x$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ lineárně závislé nebo nezávislé