Příklad. 2. Uvažujme v $\mathbb{R}^5$ vektory $v_1 = (1,2,1,0,1)$, $v_2 = (2,-1,0,1,1)$, $v_3 = (1,-3,-1,1,0)$ a $u = (1,7,3,-1,2)$. Zjistěte, zda vektor u leží v lineárním obalu $[v_1, v_2, v_3]$.

$$u \in \underbrace{[v_1, v_2, v_3]}_{\{a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}} \iff \exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \quad \boxed{a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 = u}$$

Hľadáme $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ t.k., aby

$$a_1 \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v_1} + a_2 \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v_2} + a_3 \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & u \end{array}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R2 - 2.R1 \\ R1 - R3 \\ R1 - R5 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{sústava má riešenie} \Rightarrow u \in [v_1, v_2, v_3]$$

parameter

(nie je riadok $(0 \ldots 0 \mid c \neq 0)$)

Příklad. 3. V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ zjistěte, zda polynom $\overbrace{1+3x+5x^2+10x^3}^{p(x)}$ leží v lineárním obalu

$$[\overbrace{1+x+2x^2-x^3}^{p_1(x)}, \overbrace{1+2x+x^3}^{p_2(x)}, \overbrace{1+x+3x^2-x^3}^{p_3(x)}, \overbrace{2+2x+4x^2+5x^3}^{p_4(x)}].$$

Pokud ano, napište ho jako konkrétní lineární kombinaci daných polynomů.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □

$p(x) \in [p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)] \iff \exists a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}: \; p(x) = a_1 \cdot p_1(x) + a_2 \cdot p_2(x) + a_3 \cdot p_3(x) + a_4 \cdot p_4(x).$

$a_1 \cdot (1+x+2x^2-x^3) + a_2 \cdot (1+2x+x^3) + a_3 \cdot (1+x+3x^2-x^3) + a_4 (2+2x+4x^2+5x^3) = 1+3x+5x^2+10x^3$

$$\begin{array}{c} \\ x^0: \\ x^1: \\ x^2: \\ x^3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 5 & 10 \end{array}\right) \end{array}
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 11 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R2-R1 \\ R3-2\cdot R1 \\ R1+R4 \end{array}
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 14 \end{array}\right)
\underset{\substack{2R2+R3 \\ R3+R4}}{\sim}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\boxed{1+3x+5x^2+10x^3 = -10\, p_1(x) + 2 \cdot p_2(x) + 7 \cdot p_3(x) + 1 \cdot p_4(x).}$$

Overíme, že rovnosť platí napr. pre koeficient pri x^2:

$5 \stackrel{?}{=} (-10) \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 5$ ✓

Příklad. 4. Podprostor U v $\mathbb{R}^5$ je množinou všech řešení homogenní soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 8x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \end{array}$$

Napište jej jako lineární obal několika vektorů.

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -8 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Typické podpriestory v $\mathbb{R}^n$:

$$U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

(riešenia sústav rovníc)

Potrebné vektory získame vyriešením sústavy:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -8 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{-7} & 10 & -10 & -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

delíme 7

$x_5 = 7t \in \mathbb{R}$

$x_4 = 7s \in \mathbb{R}$

$x_3 = 7p \in \mathbb{R}$

$x_2 = -9t - 10s + 10p$

$x_1 = -35t - 7s + 21p + 18t + 20s - 20p$

$= -17t + 13s + p$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17t + 13s + p \\ -9t - 10s + 10p \\ 7p \\ 7s \\ 7t \end{pmatrix} = t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -17 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}}_{v_1} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + p \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

$t, s, p \in \mathbb{R}$ ľubovoľné

$$U = [v_1, v_2, v_3].$$

Příklad. 5. Rozhodněte, zda platí:

(a) $[(4,0,-2,6),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)] = \mathbb{R}^4$,
$$\overset{v_1}{(4,0,-2,6)},\ \overset{v_2}{(2,1,-2,3)},\ \overset{v_3}{(3,1,-2,4)}$$

(b) $[(1,-1,0,2),(2,2,-1,3),(0,1,1,0),(2,1,-2,3),(3,1,-2,4)] = \mathbb{R}^{\cancel{5}\,4}$.

a) Nech $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ľubovoľné. Zistíme, či $\exists\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tak, že $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -2 & -2 & -2 & c \\ 6 & 3 & 4 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c/2 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2 & -1 & 2c+a \\ 0 & -3 & -2 & 3c+d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c/2 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+2c+a \\ 0 & 0 & 1 & 3b+3c+d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c/2 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+2c+a \\ 0 & 0 & 0 & b+c+d-a \end{array}\right)$$

nemá riešenie $\Leftrightarrow$ $b+c+d-a \neq 0$

Zvolme napr. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, potom $\forall\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ je

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \underbrace{\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}}_{\text{MNOŽINA POSTUPNOSTÍ REÁLNYCH ČÍSIEL}}$.

Operácie $+, \cdot$ na $\underline{\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}}$ sú definované „po zložkách":

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, potom postupnosť $f+g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je definovaná $\underline{(f+g)(n) = f(n) \overset{+ \text{ v } \mathbb{R}}{+} g(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$a \in \mathbb{R}$, potom postupnosť $a.f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je definovaná $\underline{(a.f)(n) = a \underset{\cdot \text{ v } \mathbb{R}}{\cdot} f(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pozn.: Je možné si tento vektorový priestor predstaviť ako:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f+g)(1) \\ (f+g)(2) \\ (f+g)(3) \\ \vdots \end{pmatrix}, \text{ kde } \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} g(1) \\ g(2) \\ g(3) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a_1 \\ a \cdot a_2 \\ a \cdot a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot f(1) \\ a \cdot f(2) \\ a \cdot f(3) \end{pmatrix}.$$

Ukážeme, že $Z \subseteq \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor nad $\mathbb{R}$.

- $Z \neq \emptyset$, pretože nulová postupnosť $\in Z$ t.j. $0(n+1) = 0$ $\parallel$ $0(n) + 0(n-1) = 0+0 = 0$.

(1) Predpoklad:
$f, g \in Z$
t.j. $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$
$g(n+1) = g(n) + g(n-1)$

Platí $f+g \in Z$?

Potrebujeme ukázať, že $(f+g)(n+1) = (f+g)(n) + (f+g)(n-1)$.

Počítajme $(f+g)(n+1) \underset{\text{def } +}{=} f(n+1) + g(n+1) \underset{\text{predpoklad}}{=} [f(n) + f(n-1)] + [g(n) + g(n-1)]$

$(f+g)(n) + (f+g)(n-1) \underset{\text{def } +}{=} [f(n) + g(n)] + [f(n-1) + g(n-1)] \underset{\text{komutativita } + \text{ v } \mathbb{R}}{=} [f(n) + f(n-1)] + [g(n) + g(n-1)]$

Ukázali sme, že $(f+g)(n+1) = (f+g)(n) + (f+g)(n-1)$.

Teda $\forall f, g \in Z \Rightarrow f+g \in Z$.

(2) Predpoklad:
$f \in Z$
$a \in \mathbb{R}$
t.j. $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$

Platí $a.f \in Z$?

Potrebujeme ukázať, že $(a.f)(n+1) = (a.f)(n) + (a.f)(n-1)$.

Počítajme $(a.f)(n+1) \underset{\text{def } \cdot}{=} a \cdot f(n+1) \underset{\text{Predpoklad}}{=} a \cdot [f(n) + f(n-1)]$

$(a.f)(n) + (a.f)(n-1) \underset{\text{def.}}{=} a \cdot f(n) + a \cdot f(n-1)$

Ukázali sme, že $(a.f)(n+1) = (a.f)(n) + (a.f)(n-1)$.

Teda $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall f \in Z \Rightarrow a.f \in Z$.

Generátory Z.

Vidíme, že $f(n+1)$ závisí na $f(n), f(n-1)$ pre $n \geq 2$. Teda hodnoty $f(1), f(2)$ je možné zvoliť ľubovoľne a ostatné sa odvodia z nich. Preto generátory Z sú napr. funkcie

- $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\boxed{\begin{array}{l} \varphi_1(1) = 1 \\ \varphi_1(2) = 0 \end{array}}$ a ostatné hodnoty sú dané $\varphi_1(n+1) = \varphi_1(n) + \varphi_1(n-1)$.
- $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\boxed{\begin{array}{l} \varphi_2(1) = 0 \\ \varphi_2(2) = 1 \end{array}}$ a ostatné hodnoty plynú z $\varphi_2(n+1) = \varphi_2(n) + \varphi_2(n-1)$

Nech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná a chceme nájsť $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(n+1) \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_1(2) \\ \vdots \\ \varphi_1(n+1) \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} \varphi_2(1) \\ \varphi_2(2) \\ \vdots \\ \varphi_2(n+1) \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ * \\ \vdots \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Máme rovnice
$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = a_1 \\ f(2) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_2 \end{array}\right\}$$ bázový krok indukcie.

Ostatné rovnosti ukážeme indukciou: Nech $f(n-1) = a_1 \cdot \varphi_1(n-1) + a_2 \cdot \varphi_2(n-1)$, $f(n) = a_1 \cdot \varphi_1(n) + a_2 \cdot \varphi_2(n)$, potom platí

$$\begin{aligned} f(n+1) = f(n) + f(n-1) &= (a_1 \cdot \varphi_1(n) + a_2 \cdot \varphi_2(n)) + (a_1 \cdot \varphi_1(n-1) + a_2 \cdot \varphi_2(n-1)) \\ &= a_1 \cdot (\varphi_1(n) + \varphi_1(n-1)) + a_2 \cdot (\varphi_2(n) + \varphi_2(n-1)) = a_1 \cdot \varphi_1(n+1) + a_2 \varphi_2(n+1) \end{aligned}$$

Teda $Z = [\varphi_1, \varphi_2]$.