Príklad. 6. Napište dvě různé báze vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{\cancel{3\times 3}\ 2\times 2}(\mathbb{R})$ všech reálných matic tvaru $\cancel{3}\,2 \times \cancel{3}\,2$. Dále najděte báze podprostorů:

(1) $U \subseteq \mathrm{Mat}_{\cancel{3\times 3}\ 2\times 2}(\mathbb{R})$ všech symetrických matic,
(2) $V \subseteq \mathrm{Mat}_{\cancel{3\times 3}\ 2\times 2}(\mathbb{R})$ všech antisymetrických matic,
(3) $W \subseteq \mathrm{Mat}_{\cancel{3\times 3}\ 2\times 2}(\mathbb{R})$ všech matic s nulovou stopou.

Báze $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

- $\underset{E_1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{E_2}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{E_3}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}, \underset{E_4}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$
- $\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$

- E_1, E_2, E_3, E_4 generujú $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, lebo

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

- E_1, E_2, E_3, E_4 sú LN, lebo z $a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \implies a=b=c=d=0$$

jediné riešenie

Teda $\dim(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 2\cdot 2 = 4$.

Analogicky pre matice $k\times n$ dostávame:

$$\implies \dim(\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{R})) = k\cdot n$$

(1). symetrická matica spĺňa:

$$A = A^T \text{ (transponovaná matica)}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix} \implies a_{12}=a_{21}$$

je dostatočne určujú sym. maticu

Teda ľubovoľný prvok U je tvaru $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + a_{12}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + a_{22}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

Zrejme $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ sú LN (overte rovnakým spôsobom ako vyššie).

$\dim(U) = 3$. Nech U' = symetrické matice $n\times n$, potom

$$\dim U' = \text{počet } * \text{ v } \begin{pmatrix}* & * & \cdots & * \\ & * & \cdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & * \\ & & & *\end{pmatrix} = 1+2+\ldots+n = \frac{n}{2}\cdot(n+1)$$

Horná Δ matica.

(2) Antisymetrické matice B spĺňajú $B = -B^T$.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{21} \\ -b_{12} & -b_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_{11} = -b_{11} & b_{12} = -b_{21} \\ b_{21} = -b_{12} & b_{22} = -b_{22} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2b_{11} = 0 & \\ b_{21} = -b_{12} & 2b_{22} = 0 \end{matrix}$$

Obecný prvok V je tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & -b_{21} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} = b_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ V má bázu $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (je LN, lebo $\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

- Všeobecne platí, že každá matica sa dá napísať ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice jednoznačne t.j. $Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) = U \oplus V$ ($\oplus$ znamená, že $U \cap V = \{\vec{0}\}$)

$\Rightarrow$ $\dim(V) = \dim(Mat_{2\times2}(\mathbb{R})) - \dim(U) = 4 - 3 = 1$ v.

$M \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ ľubovoľná, potom

$$M = \underbrace{\frac{(M+M^T)}{2}}_{\text{symetrická}} + \underbrace{\frac{(M-M^T)}{2}}_{\text{antisymetrická.}}$$

$$\left(\frac{M+M^T}{2}\right)^T = \frac{M^T + (M^T)^T}{2} = \frac{M^T + M}{2}$$

$$\left(\frac{M-M^T}{2}\right)^T = \frac{M^T - M}{2} = -\frac{M-M^T}{2}$$

(3) $Tr\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11} + c_{22}$ (súčet diagonálnych prvkov)

Chceme $c_{11} + c_{22} = 0 \Rightarrow \boxed{c_{11} = -c_{22}}$

Obecný prvok W je tvaru

$$\begin{pmatrix} -c_{22} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{22} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OPÄŤ SA PRESVEDČTE, ŽE $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{báza.}}$ sú LN.

Obecne, W' = vektorový podpriestor matíc $n \times n$ s nulovou stopou, potom

$$\dim(V') = \dim(Mat_{n\times n}(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1.$$

Příklad. 7. Najděte báze podprostorů prostoru $\mathbb{R}_3[x]$:

(1) $K = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(-x) = -p(x),\ p(1) = 0\}$,

(2) $L = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) - 2xp'(x) = 0\}$, kde p' značí derivace polynomu p.

(1) Najskôr nájdeme generátory K.

Nech $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 \in K$ t.j. $p(-x) = -p(x)$ a $p(1) = 0$.

- $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$
- $a_0 - \cancel{a_1 x} + a_2 \cdot x^2 - \cancel{a_3 x^3} = -a_0 - \cancel{a_1 x} - a_2 \cdot x^2 - \cancel{a_3 x^3} \Rightarrow 2a_0 + 2a_2 \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_2 x^2 = 0$
- pretože funkcie 1 a x^2 sú LN ($1, x, x^2$ je štandardná báza $\mathbb{R}_2[x]$, preto $1, x, x^2$ sú LN, teda aj $1, x^2$ sú LN.)

  dostávame, že

  $a_0 + a_2 x^2 = 0$ má iba triviálne riešenie $\boxed{a_0 = a_2 = 0}$. $\Rightarrow p(x) = a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3$.

Pozn. druhá podmienka nám hovorí, že $p(x)$ je nepárna funkcia, preto $p(x)$ bude obsahovať iba nepárne mocniny x, x^3 (odvodili sme bez počítania)

- Prvá podmienka nám hovorí, že $\boxed{a_1 + a_3 = 0} \Rightarrow \boxed{a_1 = -a_3} \Rightarrow p(x) = -a_3 \cdot x + a_3 \cdot x^3$
$= a_3 \cdot (x^3 - x)$.

Preto $K = [x^3 - x]$, pretože jeden vektor $\neq 0$ je vždy LN je $x^3 - x$ báza K.

(2) $q(x) \in L$ t.j. $q(x) - 2x\,q'(x) = 0$. $q(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

- $q(x) - 2xq'(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 x^2 + b_3 x^3 - 2x(b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2) = b_0 + (b_1 - 2b_1)x + (b_2 - 4b_2)x^2 + (b_3 - 6b_3)x^3$

t.j. $\underbrace{b_0}_{c_0} \underbrace{- b_1}_{c_1} x \underbrace{- 3b_2}_{c_2} x^2 \underbrace{- 5b_3}_{c_3} x^3 = 0$, pretože $1, x, x^2, x^3$ sú LN funkcie (tvoria bázu $\mathbb{R}_3[x]$), je nutné

$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow$
$$\boxed{\begin{aligned} b_0 &= c_0 = 0 \\ b_1 &= -c_1 = 0 \\ b_2 &= \frac{-c_2}{3} = 0 \\ b_3 &= \frac{-c_3}{5} = 0 \end{aligned}}$$

Preto $q(x) = 0$, tento polynóm je LZ, lebo $a_0 \cdot 0 = 0$ má nekonečne veľa riešení. Teda neexistuje báza $\boxed{L = \{0\}}$.

Příklad. 8. Nechť U je vektorový prostor všech nekonečných posloupností reálných čísel. Ukažte, že jeho podprostor

$$F = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in U :\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ n \geq 2\}$$

má bázi tvořenou dvěma vektory.

~~Dále se pokuste ukázat, že celý prostor nemá bázi tvořenou konečným seznamem vektorů.~~

Na 5. cvičení sme ukázali, že $Z = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f(n+1) = f(n) + f(n-1) \text{ pre } n \geq 2 \}$ je generovaná

$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takými, že $\varphi_1(1) = 1 \quad \varphi_2(1) = 0$

$\varphi_1(2) = 0 \quad \varphi_2(2) = 1$

$\varphi_1(n+1) = \varphi_1(n) + \varphi_1(n-1) \quad \varphi_2(n+1) = \varphi_2(n) + \varphi_2(n-1)$ pre $n \geq 2$.

$\varphi_1, \varphi_2 \in Z$.

Toto vieme jednoducho previesť do značenia postupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

$\to$ F je $\boxed{\text{generovaná postupnosťami } (b_n)_{n=1}^{\infty} \text{ a } (c_n)_{n=1}^{\infty}}$ takými, že

$b_1 = 1 \quad c_1 = 0$

$b_2 = 0 \quad c_2 = 1$ a $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$, $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$ pre $n \geq 2$

Zostáva ukázať, že $\boxed{(b_n)_{n=1}^{\infty} \text{ a } (c_n)_{n=1}^{\infty} \text{ sú LN.}}$

Uvažujme $\alpha_1 \cdot b_n + \alpha_2 \cdot c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. pre $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Zvolme $n=1$: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

$n=2$: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$

Teda $\alpha_1 \cdot b_n + \alpha_2 \cdot c_n = 0$ má jediné riešenie $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ t.j. postupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ sú LN.

Teda $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ je báza F.

$u_1 + 2u_2,\ u_1 - u_2$

Příklad. 9. Dokažte z definice báze: Je-li u_1, u_2 [redacted] báze prostoru U, pak [redacted] je rovněž báze prostoru U.

nepracujeme so súradnicami, tak nemusíme bázu písať ako usporiadanú dvojicu

Potrebujeme ukázať 2 vlastnosti pre $\boxed{\begin{matrix} v_1 = u_1 + 2u_2 \\ v_2 = u_1 - u_2 \end{matrix}}$:

(I) v_1, v_2 generuje U t.j. $\forall u \in U\ \underbrace{\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}}_{\text{potrebujeme určiť}} :\ u = \overset{?}{a_1} v_1 + \overset{?}{a_2} v_2$

Z predpokladu, že u_1, u_2 je báza U vieme, že:

$$\forall u \in U\ \underbrace{\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}}_{\text{poznáme, lebo predpoklad.}} :\quad u = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 . \quad (*)$$

Potrebujeme vyjadriť a_1, a_2 pomocou b_1, b_2, ktoré poznáme.

Upravujme $u = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = a_1 \cdot (u_1 + 2u_2) + a_2 \cdot (u_1 - u_2) = (a_1 + a_2) u_1 + (2a_1 - a_2) u_2$

má riešenie b_1, b_2 podľa $(*)$

t.j. $b_1 = a_1 + a_2$

$b_2 = 2a_1 - a_2$

$b_1 + b_2 = 3a_1$

$\frac{b_1 + b_2}{3} = a_1$

$a_2 = b_1 - a_1 = b_1 - \frac{b_1 + b_2}{3} = \frac{2b_1 - b_2}{3}$

Teda sme ukázali, že pre $\forall u \in U$ existujú čísla $a_1 = \frac{b_1 + b_2}{3}$ a $a_2 = \frac{2b_1 - b_2}{3}$ také, že $u = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$.

(II.) $v_1 v_2$ sú LN t.j. dneme

$(**)\quad \vec{0} = \overset{?}{c_1} v_1 + \overset{?}{c_2} v_2$ pre $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ má jediné riešenie $c_1 = c_2 = 0$

Predpoklad: u_1, u_2 sú LN t.j. $(***)\ \vec{0} = d_1 \cdot u_1 + d_2 \cdot u_2$ pre $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ má jediné riešenie t.j. $d_1 = d_2 = 0$

V časti I. sme vyjadrili riešenie $(**)$ pre $\boxed{u = \vec{0}}$ pomocou riešenia $(***)$

t.j. $a_1 = \frac{d_1 + d_2}{...}$

V časti 1. sme vyjadrili riešenie (**) pre $\boxed{u=0}$ pomocou riešenia (***)

t.j. $$c_1 = \frac{d_1+d_2}{3}$$ $$c_2 = \frac{2d_1-d_2}{3}$$

Pretože vieme z predpokladu, že $d_1 = d_2 = 0$

dostávame $$c_1 = \frac{0+0}{3} = 0$$ $$c_2 = \frac{2\cdot 0-0}{3} = 0$$ t.j. $c_1 = c_2 = 0$ je jediné riešenie (**).

Teda v_1, v_2 sú LN.

Příklad. 1. Spočtěte souřadnice polynomu $1 + 3x + \overset{p}{5x^2} + 10x^3$ v bázi

$$\alpha = (\underset{p_1}{1 + x + 2x^2 - x^3}, \underset{p_2}{1 + 2x + x^3}, \underset{p_3}{1 + x + 3x^2 - x^3}, \underset{p_4}{2 + 2x + 4x^2 + 5x^3})$$

prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Řešení. $(-10, 2, 7, 1)$ □

Nech $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je báza vektorového priestoru U. Potom pre každé $u \in U$ existuje jediná n-tica $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ taká, že $\boxed{u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \dots + x_n \cdot u_n}$.

Vektor $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ nazývame súradnicami $u \in U$ v báze α priestoru U.

Riešime $a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + a_4 \cdot p_4 = p$ pre $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ (výpočet obdobný ako v cvičení 5)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 5 & 10 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} R2-R1 \\ R3-2\cdot R1 \\ R1+R4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 14 \end{array}\right) \underset{\begin{array}{l} 2\,R2+R3 \\ R3+R4 \end{array}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow (p)_\alpha = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\varepsilon = (1, x, x^2, x^3)$

Všimnite si, že $\mathbb{R}_3[x] \ni p_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + (-1) \cdot x^3 \Rightarrow (p_1)_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ (prvý stĺpec v našej sústave)

$\vdots$

$\mathbb{R}_3[x] \ni p_4 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot x + 4 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 \Rightarrow (p_4)_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

t.j. naša sústava je tvaru $\left((p_1)_\varepsilon \ (p_2)_\varepsilon \ (p_3)_\varepsilon \ (p_4)_\varepsilon \mid (p)_\varepsilon \right)$.

Pomocou súradníc vieme polynómy z $\mathbb{R}_3[x]$ na 4-tice reálnych čísel t.j. prvky $\mathbb{R}^4$, a s nimi vieme jednoducho počítať.

Příklad. 6. Napište dvě různé báze vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech reálných matic tvaru 3×3. Dále najděte báze podprostorů:

(1) $U \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech symetrických matic,
(2) $V \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech antisymetrických matic,
(3) $W \subseteq \mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$ všech matic s nulovou stopou.

2 rôzne báze $\mathrm{Mat}_{3x3}(\mathbb{R})$

- štandardná báza

3x3=9 prvkov

$$\underset{E_{11}}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}, \underset{E_{12}}{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}, \underset{E_{13}}{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}, \underset{E_{21}}{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}, \underset{E_{22}}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}},$$
$$\underset{E_{23}}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}, \underset{E_{31}}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}, \underset{E_{32}}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}, \underset{E_{33}}{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

- iná báza (pridáme k jednému prvku 1).

napr. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}$

(1) Symetrické matice 3x3, sú definované $A = A^T$, kde A^T je transponovaná matica

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix} = A^T$$

$$0 = \begin{pmatrix}\overset{=0}{a_{11}-a_{11}}&a_{21}-a_{12}&a_{31}-a_{13}\\a_{12}-a_{21}&\overset{=0}{a_{22}-a_{22}}&a_{32}-a_{23}\\a_{13}-a_{31}&a_{23}-a_{32}&\overset{=0}{a_{33}-a_{33}}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a_{21}=a_{12}\\a_{31}=a_{13}\\a_{32}=a_{23}\end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=S_1} + a_{22}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=S_2} + a_{33}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=S_3}$$
$$+ a_{12}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=S_4} + a_{13}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{=S_5} + a_{23}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{=S_6}$$

Báza je $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ (rozmyslite si, prečo sú lineárne nezávislé)

(2) analogicky ako 1, antisymetrické matice sú definované $A = -A^T$.

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix} = -A^T$$

$$0 = \begin{pmatrix}-a_{11}-a_{11}&-a_{21}-a_{12}&-a_{31}-a_{13}\\-a_{12}-a_{21}&-a_{22}-a_{22}&-a_{32}-a_{23}\\-a_{13}-a_{31}&-a_{23}-a_{32}&-a_{33}-a_{33}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$2a_{11}=0$, $2a_{22}=0$, $2a_{33}=0$

$a_{21}+a_{12}=0$, $a_{31}+a_{13}=0$, $a_{23}+a_{32}=0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$a_{21}=-a_{12}$ $\quad a_{31}=-a_{13}$ $\quad a_{23}=-a_{32}$

$$\left. -a_{13}-a_{31} \quad -a_{23}-a_{32} \quad -a_{33}-a_{33} \right|$$

$a_{21}=-a_{12}$ $\Downarrow$ $a_{31}=-a_{13}$ $\Downarrow$ $a_{23}=-a_{32}$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\shortparallel\; A_1} + a_{13}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\shortparallel\; A_2} + a_{23}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\shortparallel\; A_3}$$

Báza je A_1, A_2, A_3 (rozmyslite si, prečo sú lineárne nezávislé).

Pozn. Báza $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ má 9 prvkov, báza symetrických matíc má 6 prvkov a báza antisymetrických matíc má 3 prvky.

Plynie z obecného faktu, že každá matica sa dá napísať ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice.

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, A_1, A_2, A_3$ je báza $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$.

(3) A, $tr(A)=0$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}=0 \implies a_{33}=-a_{11}-a_{22}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{=T_1} + a_{22}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{=T_2} + a_{12}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=T_3} + a_{13}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=T_4}$$

$$+ a_{21}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=T_5} + a_{23}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=T_6} + a_{31}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=T_7} + a_{32}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{=T_8}$$

Báza je $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$.

Příklad. 9. Dokažte z definice báze: Je-li $u_1, u_2.u_3.u_4$ báze prostoru U, pak $u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4, u_1+2u_3$ je rovněž báze prostoru U.

Nech u_1, u_2, u_3, u_4 je báza U, teda

- $\forall u \in U \ \exists a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$: $\quad (U = [u_1, u_2, u_3, u_4])$

$$u = a_1 u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4$$

- u_1, u_2, u_3, u_4 sú lineárne nezávislé

Chceme ukázať, že $u_1+u_4, u_3, u_2+u_3+u_4, u_1+2u_3$ je báza U.

Ukážeme, že:

$$U = [\overset{v_1}{u_1+u_4}, \overset{v_2}{u_2+u_3+u_4}, \overset{v_3}{u_3}, \overset{v_4}{u_1+2u_3}]$$

Nech $v \in U$ je ľubovoľné, hľadáme $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 \quad (**)$$
$$= b_1(u_1+u_4) + b_2(u_2+u_3+u_4) + b_3 u_3 + b_4(u_1+2u_3)$$
$$= \underbrace{(b_1+b_4)}_{a_1} \cdot u_1 + \underbrace{b_2}_{a_2} u_2 + \underbrace{(b_2+b_3+2b_4)}_{a_3} u_3 + \underbrace{(b_2+b_1)}_{a_4} u_4 \quad (*)$$

Z definície báze u_1, u_2, u_3, u_4 existujú čísla $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ splňujúce $(*)$, potom

③ $a_1 = b_1 + b_4 \Rightarrow b_4 = a_1 - b_1 = a_1 - (a_4 - a_1) = 2a_1 - a_4$

① $a_2 = b_2 \Rightarrow b_2 = a_2$

④ $a_3 = b_2 + b_3 + 2b_4 \Rightarrow b_3 = a_3 - b_2 - 2b_4 = a_3 - a_2 - 2(2a_1 - a_4) = -4a_1 + 2a_4 + a_3 - a_2$

② $a_4 = b_2 + b_1 \Rightarrow b_1 = a_4 - b_1 = a_4 - a_1$

Našli sme riešenie $(**)$ ↗, preto $[v_1, v_2, v_3, v_4] = U$.

2. v_1, v_2, v_3, v_4 sú lineárne nezávislé. V $(**)$ zvolíme $v = 0$ a chceme ukázať, že $(**)$ má iba triviálne riešenie.

$(*)$ prechádza do $0 = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 + a_4 u_4$. Z definície báze máme iba jediné riešenie $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Dosadíme toto riešenie do ①–④.

① $0 = a_2 = b_2$

② $b_1 = a_4 - a_1 = 0 - 0 = 0$

③ $b_4 = 2a_1 - a_4 = 0 - 0 = 0$

④ $b_3 = -4a_1 + 2a_4 + a_3 + a_2 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

máme jediné riešenie $0 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4$, teda v_1, v_2, v_3, v_4 sú lineárne nezávislé.