Příklad. 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1x_2$,

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2)$,

(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)^2)$,

(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2))$.

$\varphi: U \to V$ je lineárne zobrazenie, ak $\forall u,v \in U$ je $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall u \in U$ je $\varphi(a\cdot u) = a\cdot\varphi(u)$

Špeciálne $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(au+bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v)$.

Pr. $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\quad \varphi(x) = a\cdot x \quad a \in \mathbb{R}$.

Pr1

a) zobrazenie nie je lineárne, lebo

$\varphi(ax_1, ax_2) = 2ax_1 + (ax_1)\cdot(ax_2)$

$a\cdot\varphi(x_1,x_2) = a\cdot(2x_1 + x_1x_2) = 2ax_1 + a\cdot x_1x_2$

$a(a-1)$

$a^2x_1x_2 \neq a\cdot x_1x_2 \iff a^2 - a \neq 0 \wedge x_1x_2 \neq 0$

$a \neq 0,1$

Napr. $a = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1 \quad -\varphi(1,1) = -(2\cdot1 + 1\cdot1) = -3$

$\varphi(-1,-1) = -2 + (-1)\cdot(-1) = -1$

Teda $-\varphi(1,1) \neq \varphi(-(1,1))$.

b) zobrazenie je lineárne

- $a\cdot\varphi(x_1,x_2) = a\cdot(2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2) = (2ax_1 - 3ax_2, 5ax_2, ax_1 - ax_2)$

  $\varphi(a\cdot(x_1,x_2)) = \varphi(ax_1, ax_2) = (2ax_1 - 3ax_2, 5ax_2, ax_1 - ax_2)$

  $\boxed{a\varphi(x_1,x_2) = \varphi(a\cdot(x_1,x_2)) \quad \forall a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}}$ ✓

- $\varphi((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = \varphi((x_1+y_1, x_2+y_2)) = (2(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2), 5(x_2+y_2), (x_1+y_1) - (x_2+y_2))$

  $\varphi(x_1,x_2) + \varphi(y_1,y_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2) + (2y_1 - 3y_2, 5y_2, y_1 - y_2)$

  $= (2(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2), 5(x_2+y_2), (x_1+y_1) - (x_2+y_2))$

  $\boxed{\varphi((x_1,x_2) + (y_1,y_2)) = \varphi(x_1,x_2) + \varphi(y_1,y_2)} \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ✓

c) $\varphi(p) = (p(1), p(2)^2)$ nie je lineárne zobrazenie

Napr. $q(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\varphi(q+q) = ((q+q)(1), ((q+q)(2))^2) = (2q(1), (2q(2))^2) = (2q(1), 4q(2)) = (2\cdot1, 4\cdot1) = (2,4)$

$\varphi(q) + \varphi(q) = (q(1), q(2)^2) + (q(1), q(2)^2) = (1, 1^2) + (1, 1^2) = (2,2)$

$\varphi(q+q) = (2,4) \neq (2,2) = \varphi(q) + \varphi(q)$

d) $\varphi(p) = (p(1), p(2))$ je lineárne zobrazenie

- $\varphi(p+q) = ((p+q)(1), (p+q)(2)) = (p(1) + q(1), p(2) + q(2)) = (p(1), p(2)) + (q(1), q(2))$

  $\varphi(p) + \varphi(q) = (p(1), p(2)) + (q(1), q(2))$

  $\boxed{\forall p, q \in \mathbb{R}_3[x] \quad \text{platí} \quad \varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)}$ ✓

- $\varphi(a\cdot q) = ((a\cdot q)(1), (a\cdot q)(2)) = (a\cdot q(1), a\cdot q(2))$

  $a\cdot\varphi(q) = a\cdot(q(1), q(2)) = (a\cdot q(1), a\cdot q(2))$

- $\varphi(a\cdot q) = ((a\cdot q)(1), (a\cdot q)(2)) = (a\cdot q(1), a\cdot q(2))$

$a\cdot\varphi(q) = a\cdot(q(1), q(2)) = (a\cdot q(1), a\cdot q(2))$ //

$$\boxed{\forall a, q \in \mathbb{R} \quad \varphi(a\cdot q) = a\cdot\varphi(q)}$$

Pozn. Všetky lin. zobrazenia $\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sú tvaru

$$\varphi(x) = A\cdot x, \text{ kde } A \in Mat_{n\times k}(\mathbb{R}).$$

Pomocou tohoto hneď vidíme, že 1b) je lineárne:

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Příklad. 2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1,\ \varphi(u_2) = u_3,\ \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

Poznáme $\left(\begin{array}{c|c} u_1 & \varphi(u_1) \\ u_2 & \varphi(u_2) \\ u_3 & \varphi(u_3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} u_1 & u_1 \\ u_2 & u_3 \\ u_3 & u_2 \end{array}\right)$

a chceme $\left(\begin{array}{c|c} e_1 & \varphi(e_1) \\ e_2 & \varphi(e_2) \\ e_3 & \varphi(e_3) \end{array}\right)$, pretože $x = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$

$$\varphi(x) = x_1 \cdot \varphi(e_1) + x_2 \cdot \varphi(e_2) + x_3 \cdot \varphi(e_3) = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{pmatrix}}_{A \leftarrow \text{ hľadáme}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Preto $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ získame:

$$\left(\begin{array}{c|c} u_1 & \varphi(u_1) \\ u_2 & \varphi(u_2) \\ u_3 & \varphi(u_3) \end{array}\right) \overset{\text{ERO}}{\sim} \dots \sim \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \overbrace{\varphi(e_1)}^{A^T} \\ e_2 & \varphi(e_2) \\ e_3 & \varphi(e_3) \end{array}\right)$$

(Rovnaký algoritmus ako pri výpočte inverznej matice)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A^T

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{pmatrix} \cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Skúška

$$\varphi(u_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \ \checkmark$$

$$\varphi(u_2) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3 \ \checkmark$$

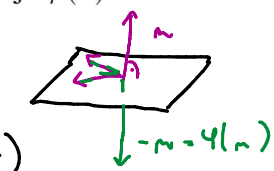
$$\varphi(u_3) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2 \ \checkmark$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pozn. Každé lin. zobrazenie je jednoznačne určené obrazmi bázových vektorov. (medzi priestormi s dimenziou $< \infty$)

Příklad. 3. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

Připomenutí symetrie podle roviny:



normálový vektor roviny $n \mapsto -n$ (opačný vektor)

směrové vektory roviny $u \mapsto u$

$v \mapsto v$

ROVINA:

$1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - x_3 = 0$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_3 &= t \in \mathbb{R} \\ x_2 &= s \in \mathbb{R} \\ x_1 &= t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v}$$

$n = (1, 0, -1)$

Chceme $B = (\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \varphi(e_3))$. Počítáme $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$.

Máme

$$\left(\begin{array}{c|c} n & -n \\ u & u \\ v & v \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}}_{B^T}$$

$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$B = (\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\ \varphi(e_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B je symetrická

t.j. $B = B^T$

(φ je symetrie)

Zkouška:

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Příklad. 4. Najděte bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadaného předpisem

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}.$$

$\varphi : U \to V$

Jadro zobrazenia φ je podpriestor $\ker \varphi = \{ v \in U \mid \varphi(v) = 0 \} \subseteq U$

Obraz zobrazenia φ je podpriestor $\operatorname{im} \varphi = \{ \varphi(v) \in V \mid v \in U \} \subseteq V$

Platí $\quad \dim(\operatorname{im} \varphi) + \dim(\ker \varphi) = \dim(U)$!

1. $\ker \varphi$. $\quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker \varphi \iff \varphi(x) = 0$ t.j. $\begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

riešime

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$x_4 = t \in \mathbb{R}$

$x_3 = s \in \mathbb{R}$

$x_2 = -2t - s$

$x_1 = -5t - 3s \overbrace{-2(-2t - s)}^{4t+2s} = -t - s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2} \Rightarrow \text{LN}$$

báza $\ker \varphi$ je u_1, u_2 ($\ker \varphi = [u_1, u_2]$ a u_1, u_2 sú LN) $\qquad \dim(\ker \varphi) = 2$

2. $\operatorname{im} \varphi$ je generovaný stĺpcami matice t.j. $\operatorname{im} \varphi = \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}}_{v_4} \Big]$.

$\operatorname{im} \varphi = [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)] \subseteq \mathbb{R}^3$

Aby sme našli bázu $\operatorname{im} \varphi$, musíme vybrať maximálny zoznam LN vektorov s rovnakým lineárnym obalom z v_1, v_2, v_3, v_4.

$$(v_1\ v_2\ v_3\ v_4) = \text{matica predpisu} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \overset{\text{predošlé úpravy}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Báza $\operatorname{im} \varphi$ je $v_1\ v_2$ alebo
$v_1\ v_3$ alebo
$v_1\ v_4$.

$\dim(\operatorname{im} \varphi) = 2$

Overíme formulku pre dimenzie :

Overíme formulku pre dimenzie:

$\dim(U) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker\varphi) + \dim(\operatorname{im}\varphi)$$
$$4 = 2 + 2 \quad \checkmark$$

<u>Pozn.</u> $\operatorname{im}\varphi = [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)]$, pretože ľubovoľný prvok $\operatorname{im}\varphi$ je tvaru $\varphi(y)$, kde $y \in \mathbb{R}^4$. $\mathbb{R}^4$ má štandardnú bázu (e_1, e_2, e_3, e_4), preto pre $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$

je
$$y = y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + y_3 \cdot e_3 + y_4 \cdot e_4 \quad /\varphi$$
$$\varphi(y) = y_1 \cdot \varphi(e_1) + y_2 \cdot \varphi(e_2) + y_3 \cdot \varphi(e_3) + y_4 \cdot \varphi(e_4).$$

$\Rightarrow$ $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$ <u>generujú</u> $\operatorname{im}\varphi$.