Příklad. 2. Najděte báze a dimenze následujících vektorových prostorů:

(1) $\mathbb{C}_1[x]$ jako vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$,

~~(2) $\mathbb{R}^M$ nad $\mathbb{R}$, kde M je konečná množina.~~

(0) $\mathbb{C}_2[x]$ ako vektorový priestor nad $\mathbb{C}$

polynómy stupňa najviac 2 s koeficientami v $\mathbb{C}$.

(0) Ukáže sa rovnako ako v prípade $\mathbb{R}_2[x]$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

Báza bude $1, x, x^2$, pretože
- $\forall p \in \mathbb{C}_2[x] \; \exists a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}: \; p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ (definícia $\mathbb{C}_2[x]$)
- $1, x, x^2$ sú LN nad $\mathbb{C}$

$b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 = 0$ má jediné riešenie pre $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$

Pretože
$x = 0$: $\boxed{b_0 = 0}$

$x = 1$: $0 \cdot 1 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 1 = 0$

$x = -1$: $0 \cdot 1 - b_1 + b_2 \cdot 1 = 0$

$2b_2 = 0 \Rightarrow \boxed{b_2 = 0}$

$\boxed{b_1 = 0.}$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_2[x] = 2 + 1 = 3.$

(1) Nájdeme generátory $\mathbb{C}_1[x]$ nad $\boxed{\mathbb{R}.}$

$p \in \mathbb{C}_1[x]$ je ľubovoľný t.j. $p(x) = \underbrace{(c_0 + i d_0)}_{\in \mathbb{C}} \cdot 1 + \underbrace{(c_1 + i d_1)}_{\in \mathbb{C}} \cdot x$

$c_0, d_0, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$

$p(x) = \underbrace{c_0}_{\in \mathbb{R}} \cdot 1 + \underbrace{d_0}_{\in \mathbb{R}} \cdot i + \underbrace{c_1}_{\in \mathbb{R}} \cdot x + \underbrace{d_1}_{\in \mathbb{R}} \cdot (i \cdot x)$

- $\mathbb{C}_1[x]$ nad $\mathbb{R}$ je generované $1, i, x, i \cdot x$
- $1, i, x, i \cdot x$ sú LN nad $\boxed{\mathbb{R}}$

Riešime $b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot i + b_3 \cdot x + b_4 \cdot i \cdot x = 0$ pre $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$

$x = 0$: $b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot i = 0$, pretože $\boxed{i \notin \mathbb{R}}$ je nutne $\boxed{b_1 = b_2 = 0}$

Vskutku: Predpokladajme, že $b_2 \neq 0$, potom $\mathbb{R} \ni \frac{b_1 \cdot 1}{b_2} = i \notin \mathbb{R}$ spor.

$x = 1$: $b_3 \cdot 1 + b_4 \cdot i = 0$, pretože $\boxed{i \notin \mathbb{R}}$ je nutne $\boxed{b_3 = b_4 = 0}$

$1, i, x, i \cdot x$ je báza $\mathbb{C}_1[x]$ nad $\mathbb{R}$ t.j. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_1[x] = 2 \cdot (1 + 1) = 4$

Pozn. : $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1[x] = 1+1 = 2$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_1[x] = 1+1 = 2$

Obecne $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_k[x] = 2 \cdot (k+1)$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_k[x] = k+1$

Příklad. 2. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -4\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= -4\cdot\left(1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 8\right) = 32$$

OPAKOVANIE: det definujeme pre matice $n\times n$.

- $\det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{\ell\ell} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{\ell\ell}$ ← HORNÁ Δ MATICA
- $\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$ ⇒ stĺpcové úpravy fungujú analogicky ako riadkové
- $\det\begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ r_{i+1}(A) + c\cdot r_k(A) \\ r_{i+2}(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$
- $\det\begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ c\cdot r_{i+1}(A) \\ r_{i+2}(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} = c\cdot\det\begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$
- $\det\begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_i(A) \\ r_j(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_j(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix}$

riadkové úpravy

- $\det\begin{pmatrix} A_{k\times k} & * \\ 0 & B_{n\times n} \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(B)$
- $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\cdot d - c\cdot b$

SARRUSOVO PRAVIDLO

- $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - a_{31}a_{22}\cdot a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$

Příklad. 4. Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix} = x \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ y & x & x & \dots & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & y & x \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{odpočítame} \\ \text{od} \\ i\text{-teho riadku} \\ y\text{-násobok 1. riadku} \\ \text{pre } i = n, n-1, \dots, 2 \end{array} \right|$$

$$= x \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x-y & x-y & \dots & x-y & x-y \\ 0 & 0 & x-y & \dots & x-y & x-y \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

$$= x \cdot (x-y)^{n-1}.$$

Príklad. 5. Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x+a_n \end{pmatrix}.$$

(všimnite si, že stĺpcové súčty sú rovnaké)

Pripočítame všetky stĺpce $s_2(A), \dots, s_n(A)$ k $s_1(A)$.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{pmatrix} =$$

| odpočítame a_i-násobok 1. stĺpca od i-teho stĺpca pre $i = 2, 3, \dots, n$ |

$$\boxed{a = x + a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$= a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots 0 & x \end{pmatrix} = a \cdot x^{n-1} = (x + a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot x^{n-1}$$

dolná Δ matica, platí $\det\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right) = \det\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$.

$\det(A) = \det(A^T)$

Příklad 6. Vypočtěte determinant

$$D(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\det\begin{pmatrix} a_1+x & x & x & \ldots & x & x\\ x & a_2+x & x & \ldots & x & x\\ x & x & a_3+x & \ldots & x & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\ a_{n-1}+x & & \vdots\\ x & x & x & \ldots & x & a_n+x \end{pmatrix}.$$

Opakovanie Laplaceov rozvoj $\det(A)$ podľa $\boxed{\text{i-teho riadku}}$ (analogicky podľa i-teho stĺpca)

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ & & & \end{pmatrix}}_{n\times n} = \underline{a_{i1}}\cdot(-1)^{i+1}\det\underbrace{\begin{pmatrix} \cancel{a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}} \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + \ldots + \underline{a_{in}}\,(-1)^{i+n}\cdot\det\underbrace{\begin{pmatrix} \cancel{a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}} \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$$

Odpočítame (n-1)-stĺpec od n-tého stĺpca.

$$D(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ n-1\rightarrow \\ n\rightarrow \end{array}\det\begin{pmatrix} a_1+x & x & x & \ldots & x & 0\\ x & a_2+x & x & \ldots & x & 0\\ x & x & a_3+x & \ldots & x & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ x & x & x & \ldots & a_{n-1}+x & -a_{n-1}\\ x & x & x & \ldots & x & a_n \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{c}\text{Laplaceov}\\ \text{rozvoj}\\ \text{podľa}\\ \text{n-tého}\\ \text{stĺpca}\end{array}\right|$$

$$= -a_{n-1}\cdot\underbrace{(-1)^{n-1+n}}_{\boxed{(-1)^{2n-1}=-1}}\cdot\begin{vmatrix} a_1+x & x & x & \ldots & x\\ x & a_2+x & x & \ldots & x\\ x & x & a_3+x & \ldots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-2}+x & \vdots\\ x & x & x & \ldots & x \end{vmatrix} + a_n\cdot\underbrace{(-1)^{n+n}}_{\boxed{(-1)^{2n}=1}}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a_1+x & x & x & \ldots & x\\ x & a_2+x & x & \ldots & x\\ x & x & a_3+x & \ldots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & x & x & \ldots & a_{n-1}+x \end{vmatrix}}_{D(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}$$

$$= a_{n-1}\cdot x\cdot\begin{vmatrix} a_1+x & x & x & \ldots & x\\ x & a_2+x & x & \ldots & x\\ x & x & a_3+x & \ldots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} + a_n\cdot D(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Odpočítame}\\ x\text{-násobok}\\ \text{posledného}\\ \text{riadku}\\ \text{od i-tého riadku}\\ i=1,2,\ldots,n-1\end{array}}$

$$= a_{n-1}\cdot x\cdot\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-2} & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} + a_n\cdot D(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}) = x\cdot a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_n\, D(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$$

$\det(\ldots)=\det(\ldots)$

Odvodili sme rekurentný predpis:

$$\boxed{D(a_1,a_2,\ldots,a_n) = x\cdot a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_n\cdot D(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})}$$

$$\Rightarrow\quad D(a_1,a_2,\ldots,a_n) = x\cdot a_1a_2\cdots a_{n-1} + a_n\left(x\cdot a_1a_2\cdots a_{n-2} + a_{n-1}\cdot D(a_1,a_2,\ldots,a_{n-2})\right)$$

$$= \underbrace{x\cdot a_1a_2\cdots a_{n-1}}_{\text{chýba } a_n} + \underbrace{x\cdot a_1a_2\cdots a_{n-2}\cdot a_n}_{\text{chýba } a_{n-1}} + \boxed{a_n\cdot a_{n-1}}\cdot D(a_1,a_2,\ldots,\underline{a_{n-2}})$$

člen pred a_{n-2}

$$= \ldots = x\cdot\sum_{i=2}^{n} a_1\cdot a_2\cdots\hat{a}_i\cdots a_n + a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_2\cdot D(a_1)$$

vynecháme a_i

Vieme, že $D(a_1)=\det(x+a_1)=x+a_1$.

vynechané a_i

Víme, že $D(a_1) = \det(x+a_1) = x+a_1$.

$$\Rightarrow \quad D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = x \cdot \sum_{i=2}^{n} a_1 \cdot a_2 \cdots \hat{a_i} \cdots a_n + a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_2 \cdot (a_1 + x)$$

$$= \boxed{x \cdot \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vynechané } a_i}}{\hat{a_i}} \cdots a_n + a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_1}$$

Příklad. 8. Vypočtěte determinant matice $2n \times 2n$

$$D_{2n} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Chceme vyjadriť D_{2n} pomocou $D_{2(n-1)}$.
Použijeme 2x Laplaceov rozvoj.

Laplaceov rozvoj podľa 1. stĺpca.

$$D_{2n} = a \cdot \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1} \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}}_{(2n-1)\times(2n-1)} + c \cdot \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{-1} \cdot \det \overbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}}^{(2n-1)\times(2n-1)}$$

Laplaceov rozvoj podľa posledného stĺpca

$$= a \cdot d \cdot \underbrace{(-1)^{(2n-1)\cdot 2}}_{+1} \cdot \det \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}}_{(2n-2)\times(2n-2)}}_{D_{2(n-1)}} - c \cdot b \cdot \underbrace{(-1)^{1+2n-1}}_{+1} \cdot \det \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c & \dots & \dots & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & \dots & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & d \end{pmatrix}}_{(2n-2)\times(2n-2)}}_{D_{2(n-1)}}$$

$$= ad \cdot D_{2(n-1)} - cb\, D_{2(n-1)} = (ad-cb)^{1} D_{2(n-1)} = \dots = (ad-cb)^{n-1} D_{2(n-(n-1))} = (ad-cb)^{n-1} D_2.$$

$$D_{2\cdot 1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - c \cdot b$$

$$\boxed{D_{2n} = (ad-cb)^{n-1} \cdot (ad-cb) = (ad-cb)^n}$$

PRÍKLADY, KTORÉ SME NESTIHLI NA CVIČENÍ :

Příklad. 12. Vypočtěte determinant matice $n \times n$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 & 5 & 6 & \dots & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Každý riadok/stĺpec má rovnaký súčet prvkov.
Pripočítame riadky $r_2, \dots, r_n$ k riadku r_1.

$$= \det\begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix} = a \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

| odpočítame od r_i riadok r_{i+1} pre $i = 2, 3, \dots, n-1$ |

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 1 + 2 + \dots + n \\ &= (n+1) \cdot \frac{n}{2} \end{aligned}}$$

$$= a \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} =$$

| odpočítame r_1 od $r_n, r_{n-1}, \dots, r_2$ |

$$= a \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Laplaceov rozvoj podľa s_n

Laplaceov rozvoj podľa s_1

$$= (-1)^{1+n} \cdot 1 \cdot a \cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ & & & & -n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdot a \cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} -n & & & 0 \\ & -n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -n \end{pmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$= \underbrace{(-1)^{2n-1}}_{-1} \cdot a \cdot (-n)^{n-2} = (-1)^{n-1} \cdot n^{n-2} \cdot \frac{n}{2}(n+1)$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^{n-1}}{2}(n+1)$$

Příklad. 9. Vypočtěte determinant matice $n \times n$

$$D_n = \det \begin{pmatrix} x+2y & x & x & \dots & x & x-y \\ x-y & x+2y & x & \dots & x & x \\ x & x-y & x+2y & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+2y & x \\ x & x & x & \dots & x-y & x+2y \end{pmatrix}.$$

Každý riadok/stĺpec má rovnaký súčet.
Pripočítame všetky riadky k 1. riadku.

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a & a \\ x-y & x+2y & x & \dots & x & x \\ x & x-y & x+2y & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x-y & x+2y \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x-y & x+2y & x & \dots & x & x \\ x & x-y & x+2y & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x-y & x+2y \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{odpočítame od} \\ r_n, r_{n-1}, \dots, r_2 \\ x\text{-násobok } r_1 \end{array} \right|$$

$$a = x\cdot(n-2) + (x-y) + (x+2y) \; \boxed{= n\cdot x - y}$$

$$= a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -y & 2y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y & 2y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y & 2y \end{pmatrix}$$

$$= a \cdot y^{n-1} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{B_n}$$

Vypočítame $B_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ pomocou rekurentnej formule.

Laplaceov rozvoj podľa s_n:

$$B_n = 1 \cdot (-1)^{1+n} \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} + 2 \cdot \underbrace{(-1)^{n+n}}_{+1} \cdot \det \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1\ 2 \end{pmatrix}}_{B_{n-1}}}^{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} + 2 \cdot B_{n-1} = 1 + 2 \cdot B_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad B_n = 1 + 2\cdot B_{n-1} = 1 + 2\cdot(1 + 2\cdot B_{n-2}) = \underbrace{1}_{2^0} + 2^1 + 2^2 \cdot B_{n-2} = \dots = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} \cdot B_{\underbrace{n-(n-2)}_{2}}$$

$$B_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2+1$$

$$B_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} \cdot (2+1) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2-1} = \underline{\underline{2^n - 1}}$$

Vrátime sa k originálnemu výpočtu D_n:

Vrátime sa k originálnemu výpočtu D_n:

$$\boxed{D_n = (n \cdot x - y) \cdot y^{n-1} \cdot (2^n - 1)}$$

Příklad. 3. Pomocí řádkových úprav spočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = \det\left(\begin{array}{c|cc} 1 & a & a^2 \\ \hline 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{array}\right) = \underbrace{\det(1)}_{1} \cdot \det\begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a)$$

$$= (b-a)(c-a)\big(c+a-(b+a)\big)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$

Příklad. 5. Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\tilde{a}_{ij})^T \qquad \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{array}{c|c} & \downarrow j \\ i \rightarrow & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 1 = 5 \qquad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

$$\tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 3^2 = -7 \qquad \tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

$(= \tilde{a}_{12}$, lebo A je symetrická$)$

$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 4 = -1 \qquad \tilde{a}_{13} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7$$

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$$

$$\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$$

$(\tilde{a}_{ij})$ je symetrická matica, preto $(\tilde{a}_{ij}) = (\tilde{a}_{ij})^T$!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot 3 - 27 - 1 - 8 = 10 - 28 = -18$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Skúška:

$$\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \checkmark$$

Příklad. 6. Pomocí algebraických doplňků spočítejte inverzní matici k matici tvaru $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{n \geq 2}$

Potrebujeme spočítať $\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$.

Začneme diagonálnymi prvkami:

- $\widetilde{a_{ii}} = (-1)^{2i} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} = \boxed{1}$ $\boxed{i = 1, 2, \dots, n}$

$n \times n$ horná trojuholníková matica

- $\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j}$ ($j = 2$, $i = 3$) $\boxed{i = j+1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot x = (-1)^{j+1+j} \cdot x = (-1)^{2j+1} \cdot x = \boxed{-x}$$

$(n-1)\times(n-1)$ horná Δ matica

↑ ukážeme si pre $i=3$ a $j=2$, pre ostatné dvojice i a j splňujúce $\boxed{i=j+1}$ bude fungovať rovnako..

- $\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j}$ $\boxed{i = j+2}$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 3 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j}\, x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

odpočítam

$$= (-1)^{i+j} \cdot x^2 = (-1)^{j+2+j}\, x^2 = \underline{x^2}$$

↑ dostanem horná Δ matica

$\Rightarrow$ pre $i > j$ máme $\boxed{\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i-j}\, x^{i-j}}$

- $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}$ $\boxed{i<j}$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vždy dostaneme 0 na diagonále zo spodného riadku !

horná trojuholníková matica

$\det(A) = 1$ pretože A je horná Δ matica

$$(\tilde{a}_{ij})_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i < j \\ (-1)^{i-j} \cdot x^{i-j} & i > j \end{cases} \Rightarrow (A^{-1})_{ij} = \frac{1}{1} \cdot (\tilde{a}_{ij})^T = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & j > i \\ (-1)^{|i-j|}\, x^{|i-j|} & i < j \end{cases}$$

Skúška: – spočítame známym algoritmom

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

spätná Gaussová eliminácia (viď 4. cvičenie) príklad 3.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -x & x^2 & -x^3 & \cdots & (-1)^{n-2} x^{n-2} & (-1)^{n-1} x^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -x & x^2 & \cdots & (-1)^{n-3} x^{n-3} & (-1)^{n-2} x^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x & \cdots & (-1)^{n-4} x^{n-4} & (-1)^{n-3} x^{n-3} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (A^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i > j \\ (-1)^{|j-i|} \cdot x^{|j-i|} & j > i \end{cases}$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 & -x \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$\left((-1)^{|j-i|} \cdot x^{|j-i|} \right. \quad j > i$

✓ se d_i