Príklad. 7. Vypočtěte determinant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Laplaceov rozklad podľa 1. riadku.

$$D_n = (a+1)\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}}_{+1}\cdot D_{n-1} + a\cdot\underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1}\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & a+1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Laplaceov rozklad podľa 1. stĺpca

D_{n-2}

$(n-1)\times(n-1)$

$$= (a+1)\cdot D_{n-1} - a\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot D_{n-2} = (a+1)D_{n-1} - a\cdot D_{n-2}$$

závisí na 2 počiatočných hodnotách

Počítajme:

$$D_1 = \det(a+1) = a+1$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = (a+1)^2 - a = a^2+2a+1-a = a^2+a+1.$$

Vyriešime diferenčnú rovnicu: $D_n = (a+1)D_{n-1} - aD_{n-2}$, $D_1 = a+1$, $D_2 = a^2+a+1$.

Upravujme:

$$D_n = D_{n-1} + a\cdot(D_{n-1} - D_{n-2})$$

$$(D_n - D_{n-1}) = a^1\cdot(D_{n-1} - D_{n-2}) = \dots = a^{n-2}\cdot(\underbrace{D_{n-(n-2)}}_{2} - D_1)$$

$$= a^{n-2}\cdot(a^2+a+1-a-1) = \underline{\underline{a^n}}$$

$$D_n = D_{n-1} + a^n = D_{n-2} + a^{n-1} + a^n = \dots = D_1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

$$= (1+a) + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

Prípadne môžeme postupovať matematickou indukciou:

Ukážeme matematickou indukciou, že $D_n = a^n + a^{n-1} + \dots + 1$.

Nech $D_k = a^k + a^{k-1} + \dots + 1$ pre všetky $k \le n-1$. Ukážeme, že to platí aj pre D_n.

Odvodili sme, že

$$D_n = (a+1)D_{n-1} - aD_{n-2} = (a+1)\left((a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+1)\right) - a\left((a^{n-2}+a^{n-3}+\dots+1)\right)$$

0

$$D_n = (a+1)D_{n-1} - a D_{n-2} = (a+1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+1\right) - a\left(a^{n-2}+a^{n-3}+\dots+1\right)$$

$$= a\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+1\right) = a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1$$

$\boxed{/\!\!/}$

Pr. Určite A^{-1} pre $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pomocou algebraických doplnkov.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left(\tilde{a}_{ij}\right)^T$$

$$\tilde{a}_{11} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{vmatrix} = d \qquad \tilde{a}_{12} = \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{vmatrix} = -c$$

$$\tilde{a}_{22} = \underbrace{(-1)^{2+2}}_{1} \begin{vmatrix} a & \cancel{b} \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{vmatrix} = a \qquad \tilde{a}_{21} = \underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & b \\ \cancel{c} & \cancel{d} \end{vmatrix} = -b$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \boxed{\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Príklad z 1. cvičenia.

Příklad. 5. Řešte soustavu rovnic pro neznámé $x,\ y,\ z$ v závislosti na hodnotách parametru $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & y & + & z & = & a^2 \end{array}$$

Postupujte pomocou det a Cramerovho pravidla

Prepíšeme si sústavu do maticového zápisu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix},\quad w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$A \cdot w = b$ má jediné riešenie $\Leftrightarrow$ existuje A^{-1} t.j.

$$A \cdot w = b \ /A^{-1}$$
$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{E} \cdot w = A^{-1} \cdot b$$
$$\boxed{w = A^{-1} \cdot b}$$

použili sme $A^{-1} \cdot A = E$. $A^{-1}A = E$ sa použije pre dôkaz jednoznačnosti

$$\Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

Počítajme

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot a - (a^3 + 2) = -a^3 + 3a - 2 = 0$$

vidíme, že $a = 1$ spĺňuje podmienku. (obecne skúšame všetky delitele čísla 2)

Podelíme $-a^3+3a-2$ výrazom $a-1$ pomocou Hornerovej schémy:

OPÍSANÉ

a	-1	0	3	-2
1	-1	-1	2	0
1	-1	-2	0	

$\rightarrow$ dostávame $(a-1) \cdot (-a^2 - a + 2) = (-a^3 + 3a - 2)$

skúsime 1 ešte raz

$\rightarrow$ $(a-1)^2(-a-2) = (-a^3+3a-2)$

$a \cdot (-1) + 0 = 1 \cdot (-1) + 0 = -1$

$a \cdot (-1) + 3 = 1 \cdot (-1) + 3 = 2$

Máme

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = -(a-1)^2 \cdot (a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -2$$

Teda sústava má jediné riešenie $\Leftrightarrow a \neq 1, 2$:

Podľa Cramerovho pravidla máme:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{a + a^2 + a^2 - a^4 - 1 - a}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^4 + 2a^2 - 1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{\cancel{-}(a^2-1)^2}{\cancel{-}\cancel{(a-1)^2}(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{(a+2)}$$

$$(a^2-1)^2 = \cancel{(a-1)^2}(a+1)^2$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{a + a^3 + a - a^3 - a^2 - 1}{\det(A)} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{\det(A)} = \frac{\cancel{-}\cancel{(a-1)^2}}{\cancel{-}\cancel{(a-1)^2}(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{a^3 + 1 + a^2 - a^2 - a - a^2}{\det(A)} = \frac{a^3 - a^2 - a + 1}{\det(A)} = \frac{a^2(a-1) - (a-1)}{\det(A)}$$

$$= \frac{(a-1)(a^2-1)}{\det(A)} = \frac{\cancel{(a-1)^2} \cdot (a+1)}{-\cancel{(a-1)^2}(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}$$

$\boxed{\text{Prípad, keď } a = 1}$:

$$= \frac{(a-1)(a^2-1)}{\det(A)} = \frac{\cancel{(a-1)}\cdot(a+1)}{-\cancel{(a-1)}^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}$$

$\boxed{\text{Prípad, keď } a=1}$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$z = t$
$y = s$
$x = 1 - t - s$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Prípad, keď } a=-2}$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{\neq 0}{3} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ NEMÁ RIEŠENIE.

Příklad. 8.* Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení a $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_k) \in V$ lineárně nezávislé, pak jsou rovněž $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ lineárně nezávislé.

- $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_k) \in V$ sú LN $\Rightarrow$ $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ sú LN
- s LZ sa pracuje lepšie, pretože nám hovorí, že nejaká rovnica má netriviálne riešenie

Sporom. Predpokladajme, že $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ sú LZ t.j.

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k = 0$$ má netriviálne riešenie $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

Na rovnicu aplikujeme lin. zobrazenie φ:

$$\varphi(a_1 \cdot u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k) = \varphi(0)$$

$$a_1 \cdot \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \ldots + a_k \varphi(u_k) = 0$$ má netriviálne riešenie $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

$\Rightarrow$ $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_k)$ sú LZ, čo je spor s predpokladom $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_k)$ sú LN

Příklad. 6. V prostoru $\mathbb{R}_1[x]$ uvažujme báze $\alpha = (p_1, p_2)$ a $\beta = (q_1, q_2)$. Najděte polynomy q_1 a p_2 , jestliže $p_1(x) = 1 - 2x$ a $q_2(x) = 3 - 2x$ a matice přechodu je

$$(\mathrm{id})_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vieme, že $(id)_{\beta,\alpha} = \left((p_1)_\beta \;\; (p_2)_\beta \right) = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ t.j. $(p_1)_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $(p_2)_\beta = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ $p_1 = 2\cdot q_1 + 3\cdot q_2 = 2 q_1 + 3\cdot(3-2x)$ $\Rightarrow$ $2q_1 = p_1 - 3\cdot(3-2x) = (1-2x) - 9 + 6x$
$= -8 + 4x$

$\underbrace{p_2 = -7\cdot q_1 + 4q_2 = -7 q_1}_{\text{nepoznáme}} + 4\cdot(3-2x)$ $\qquad \boxed{q_1 = -4+2x}$

$$p_2 = -7\cdot(-4+2x) + 4\cdot(3-2x) = 28 - 14x + 12 - 8x = \boxed{40 - 22x}.$$

Příklad. 7. Platí pro každé dvě reálné čtvercové matice A, B tvaru $n \times n$ rovnost

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

Svou odpověď zdůvodněte.

Počítajme $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2.$

Ak chceme

$\cancel{A^2} + BA + \cancel{AB} + \cancel{B^2} = \cancel{A^2} + \cancel{2}AB + \cancel{B^2}$, potom musí byť $\boxed{BA = A \cdot B}$ t.j. A, B komutujú, čo neplatí vždy.

Zvolme napr. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A teda aj $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$

Příklad. 8. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ udejte příklad bází α, β takových, že matice přechodu je

$$(\mathrm{id})_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

nebo dokažte, že neexistují.

Nech $\alpha = (u_1, u_2)$, $\beta = (v_1, v_2)$, potom $(id)_{\beta,\alpha} = \left((u_1)_\beta \; (u_2)_\beta \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (u_1)_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(u_2)_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_1 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$

$\boxed{u_2} = 2 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2 = 2 \cdot (v_1 + 2v_2) = \boxed{2 \cdot (u_1)}$

$\Rightarrow 2 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 = 0 \Rightarrow u_1, u_2$ sú LZ

$\Rightarrow u_1, u_2$ NIE JE BÁZA.

Teda báze α, β NEEXISTUJÚ.

Příklad. 9. Nalezněte bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ takovou, že souřadnice vektoru $v = (1, 0, 0)$ v bázi α jsou $(1, 1, 1)^T$ a souřadnice vektoru $z = (1, 1, 1)$ v bázi α jsou $(1, 0, 0)^T$. Svou volbu zdůvodněte z definice souřadnic.

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad v = 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 1\cdot u_3 = u_1 + u_2 + u_3 = (1,0,0)$$

dosadíme

$$(z)_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad z = 1\cdot u_1 = u_1 = (1,1,1)$$

$$(1,1,1) + u_2 + u_3 = (1,0,0)$$

$$u_2 + u_3 = (0,-1,-1)$$

zvolme napr. $u_2 = (0,-1,0)$, $u_3 = (0,0,-1)$.

Potom u_1, u_2, u_3 sú iste LN a sú 3 $\Rightarrow$ u_1, u_2, u_3 je báza $\mathbb{R}^3$.

PRÍKLADY, KTORÉ STE NESTIHLI:

Příklad. 5. Napište předpis lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}_9[x]$

$$\varphi(a_1, a_2, ..., a_{20}) = \dots$$

takového, že $\dim \operatorname{im} \varphi = 5$ a $\varphi(1, 0, 1, 0, 1, ..., 1, 0) = x^5$. Napište rovněž bázi obrazu.

Vieme, že:

$\varphi(\underline{1,0,1,0,1,\dots,1,0}) = x^5$

nepárne pozície (liché)

Aby $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 5$, potrebujeme pridať 4 mocniny z $1, x, x^2, x^3, x^4, x^6, \dots, x^9$ do $\operatorname{Im}\varphi$.

Zvolme φ na $\boxed{\text{párnych}}$ (sudých) pozíciách:

$\varphi(e_2) = x^2$

$\varphi(e_4) = x^4$

$\varphi(e_6) = x^6$

$\varphi(e_8) = x^8$

$\varphi(e_5) = x^5$

$\varphi(a_1 e_1 + a_3 e_3 + a_7 e_7 + a_9 e_9 + \dots + a_{20} e_{20}) = 0 \quad \forall a_1, a_3, a_7, a_9, \dots \in \mathbb{R}$.

t.j. φ je 0 inak

Overme, že $\varphi(1,0,1,\dots,0) = x^5$.

$$\varphi(e_1 + e_3 + e_5 + e_7 + \dots + e_{19}) = \underbrace{\varphi(e_1)}_{0} + \underbrace{\varphi(e_3)}_{0} + \underbrace{\varphi(e_5)}_{x^5} + \underbrace{\varphi(e_7)}_{0} + \dots + \underbrace{\varphi(e_{19})}_{0} = x^5 \quad \checkmark$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{20} b_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{20} b_i \varphi(e_i) = b_2 \cdot x^2 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6 + b_8 x^8$$

$\Rightarrow \operatorname{im} \varphi = [x^2, x^4, x^5, x^6, x^8]$ a x^2, x^4, x^5, x^6, x^8 sú LN $\Rightarrow$ x^2, x^4, x^5, x^6, x^8 je báza $\operatorname{im}\varphi$.

$\dim(\operatorname{im}\varphi) = 5$.

Príklad. 3. Nechť U je množina všech matic $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, jejichž řádky jsou lineárně závislé. Zjistěte, zda je U vektorový podprostor ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ Bod pouze za zdůvodnění.

- $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall A \in U$ je $a \cdot A \in U$.

  Nech $A = \begin{pmatrix} c \cdot r_1(A) \\ d \cdot r_1(A) \end{pmatrix}$, potom $a \cdot A = \begin{pmatrix} a \cdot c \cdot r_1(A) \\ a \cdot d \cdot r_1(A) \end{pmatrix} \in U$.

- $\forall A, B \in U$ je $A + B \in U$?

Nech $A = \begin{pmatrix} c \cdot r_1(A) \\ d \cdot r_1(A) \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e \cdot r_1(B) \\ f \cdot r_1(B) \end{pmatrix}$, potom $A + B = \begin{pmatrix} c \cdot r_1(A) + e r_1(B) \\ d \cdot r_1(A) + f \cdot r_1(B) \end{pmatrix}$

nemusí byť násobkom $c \cdot r_1(A) + e \cdot r_1(B)$

Protipríklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zrejme vektory $(1,0)$ a $(0,1)$ sú LN.

Příklad. 4. Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^{50} \to \mathrm{Mat}_{7\times 7}(\mathbb{R})$ a $\psi : \mathrm{Mat}_{7\times 7}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{60}$. Může být složené zobrazení $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^{50} \to \mathbb{R}^{60}$ prosté? Bod pouze za zdůvodnění správné odpovědi.

Lin. zobrazenie φ je prosté $\Leftrightarrow$ $\dim(\ker \varphi) = 0$.

Vidíme, že φ nemôže byť prosté, lebo $\dim(\ker\varphi) = \dim(\mathbb{R}^{50}) \underbrace{- \dim(\mathrm{im}\,\varphi)}_{\geq 49}$ (- obracia nerovnosti)

$\geq 50 - 49 = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{im}\,\varphi \subseteq \mathrm{Mat}_{7\times 7}(\mathbb{R}) \\ \Rightarrow\ &\dim(\mathrm{im}\,\varphi) \leq \dim \mathrm{Mat}_{7\times 7}(\mathbb{R}) \\ &\dim(\mathrm{im}\,\varphi) \leq 7\cdot 7 = 49 \end{aligned}}$$

$\Rightarrow \exists\, u \neq \vec{0} : u \in \ker\varphi$ t.j. $\varphi(u) = \vec{0}$.

Počítajme $(\psi\circ\varphi)(u) \overset{\text{def}}{=} \psi(\varphi(u)) = \psi(\vec{0}) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $u \in \ker(\psi\circ\varphi) \Rightarrow \dim\ker(\psi\circ\varphi) \neq 0$

$u \neq \vec{0}$

$\boxed{\text{Teda } \psi\circ\varphi \text{ NENÍ PROSTÉ}}$

Příklad. 6. Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a nechť $u, v, w \in U$. Dokažte rovnost lineárních obalů

$$[u, v, w, 2u - 3v + 10w] \stackrel{(1)}{=} [u, v, w] \stackrel{(2)}{=} [u, v, 2u - 3v + 10w].$$

(1) Ukážeme 2 inklúzie:

- $[u,v,w, 2u-3v+10w] \supseteq [u,v,w]$

Potrebujeme ukázať, že $\forall a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{K}$: $a_1 u + a_2 v + a_3 w \in \{ b_1 u + b_2 v + b_3 w + b_4 (2u-3v+10w) \mid b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R} \}$.

Zvolíme $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_3 = a_3$, $b_4 = 0$, potom $a_1 u + a_2 v + a_3 w \in [u,v,w, 2u-3v+10w]$.

- $[u,v,w, 2u-3v+10w] \subseteq [u,v,w]$

Potrebujeme ukázať, že $a_1 u + a_2 v + a_3 w + a_4 (2u-3v+10w) \in [u,v,w]$ $\forall a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}$

$$= \underbrace{(a_1+2a_4)}_{b_1} u + \underbrace{(a_2-3a_4)}_{b_2} v + \underbrace{(a_3+10a_4)}_{b_3} w$$

$$= b_1 u + b_2 v + b_3 w \in [u,v,w] \quad \text{(z definície).}$$

(2) Ukážeme 2 inklúzie:

- $[u,v,w] \supseteq [u,v,2u-3v+10w]$

Chceme $a_1 u + a_2 v + a_3 (2u-3v+10w) \in [u,v,w]$. $\forall a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}$

$$\|$$

Upravujme: $\underbrace{(a+2a_3)}_{b_1} u + \underbrace{(a_2-3a_3)}_{b_2} v + \underbrace{10a_3}_{b_3} w = b_1 u + b_2 v + b_3 w \in [u,v,w]$.

- $[u,v,w] \subseteq [u,v,2u-3v+10w]$

Chceme $a_1 u + a_2 v + a_3 w \in [u,v,2u-3v+10w]$

$$\|$$

$$\underbrace{\left(a_1 - \frac{2}{10} a_3\right)}_{b_1} u + \underbrace{\left(a_2 + \frac{3}{10} a_3\right)}_{b_2} v + \underbrace{\frac{a_3}{10}}_{b_3} (2u-3v+10w) \in [u,v,2u-3v+10w]$$

$$\Rightarrow [u,v,w] = [u,v,2u-3v+10w].$$

Příklad. 7. Napište konkrétní předpis lineárního zobrazení $F : \mathbb{R}_{100}[x] \to \mathbb{R}^{50}$ takového, že $\dim \ker F = 70$.

$$F(a_{100}\cdot x^{100} + a_{99}\cdot x^{99} + \dots + a_1 x + a_0) = a_{100}\cdot F(x^{100}) + a_{99} F(x^{99}) + \dots + a_1 F(x) + a_0 \cdot F(1)$$

(každé lin. zobrazenie je určené na vektoroch báze)

Potrebujeme definovať $F(x^i) = ?$

Ak $\dim \ker F = 70$, potom $\dim \operatorname{im} F = \dim(\mathbb{R}_{100}[x]) - \dim \ker F$

$$= 101 - 70 = \underline{31}$$

Definujme:

$$F(x^k) = (0, \dots, 0, \overset{\substack{k+1 \\ \downarrow}}{1}, 0, \dots, 0) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, 30\}$$

$$F(x^k) = (0, 0, \dots, 0) \quad \text{pre } k > 30.$$

Ukážeme, že skutočne $\dim \ker F = 70$. Toto je ekvivalentné k tvrdeniu $\dim(\operatorname{im} F) = 31$ (viď vyššie).

Podľa definície $\operatorname{im} F = [F(x^0), F(x^1), \dots, F(x^{100})]$ ← nulový vektor je v každom podpriestore

$$= [F(x^0), F(x^1), \dots, F(x^{30})]$$

$$= [(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, \overset{\substack{31 \\ \downarrow}}{1}, 0, \dots, 0)]$$

↑ Zrejme tieto vektory sú LN a generujú $\operatorname{im} F$, teda tvoria bázu $\operatorname{im} F$, preto

$\dim \operatorname{im} F = 31$ ∎