3. cvičení z M1110, podzim 2022

Počítání s komplexními čísly

Komplexní čísla

Reálná čísla $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = x \cdot x \geq 0$

Rovnice $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -1$,

nemá řešení v $\mathbb{R}$

Kompl. čísla vznikla „přidáním" čísel k reálným číslům tak, aby počítání s nimi bylo stejné jako s reálnými čísly.

(1) Vezmeme tzv. imaginární jednotku

$$i^2 = -1.$$

(2) Dále vezmeme všechny reálné násobky čísla i

$$a i \quad a \in \mathbb{R}$$

$$a i + b i = (a+b) \cdot i$$

$$(a i) \cdot (b i) = (a \cdot b) \cdot i^2 = -a \cdot b$$

$$1 i = i$$

(3) Vezmeme součty $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d) i$$

$$(a+bi)(c+di) = a \cdot c + a \cdot di + bic + bidi$$

$$= a \cdot c + (ad) i + (bc) i + bd \underbrace{i^2}_{-1} =$$

$$= (a \cdot c - b \cdot d) + (ad + bc) i$$

Počítání $a \in \mathbb{R}$ $a \rightsquigarrow a + 0i \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \qquad 0 = 0 + 0 \cdot i$$

$$(a+bi) + 0 = a + bi$$

$(a+bi)\cdot 1 = (a+bi)(1+0\cdot i) = a+bi$

Opačné kompl. čísla k $z = a+bi$
je číslo $-z = -a-bi$

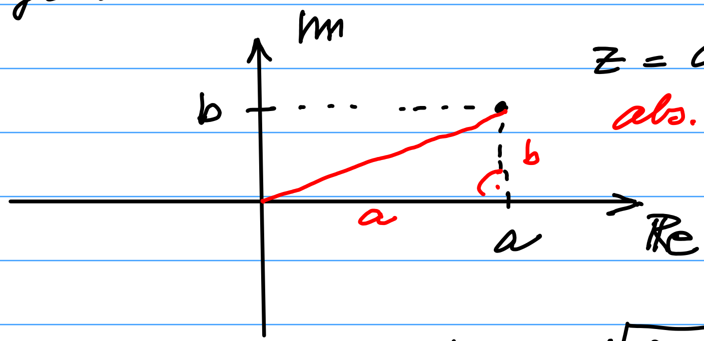
$z+(-z) = a+bi+(-a-bi) = 0+0i = 0$

z_1, z_2 kompl. čísla

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

Převrácené čísla k číslu $z = a+bi \neq 0+0i$

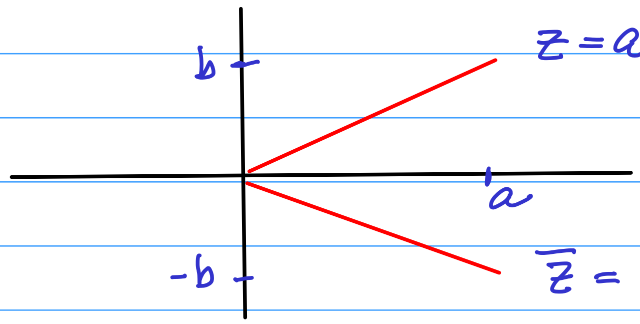
Geometrické zobrazení kompl. čísel



$z = a+ib$

abs. hodnota kompl. čísla
je $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad |a| = \sqrt{a^2+0^2} = |a+0\cdot i|$



$z+\bar{z} = a+ib+a-ib = 2a \in \mathbb{R}$

$z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + bia - b^2 i^2 =$ ($i^2 = -1$)

$= a^2+b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i \qquad \Big| \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Příklad. 1. V oboru komplexních čísel spočtěte a zapište ve tvaru $a + bi$

a) $(1+i)(1+2i)$,

b) $\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$,

c) $\frac{1+i+2i^2-3i^3+i^4+i^5+i^6}{1-5i}$,

d) $\left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^2 - \left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)^2$.

$(1+i)(1+2i) = -1+3i$ ✓

$1-2+3i$

$\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = \frac{2+2i}{2i} = \frac{1+i}{i} = \frac{(-i)(1+i)}{i(-i)}$

$= -i+1$ ✓

$\frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)} \neq \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = -i + \frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}$

$= 1-i$ ✓

(c) $\frac{1+i+2i^2-3i^3+i^4+i^5+i^6}{1-5i} =$

$= \frac{1+i-2+3i+1+i-1}{1-5i} =$

$= \frac{-1+5i}{1-5i} = \underline{\underline{-1}}$

$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$

(d) $\left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^2 - \left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)^2 = \frac{(1+2i)^2}{(1-2i)^2} - \frac{(1-2i)^2}{(1+2i)^2} =$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \frac{z_1^2}{z_2^2}$

$= \frac{-3+4i}{-3-4i} - \frac{-3-4i}{-3+4i} = \frac{(-3+4i)(-3+4i)+(3+4i)(-3-4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}$

+ $3+4i$

$(-3-4i)$

$(1+2i)(1+2i) = \underbrace{1\cdot 1}_{1} + \underbrace{1\cdot 2i + 2i\cdot 1}_{4i} + \underbrace{(2i)(2i)}_{-4}$

$+(-3-4i)(3+4i)$

$$\frac{(-3+4i)^2-(3+4i)^2}{3^2+4^2} = \frac{3^2-4^2-24i-\left((3^2-4^2)+24i\right)}{25}$$

$$= \frac{-48i}{25} = -\frac{48}{25}i$$

Příklad. 2. Vypočtěte absolutní hodnotu komplexního čísla

$$\left|\frac{5+12i}{8-6i}\right|.$$

Počítání s abs. hodnotou v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$L = |(a+ib)(c+id)| = |ac-bd + (ad+bc)i| =$$

$$= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$$

$$\overset{?}{=}$$

$$P = |a+ib|\,|c+id| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d)^2$$

$$L = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2$$

$$P = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad |a-bi| = |a+bi|$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\bar z}{z\cdot\bar z}\right| = \left|\frac{\bar z}{|z|^2}\right| = \frac{1}{|z|^2}\cdot|\bar z| = \frac{1}{|z|^2}|z| = \frac{1}{|z|}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\cdot\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\left|\frac{5+12i}{8-6i}\right| = \frac{|5+12i|}{|8-6i|} = \frac{\sqrt{5^2+12^2}}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{100}} = \frac{13}{10}.$$

Příklad. 3. Najděte všechna komplexní čísla z taková, že

$$z^2 = 3 - 4i$$

a znázorněte je v komplexní rovině.

$$z^2 = 3 - 4i$$

$$z = x + yi$$

$$(x + yi)^2 = 3 - 4i$$

$$x^2 + y^2 i^2 + 2xyi = 3 - 4i$$

$$(x^2 - y^2) + (2xy)i = 3 - 4i$$

$$x^2 - y^2 = 3$$

$$2xy = -4 \qquad x \neq 0,\ y \neq 0$$

$$y = -\frac{4}{2x} = -\frac{2}{x}$$

Dosadíme

$$x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 3$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \qquad / \; x^2$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$a = x^2 \qquad a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot (-4) 1 = 9 + 16 = 25 > 0$$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$x^2 = 4$ nebo -1

x je reálné $\quad x^2 = 4$

$x = 2$ nebo -2

$x = 2,\ y = -\frac{2}{x} = -1 \qquad x = -2,\ y = -\frac{2}{-2} = 1$

Řešení $z_1 = 2 - i$ nebo $z_2 = -2 + i$.

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

Pak jsou řešením kompl. čísla

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{\in \mathbb{R}} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{-D}}{2a}}_{\in \mathbb{R}}$$

$$a\left(\frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}\right) + c =$$

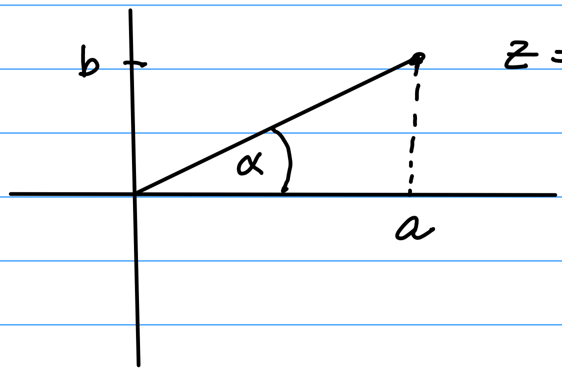
$$= \frac{a}{4a^2}\left(b^2 - (-D) \mp 2ib\sqrt{-D}\right) + \frac{(-b^2 \pm ib\sqrt{-D})}{2a} + c =$$

$$= \frac{1}{4a}\left\{b^2 + D \mp 2ib\sqrt{-D} - 2b^2 \pm 2ib\sqrt{-D} + 4ac\right\}$$

$$= \frac{1}{4a}\left\{-b^2 + b^2 - 4ac \mp 2ib\sqrt{-D} \pm 2ib\sqrt{-D} + 4ac\right\}$$

$$= \frac{0}{4a} = 0.$$

Goniometrický tvar kompl. čísla



$z = a + ib$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$

$$a = |z|\cos\alpha \qquad b = |z|\sin\alpha$$

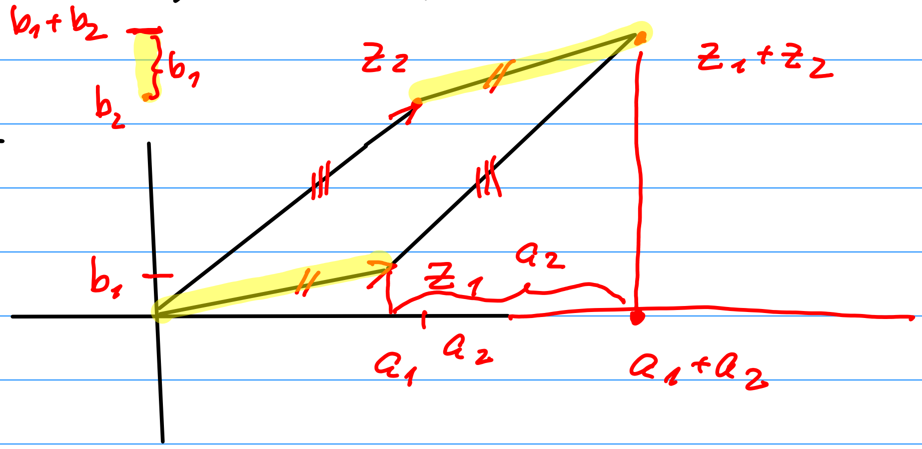
$$z = |z|\cos\alpha + |z|\sin\alpha \cdot i =$$

$= |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

Goniometrický tvar kompl. čísla.

Geometrický význam operací s kompl. čísly

Sčítání



Sčítání kompl. čísel je dáno sčítáním vektorů v rovině.

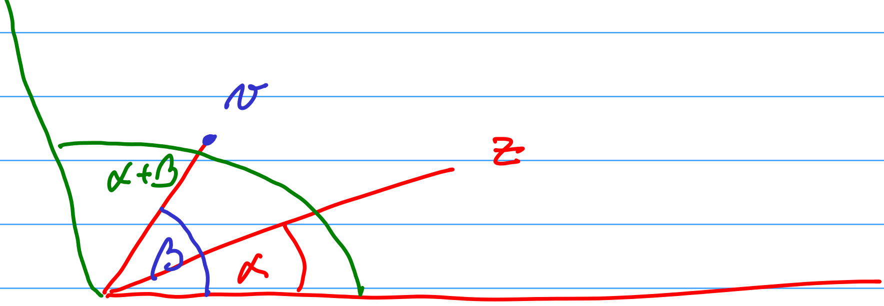
Násobení

$z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha) \qquad v = |v| (\cos\beta + i \sin\beta)$

$$z \cdot v = |z| \cdot |v| (\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\, i \sin\beta + i \sin\alpha \cos\beta + \underbrace{i^2}_{-1} \sin\alpha \sin\beta) =$$

$$= |z||v| (\underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} + i(\underbrace{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}_{\sin(\alpha+\beta)}))$$

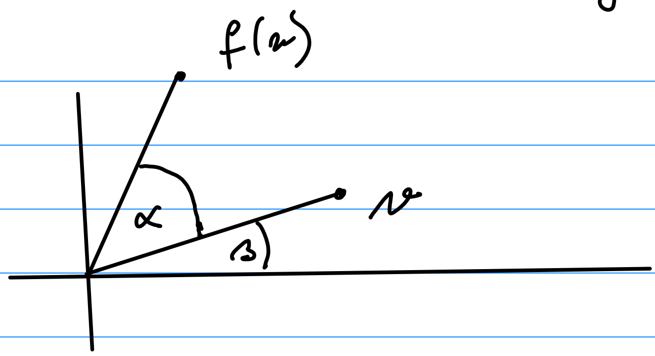
$$z \cdot v = |z||v| (\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta))$$



Zobrazení: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\qquad v = |v|(\cos\beta + i\sin\beta)$

$$f(v) = (\cos\alpha + i \sin\alpha) \cdot v$$
$$= |v| (\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta))$$

Zobrazení třeba geometricky



Minule $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotace o úhel α

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\qquad v = x + iy$

$$f(v) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy)$$

$$= (\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y) + (\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y)\, i$$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taky odpovídá rotaci

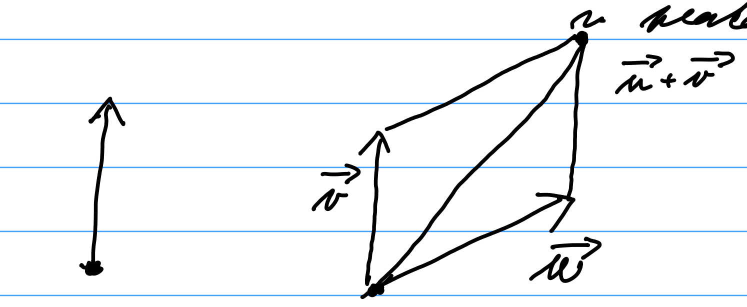
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v \in \mathbb{C} \quad v = x + iy \; \ldots\ldots \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Vektory ze střední školy

byly „orientované úsečky" v rovině v prostoru

Sčítání:

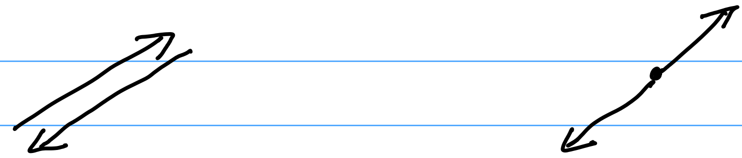


$\vec{o}$ nulový vektor $\qquad \vec{o} = \vec{AA}$

$$\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$$

Opačný vektor $\qquad \vec{u} = \vec{AB} \qquad -\vec{u} = \vec{BA}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$

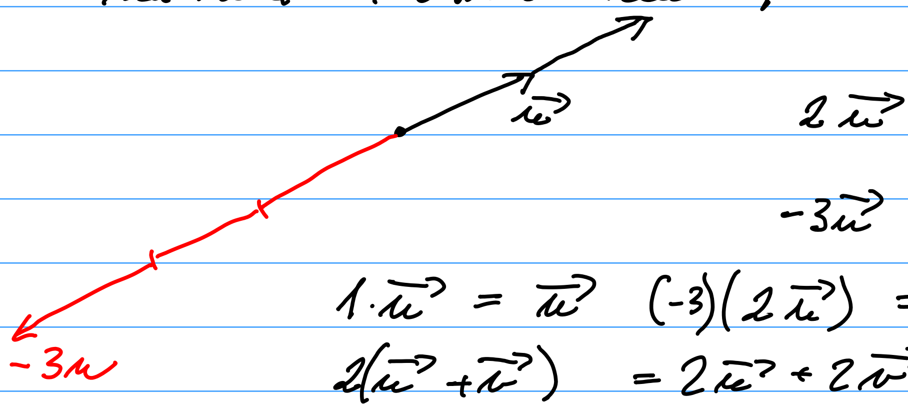


$$(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$$

Sčítání vektorů a vlastnosti tohoto sčítání

Násobení vektoru skalárem

– násobení vektoru reálným číslem



$1\cdot\vec{u} = \vec{u} \qquad (-3)(2\vec{u}) = ((-3)\cdot 2)\,\vec{u} = (-6)\,\vec{u}$

$2(\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

V lin. algebře se provede VELKÉ ZOBECNĚNÍ toho, co je vektor

POJEM VEKT. PROSTORU.

Vekt. prostor je neprázdná množina U (prvky nazýváme vektory) vybavená operacemi:

(1) sčítání $\quad + : U \times U \longrightarrow U$

$$(u, v) \longmapsto u + v$$

(2) násobení skalárem

$$\cdot : \mathbb{K} \times U \longrightarrow U$$

$$(a, u) \longmapsto a \cdot u$$

$\mathbb{K}$ může být $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Tyto operace musí mít 8 zákl. vlastností