

## 8. cvičení z M1110, podzim 2022

**Příklad 1.** Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární.

- (a)  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1x_2$ ,
- (b)  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2)$ ,
- (c)  $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(p) = (p(1), p(2)^2)$ ,
- (d)  $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(p) = (p(1), p(2))$ .

**Příklad 2.** Ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^3$  uvažujme bázi  $u_1 = (1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, 1)$ . Necht'  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1, \varphi(u_2) = u_3, \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici  $A$  tvaru  $3 \times 3$  tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo  $\varphi(x) = Ax$ .

**Příklad 3.** Necht'  $\varphi$  je zobrazení  $\mathbb{R}^3$  do sebe, které je symetrií podle roviny  $x_1 - x_3 = 0$ . Najděte matici  $B$  takovou, že v souřadnicích standardní báze je  $\varphi(x) = Bx$ .

**Příklad 4.** Najděte bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadaného předpisem

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 5.** Najděte nějaké lineární zobrazení  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  takové, že

$$\ker f = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{a} \quad \text{im } f = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

**Příklad 6.** Necht' je lineární zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadáno svými hodnotami na vektorech báze prostoru  $\mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned} \varphi(1, 2, 2, 2) &= (1, -5, 4), \quad \varphi(0, 1, 2, 2) = (1, 2, -3), \quad \varphi(0, 0, 1, 2) = (2, -3, 1), \\ \varphi(0, 0, 0, 1) &= (-3, 1, 2). \end{aligned}$$

Najděte bázi jeho jádra a obrazu.

**Příklad 7.** Napište konkrétní předpis lineárního zobrazení  $F : \mathbb{R}_{100}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{50}$  takového, že  $\dim \ker F = 70$ .

**Příklad 8.\*** Necht'  $\varphi : U \rightarrow V$  je lineární zobrazení a  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ . Dokažte: Jsou-li  $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_k) \in V$  lineárně nezávislé, pak jsou rovněž  $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$  lineárně nezávislé.