5. přednáška: Lineární nezávislost a báze

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ jsou lineárně závislé, jestliže existuje k-tice čísel z $\mathbb{K}$

$$(x_1, x_2, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots, 0),$$

taková, že

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{0}.$$

Příklady: (1) Nulový vektor $\vec{0}$ je lineárně závislý, neboť

$$1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

(2) Vektor $u \in V$ je lineárně závislý, právě když

$$x \cdot u = \vec{0}, \quad x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Rovnici vynásobíme číslem x^{-1} a dostaneme

$$x^{-1}(x \cdot u) = 1 \cdot u = u = \vec{0} = x^{-1} \cdot \vec{0}.$$

Tedy jediný vektor je lineárně závislý, právě když je nulový.

(3) Dva vektory $u, v \in V$. Lineární závislost znamená, že

$$au + bv = \vec{0} \quad \text{kde } a \neq 0 \text{ nebo } b \neq 0.$$

Předpokládejme, že $a \neq 0$. Pak

$$au = -bv$$

Vynásobíme a^{-1} (to můžeme, neboť $a \neq 0$)

$$u = a^{-1}(au) = -a^{-1}bv$$

Tedy u je násobkem vektoru v.

Závěr: Dva vektory jsou lineárně závislé, právě když je jeden násobkem druhého.

(4) Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lineárně závislé, právě když existuje k-tice $(x_1, x_2, \dots x_k) \in K^k$, $(x_1, x_2, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots 0)$ taková, že

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{o}$$

Předpokládejme, že $a_i \neq 0$. Pak dostáváme

$$a_i u_i = -a_1 u_1 - \dots - a_{i-1} u_{i-1} + a_{i+1} u_{i+1} + \dots + a_k u_k$$

Tuto rovnici můžeme vynásobit číslem a_i^{-1}, neboť $a_i \neq 0$:

$$u_i = -a_i^{-1} a_1 u_1 - a_i^{-1} a_2 u_2 - \dots - a_i^{-1} a_{i-1} u_{i-1} + a_i^{-1} a_{i+1} u_{i+1} + \dots a_i^{-1} a_k u_k$$

Tedy u_i je lineární kombinací ostatních vektorů.

Dokázali jsme

Lemma: Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ jsou lineárně nezávislé, právě když jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Pro počítání je lepší používat definici než vlastnost z předchozího lemmatu! Ta další k tomu, abychom o lineární závislosti měli dobrou geometrickou představu.

Definice Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lineárně závislé, jestliže

$$\exists x_1, x_2, \dots x_k \in \mathbb{K} : x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{o} \quad \wedge \quad (x_1, x_2, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots 0)$$

Negací předchozího výroku dostaneme definici lin. nezávislosti:

Definice: Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ jsou lineárně nezávislé, jestliže platí

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{K}: \ x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{0} \Rightarrow (x_1, x_2, \dots x_k) = (0, 0, \dots, 0)$$

Jinými slovy (prakticky pro počítání):
Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ jsou lin. nezávislé, jestliže má rovnice v neznámých $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{K}$

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{0}$$

jediné řešení $(x_1, x_2, \dots x_k) = (0, 0, \dots, 0)$.

Poznámka: k-tice $(x_1, x_2, \dots x_k) = (0, 0, \dots, 0)$ je vždy řešením. Podstatné v definici lin. nezávislosti je to, že žádné DALŠÍ řešení už neexistuje.

Příklad: Jsou vektory $u_1 = (1,2,1,0)$, $u_2 = (1,1,-1,2)$, $u_3 = (1,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$ lineárně nezávislé?

Řešení: Rovnici $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = (0,0,0,0)$ napišme pomocí sloupcového zápisu vektorů takto:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Porovnáním 1., 2., 3. a 4. složky vektorů dostaneme homogenní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešme ji:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = x_2 = x_1 = 0$$

Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

Definice: Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ generují prostor U, jestliže

$$\forall u \in U \ \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K} : u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n .$$

Jinak: Lineární obal $[u_1, u_2, \dots, u_k] = U$

nebo

rovnice $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = u$

s neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$ má řešení.

Definice: Vektorový prostor U je konečné dimenze, jestliže existuje konečná množina vektorů

$u_1, u_2, \dots u_n \in U$,

která jej generuje (tj. $[u_1, u_2, \dots u_n] = U$).

Poznámka – všimněte si, že zde ještě nedefinujeme dimenzi, ale pouze, co to je konečná dimenze!

Příklady: (1) $\mathbb{R}^n$ je prostor konečné dimenze nad $\mathbb{R}$. Každý vektor z $\mathbb{R}^n$ totiž můžeme napsat jako lineární kombinaci vektorů

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ tak to:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbb{R}_n[x]$ je vekt. prostor konečné dimenze, každý polynom stupně $\leq n$ je lin. kombinací polynomů $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x, 1$

(3) Prostor všech polynomů $\mathbb{R}[x]$ není vekt. prostorem konečné dimenze.

(4) $C[0,1]$ množina spojitých funkcí $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ je vektorový prostor, ale nemá konečnou dimenzi.

Definice: Báze vektorového prostoru U nad K je uspořádaná n-tice vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ taková, že

(1) vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ generují prostor U, tj.:
$$\forall u \in U\ \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n : u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

(2) vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislé, tj.:
$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n : a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{o} \Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

Příklady: (1) $\mathbb{R}^3 = U$, $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ je báze $\mathbb{R}^3$. Již víme, že e_1, e_2, e_3 generují $\mathbb{R}^3$. Jsou rovněž lin. nezávislé, protože

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

dává okamžitě $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$.

$\mathbb{R}^3$ má mnoho bází. Jiná je například

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Soustava

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

o neznámých a_1, a_2, a_3 má řešení pro každou pravou stranu $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & b_1\\0 & 1 & 0 & b_2\\1 & 1 & 1 & b_3\end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned}a_1 &= b_1\\ a_2 &= b_2\\ a_3 &= b_3 - b_2 - b_1\end{aligned}$$

Tedy u_1, u_2, u_3 generují $\mathbb{R}^3$.
Dále homogenní soustava

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

má jediné řešení $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Tedy u_1, u_2, u_3 jsou lineárně nezávislé.

(2) $\mathbb{R}_3[x]$ … polynomy stupně ≤ 3
Báze je například: $1, x, x^2, x^3$.

Naším cílem bude dokázat dvě základní věci:

(1) každý vektorový prostor konečné dimenze má bázi

(2) každé dvě báze v prostoru U mají stejný počet prvků

Věta o výběru lineárně nezávislých vektorů

Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ jsou lineárně nezávislé. Nechť $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in U$ jsou libovolné vektory. Potom lze z druhého seznamu vybrat vektory

$$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$$

tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ jsou lineárně nezávislé,

(2) $[v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_\ell]$.

Dříve než přistoupíme k důkazu, odvodíme z něj důležitý důsledek.

Důsledek: Každý seznam lineárně nezávislých vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$ v prostoru konečné dimenze U lze doplnit na bázi prostoru U.

Speciálně: Každý vektorový prostor konečné dimenze má bázi.

Důkaz: Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze. Potom existují vektory $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in U$ takové, že

$[u_1, u_2, \dots u_\ell] = U$. Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ jsou lineárně nezávislé. Podle předchozí věty lze z vektorů $u_1, u_2, \dots u_\ell$ vybrat vektory

$$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$$

tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_r}] = [v_1, v_2, \dots v_k, u_1, u_2, \dots u_\ell]$

$$= [u_1, u_2, \dots u_\ell] = U$$

Odtud již plyne, že $v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ je báze prostoru U.

1. vlastnost říká, že jsou lin. nezávislé. Druhá vlastnost říká, že generují celé U.

$$U \supseteq [v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] \supseteq U \quad \text{(odtud plyne rovnost)}. \ \blacksquare$$

Početní algoritmus pro předchozí větu

Mějme vektory $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in K^n$. Chceme z nich vybrat lin. nezávislé $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ a takové, že

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}] = [u_1, u_2, \dots, u_\ell].$$

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ napíšeme jako sloupce do matice $n \times \ell$. S touto maticí provádíme elementární řádkové operace tak, abychom ji převedli do schodovitého tvaru. V tomto schod. tvaru určíme sloupce $i_1, i_2, \ldots, i_r$, ve kterých leží vedoucí koeficienty řádků. Vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}$ mají požadované vlastnosti.

Zdůvodnění:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \underset{\text{operace}}{\overset{\text{el. řádk.}}{\sim \quad \sim}} \begin{array}{cccc} i_1=1 & i_2=2 & & i_3=4 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

u_1, u_2, u_4 jsou lin. nezávislé

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_4 u_4 = \vec{0}$$

Matice příslušné homogenní soustavy je

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{jako výše}]{\text{stejné el. řádk. operace}} \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_4 = 0, a_2 = 0, a_1 = 0$$

Tedy u_1, u_2, u_4 jsou lin. nezávislé

Nyní ukážeme, že u_3 je lin. kombinací předcházejících vektorů u_1 a u_2. Řešme soustavu

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = u_3$$

Ta má matici.

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{operace jako výše}]{\text{stejné el. řádk.}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava s touto maticí má řešení

Tedy $u_3 = a_1 u_1 + a_2 u_2$.

Nyní $[u_1, u_2, u_4] = [u_1, u_2, a_1 u_1 + a_2 u_2, u_4] = [u_1, u_2, u_3, u_4]$.

Tento algoritmus budeme používat při řešení příkladů! Je dobré umět jeho zdůvodnění.

Důkaz věty o výběru lin. nezávislých vektorů

Dokážeme indukcí pro $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Pro $l = 0$ platí tvrzení automaticky: seznam vektorů u je prázdný, nemáme co vybírat.

Nechť tvrzení platí pro nějaké l, dokážeme ho pro $l+1$. Tedy $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé, $u_1, u_2, \dots, u_{l+1}$ libovolné. Podle indukčního předpokladu lze vybrat $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé,

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_r}] = [v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_l]$

Musíme rozhodnout, zda u_{l+1} vybrat či nevybrat.

(A) Je-li u_{l+1} lineární kombinací $v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}$, pak ho nevybereme. Musíme dokázat, že

$$[v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] = [v_1, \dots, v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}, u_{l+1}]$$

$$= [v_1, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots u_{l+1}]$$

Určitě platí inkluze $\subseteq$ $\subseteq$

Dokažme opačné inkluze. Předpokládáme, že

(*) $\quad u_{l+1} = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j + \sum_{s=1}^{r} b_s u_{i_s}$.

Vektor $w \in [v_1, \dots, v_k, u_1, \dots u_{l+1}]$ lze psát jako

$w = \sum c_j v_j + \sum_{t=1}^{l+1} d_t u_t$

Podle ind. předpokladu je

$w = \sum \bar{c}_j v_j + \sum_{s=1}^{r} \bar{d}_s u_{i_s} + d_{l+1} u_{l+1}$

Za w_{l+1} dosadíme z (*)

$$v = \sum \bar{c}_j v_j + \sum_{s=1}^{r} \bar{d}_s u_{i_s} + d_{l+1} \left(\sum a_j v_j + \sum_{s=1}^{r} b_s u_{i_s} \right)$$

a to je prvek $[v_1 \ldots v_k, u_{i_1} \ldots u_{i_r}]$.

Lineární nezávislost $v_1 \ldots v_k, u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}$ je dána indukčním předpokladem.

(B) Nechť $u_{l+1} \notin [v_1 \ldots v_k, u_{i_1} \ldots u_{i_r}]$. Pak vektor u_{l+1} vybereme. Platí

$$[v_1 \ldots v_k, u_{i_1} \ldots u_{i_r}, u_{l+1}] = [v_1 \ldots v_k, u_1 \ldots u_l, u_{l+1}]$$

Dokážeme, že $v_1 \ldots v_k, u_{i_1} \ldots u_{i_r}, u_{l+1}$ jsou lin. nezávislé.
Nechť $\sum_{j=1}^{k} a_j v_j + \sum_{s=1}^{r} b_s u_{i_s} + d\, u_{l+1} = 0$

Kdyby některé z koeficientů byly nenulové, pak mezi ně musí patřit d. Jinak by totiž $v_1 \ldots, v_k, u_{i_1} \ldots u_{i_r}$ byly lineárně závislé. Pokud je ovšem $d \neq 0$, pak lze u_{l+1} vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $v_1, \ldots, v_k, u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}$, což je ve sporu s naším předpokladem (B). Tedy všechny koeficienty a_j, b_s, d musí být rovny 0, a tedy vektory $v_1, \ldots, v_k, u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}, u_{l+1}$ jsou lineárně nezávislé.

Tím je důkaz indukcí ukončen. $\square$