6. přednáška : Dimenze, souřadnice, podprostory

Minule: Báze prostoru U kon. dimenze je $u_1, u_2, \dots u_n$

1) lin. nezávislé $a_1u_1 + \dots + a_nu_n = \vec{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$
2) generují celý prostor $\forall u \in U \quad u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$

Ukázali jsme, že každý vekt. prost. U konečné dim. má bázi.

Dnes: každé dvě báze mají stejný počet prvků

STEINITZOVA VĚTA

Nechť ve vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$ platí

$$v_1, v_2, \dots, v_k \in [u_1, u_2, \dots u_n]$$

jestliže jsou $v_1, v_2, \dots, v_k$ lin. nezávislé, pak $k \leq n$.

Důkaz nepíšeme – v ISu.

Důsledek věty: Každé dvě báze mají stejný počet prvků.

Pokud U s bázemi $v_1, v_2, \dots v_k$ a $u_1, u_2, \dots, u_n$ a chceme dk, že $k = n$.

1) $v_1, v_2, \dots v_k$ lin. nezávislé, $v_1 \dots v_k \in U = [u_1, u_2, \dots u_n]$
Podle Stein. věty $k \leq n$.

2) $u_1, u_2, \dots u_n$ lin. nezávislé, $u_1, \dots, u_n \in U = [v_1, \dots v_k]$
Podle Stein. věty $n \leq k$.

Dokončení důkazu $k = n$.

Můžeme definovat: Dimenze prostoru U nad $\mathbb{K}$ konečné dimenze je počet vektorů libovolné báze prostoru U.

Značení $\dim_{\mathbb{K}} U$

Příklady ① $U = \mathbb{K}^n$ vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

má bázi $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2, \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

proto $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

② $U = \mathbb{R}_n[x]$ báze $1, x, x^2, \dots, x^n$

proto

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n+1$$

③ $U = \mathbb{C}^2$ vekt. prostor nad $\mathbb{C}$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ báze $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

④ $U = \mathbb{C}^2$ je rovněž vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $a(z_1, z_2) = (az_1, az_2) \in \mathbb{C}^2$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Báze $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$ je $(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$

(1) generují $\mathbb{C}^2$

$$(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) = \underbrace{a_1}_{\in \mathbb{R}}(1,0) + b_1(i,0) + a_2(0,1) + b_2(0,i)$$

(2) jsou lin. nezávislé

$$a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (0,0)$$

$$(a+ib,\ c+id) = (0,0) \in \mathbb{C}^2$$

$$a+ib = 0 \Rightarrow a=0 \wedge b=0$$

$$c+id = 0 \Rightarrow c=0 \wedge d=0$$

$\Rightarrow a = b = c = d = 0$

$\Rightarrow (1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$ jsou lin. nezávislé nad $\mathbb{R}$

Pozor $(1,0)$ a $(i,0)$ jsou lin. závislé nad $\mathbb{C}$

$$(i,0) = i(1,0)$$

Zde je vidět důležitost čtělesa, nad kterým pracujeme.

Proto píšeme $\dim_{\mathbb{K}} U$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, ale $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

4 užitečné věty o dimenzi

① Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a nechť jsou vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineárně nezávislé nad $\mathbb{K}$. Pak tvoří bázi.

② Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a nechť $u_1, u_2, \dots, u_n$ generují U. Pak $u_1, u_2, \dots, u_n$ tvoří bázi.

(3) Je-li $V \subseteq U$ vekt. podprostor a U má konečnou dimenzi, pak V má také konečnou dimenzi a

$$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U.$$

(4) Je-li $V \subseteq U$ vekt. podprostor, $\dim V = \dim U$, pak $V = U$.

Souřadnice vektoru v dané bázi

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ báze prostoru U

Lemma: Pro každý vektor $u \in U$ existuje právě jedna n-tice $(a_1, a_2, \dots a_n)$ čísel z $\mathbb{K}$ taková, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n.$$

Důkaz: Taková n-tice existuje, neboť $u_1 \dots u_n$ generují prostor U.

Nechť

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$
$$u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$$

Chceme dokázat, že $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Rovnice odečteme

$$\vec{0} = (a_1 - b_1) u_1 + (a_2 - b_2) u_2 + \dots + (a_n - b_n) u_n$$

Použijeme, že $u_1, u_2, \dots u_n$ jsou lin. nezávislé

Proto $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$.

$a_1 = b_1, \; a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Definice báze: (1) $\sum a_i u_i = \vec{o} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

(2) $\forall u \; \exists (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

Tvrzení (*) $\forall u \in U \; \exists! (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

Lemma: (1) a (2) $\Rightarrow$ (*)

ale platí i obrácené tvrzení (*) $\Rightarrow$ (1) a (2)

SOUŘADNICE

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

Báze je uspořádaná n-tice $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

Souřadnice vektoru $u \in U$ v bázi α je n-tice čísel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ taková, že

$$u = \underline{a_1} u_1 + \underline{a_2} u_2 + \dots + \underline{a_n} u_n$$

Budeme psát $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Zobrazení $(\;)_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$$u \longmapsto (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Toto zobrazení je bijekce (je prosté a je na)

Příklady ① $U = \mathbb{R}_2[x]$

$\alpha = (1, x, x^2) \qquad \beta = (1, x-1, (x-1)^2)$

Polynom $p(x) = x^2 + x - 1$.

Souřadnice v bázi α

$$p(x) = (-1)\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2$$

$$(p)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Souřadnice v bázi β $\qquad x^2-2x+1$

$$x^2+x-1 = 1\cdot 1 + 3\cdot(x-1) + 1\cdot(x-1)^2$$

$$(p)_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tentýž vektor má v různých bázích různé souřadnice.

Počítání souřadnic – lze vždy převést na řešení soustavy lin. rovnic (rovnic je stejně jako neznámých, jediné řešení).

Průnik a součet vekt. podprostorů

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$V, W \subseteq U$ podprostory

$V \cap W$ je rovněž vekt. podprostor.

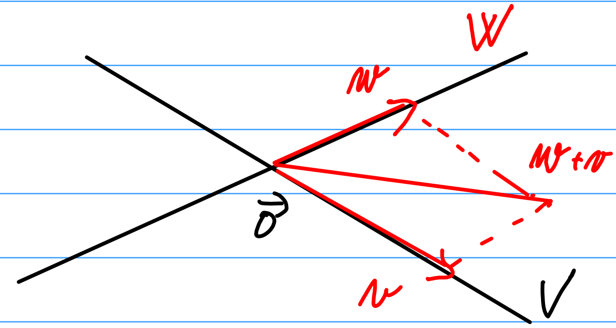
$$u_1, u_2 \in V\cap W \Rightarrow u_1, u_2 \in V \wedge u_1, u_2 \in W$$

$$\Rightarrow u_1+u_2 \in V \wedge u_1+u_2 \in W \Rightarrow u_1+u_2 \in V\cap W.$$

Pro αu_1 analogicky.

Sjednocení $V \cup W$ není obecně vekt. podprostor.

$V + W = \mathbb{R}^2$



$U = \mathbb{R}^2$

$W \cup V$ není vekt. podprostor

$w + v \notin V \cup W$

Sjednocení nahradíme jinou operací, které říkáme součet vekt. podprostorů.

$$V + W = \{u \in U : \exists v \in V, \exists w \in W : u = v + w\}$$

jinak

$$V + W = \{v + w \in U ; v \in V, w \in W\}$$

Lemma: $V + W$ je vekt. podprostor.

Dk: $u_1, u_2 \in V + W$, $u_1 = v_1 + w_1$, $u_2 = v_2 + w_2$,
$v_1, v_2 \in V$
$w_1, w_2 \in W$

$$u_1 + u_2 = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) = \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in V + W$$

Analogicky pro násobek.

11.03

Příklad 2 $\quad U = \mathbb{R}^4$

$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$W = \{(0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4, y_2, y_4 \in \mathbb{R}\}$

$V + W = \mathbb{R}^4$

$$\underbrace{(x_1, x_2, x_3, x_4)}_{} = \underbrace{(x_1, x_2, x_3, -x_1-x_2-x_3)}_{\in V} + \underbrace{(0,0,0, x_1+x_2+x_3+x_4)}_{\in W}$$

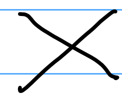
$$V + W = \mathbb{R}^4$$

$$V \cap W \neq \{(0,0,0,0)\} \qquad (0, a, 0, -a) \in V \cap W$$

Říkáme, že součet $V+W$ je <u>direktní</u>, jestliže

$$V \cap W = \{\vec{o}\}$$

Zápis je $V \oplus W$.

1. příklad v $\mathbb{R}^2$  $V \oplus W = \mathbb{R}^2$

2. příklad v $\mathbb{R}^4$ součet není direktní

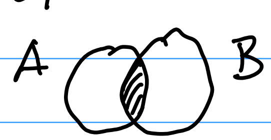
Věta o dimenzích součtu a průniku podprostorů

Nechť V a W jsou podprostory v prostoru U a oba mají konečnou dimenzi. Potom $V \cap W$ i $V+W$ mají konečnou dimenzi a platí

$$\dim_K V + \dim_K W = \dim_K (V+W) + \dim_K (V \cap W)$$

Jde o analogii s tímto:
A, B konečné množiny
$|A|, |B|$ počty prvků

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| \qquad !$$



Počítání součtu $V+W$

$$V = [v_1, v_2, \dots v_k] \qquad W = [w_1, \dots w_e]$$

$$V+W = [v_1, v_2, \dots v_k, w_1, w_2, \dots, w_e]$$

Chceme-li najít bázi $V+W$, pak z vektorů $v_1, \dots v_k, w_1, \dots, w_e$ vybereme lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

Počítání průniku $V \cap W$

$$V = [v_1, v_2, v_3] \qquad W = [w_1, w_2, w_3]$$

$$V \cap W = \{ z \in U : z = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \}$$

Hledáme $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in K$ takové, že

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - b_1 w_1 - b_2 w_2 - b_3 w_3 = \vec{o}$$

vede na hom. soustavu rovnic o neznámých a_i, b_j. Tu vyřešíme

$$b_3 = p \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{array}\right\} \text{není třeba počítat}$$
$$b_2 = q$$
$$b_1 = 3p - 2q$$

$$V \cap W = \{ z = \underset{b_1}{(3p-2q)} w_1 + \underset{b_2}{q} w_2 + \underset{b_3}{p} \cdot w_3 \}$$

$$= \{ p(3w_1 + w_3) + q(-2w_1 + w_2),\ p, q \in K \} =$$

mezikrok $\quad \underline{3p\,w_1} - \underset{\sim\sim}{2q\,w_1} + \underset{\sim\sim}{q\,w_2} + \underline{p\,w_3}$

$= p\,(3w_1 + w_3) + q\,(-2w_1 + w_2)$

$= [\,3w_1 + w_3,\ -2w_1 + w_2\,]$

Chceme-li najít $V \cap W$ musíme z lichého sčítání vyhodit lin. nezávislé se stejným dalem.

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

U, V vektorové prostory nad $\mathbb{K}$

$$\varphi : U \to V$$

je lineární zobrazení, jestliže

(1) $\forall u_1, u_2 \in U \qquad \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

(2) $\forall u \in U, \forall a \in \mathbb{K} \qquad \varphi(au) = a \cdot \varphi(u)$

Příklady (1) $U = V = \mathbb{R} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad , c \in \mathbb{R}$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = cx$$

To je lin. zobrazení:

$$\varphi(x_1 + x_2) = c(x_1 + x_2) = cx_1 + cx_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$
$$\varphi(ax) = c(ax) = acx = a\varphi(x)$$

(2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = cx + d \quad , \quad d \neq 0$

na střední se nazývá lineární funkce, ALE podle naší definice to není lin. zobrazení

$$\varphi(x_1 + x_2) = c(x_1 + x_2) + d = cx_1 + cx_2 + d$$
$$\neq$$
$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = cx_1 + d + cx_2 + d = cx_1 + cx_2 + 2d$$

$$\varphi(ax) = c(ax)+d = acx+d \neq$$
$$a\,\varphi(x) = a(cx+d) = acx+ad \qquad a\neq 1$$

③ NEJDŮLEŽITĚJŠÍ PŘÍKLAD

$U = \mathbb{K}^n$, $V = \mathbb{K}^k$ $\quad A \in Mat_{k\times n}(\mathbb{K})$

$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$$

$$\varphi(x+y) = A(x+y) = Ax+Ay = \varphi(x)+\varphi(y)$$

$a\in\mathbb{K}$ $\quad \varphi(ax) = A(ax) = a\,Ax = a\,\varphi(x)$

Jde o lin. zobrazení.

souvislost
- násobení matic (praxe)
- lin. zobrazení (teorie)

Důsledek: z definice plyne, že pro lin. zobrazení platí

$$\varphi(au_1+bu_2) = \varphi(au_1)+\varphi(bu_2) = a\varphi(u_1)+b\varphi(u_2)$$

Říkáme, že φ zachovává lin. kombinace.

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i\,\varphi(u_i)$$

Dále $\quad \varphi(\vec{o}) = \varphi(0\cdot\vec{u}) = 0\cdot\varphi(\vec{u}) = \vec{o}$.

Další příklady lin. zobrazení později!

Věta: Lin. zobrazení $\varphi: U \to V$ je jednoznačně určeno svými hodnotami na vektorech nějaké báze v U.

Dk: $u_1, u_2, \dots u_n$ pevná báze v U

Pro každý vektor $u \in U$

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$$

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_1^n a_iu_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi(u_i)$$

$$= a_1\varphi(u_1) + a_2\varphi(u_2) + \dots + a_n\varphi(u_n).$$

Hodnota $\varphi(u)$ je určena pomocí vektorů
$\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$
a souřadnic vektoru u.

VÝZNAM – LIN. ZOBRAZENÍ JSOU VELICE JEDNODUCHÁ
– JSOU ZADÁNA KON. POČTEM HODNOT NA VEKTORECH BÁZE

Příklad: Každé lin. zobrazení
$$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
je tvaru
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (a_1\, a_2\, a_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{Př}}$ $\mathbb{R}^3$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e_2 e_3

$\varphi(e_1) = a_1 \in \mathbb{R}$
$\varphi(e_2) = a_2 \in \mathbb{R}$
$\varphi(e_3) = a_3 \in \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi\left(\sum_1^3 x_i e_i\right) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + x_3 \varphi(e_3)$$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 =$$

$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lze ukázat, že každé lin. zobrazení

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$$

je tvaru

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A \in \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$$

Jádro a obraz lin. zobrazení

U, V vekt. prostory nad $\mathbb{K}$,

$\varphi : U \to V$ lin. zobrazení

Jádro lin. zobrazení (kernel)

$$\ker \varphi = \{ u \in U ;\ \varphi(u) = \vec{o} \} \subseteq U$$

Obraz lin. zobrazení (image)

$$\mathrm{im}\, \varphi = \{ v \in V ;\ \exists u \in U\ \ \varphi(u) = v \} \subseteq V$$

Lemma: $\ker\varphi$ je vekt. podprostor v U
$\operatorname{im}\varphi$ je vekt. podprostor ve V

Dk: $\ker\varphi$

$u_1, u_2 \in \ker\varphi, \quad a, b \in K$

$\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \vec{o}$

$\varphi(au_1 + bu_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2) = a\cdot\vec{o} + b\cdot\vec{o} = \vec{o}$

$\Rightarrow au_1 + bu_2 \in \ker\varphi$

VĚTA Lin. zobrazení $\varphi: U \to V$ je prosté, právě když $\ker\varphi = \{\vec{o}\}$.

Důkaz:

$\Rightarrow$ nechť φ je prosté a nechť $u \in \ker\varphi$.
Chceme dk, že $u = \vec{o}$.
Platí
$$\underline{\varphi(u)} = \vec{o} = \underline{\varphi(\vec{o})}$$
φ je prosté $\quad \underline{u = \vec{o}}$

$\Leftarrow$ Nechť $\ker\varphi = \{\vec{o}\}$. Nechť $\varphi(u) = \varphi(v)$.
Chceme dk, že $u = v$ (tedy φ je prosté).
$$\varphi(u) = \varphi(v)$$
$$\varphi(u) - \varphi(v) = \vec{o}$$
$$\varphi(u - v) = \vec{o}$$
$$u - v \in \ker\varphi = \{\vec{o}\}$$
$u - v = \vec{o} \Rightarrow u = v.$