6. přednáška: Dimenze, souřadnice, součty podprostorů

Minule jsme dokázali, že každý vektorový prostor generovaný konečnou množinou vektorů má bázi. Dnes ukážeme, že každé dvě báze mají stejný počet prvků. K tomu potřebujeme tzv. Steinitzovu větu:

Steinitzova věta:

Nechť ve vektorovém prostoru U nad $\mathbb{K}$ platí

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \in [u_1, u_2, \ldots, u_n].$$

Jestliže $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou lineárně nezávislé, pak $k \leq n$.

Důkaz (nepřímý) Místo implikace $A \Rightarrow B$ dokazujeme $\neg B \Rightarrow \neg A$. Zde A: $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou lin. nezávislé, B: $k \leq n$.

Nechť tedy $k > n$. Potom platí

$$(*)\quad \begin{cases} v_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \cdots + a_{n1} u_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \\ v_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{n2} u_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \\ \cdots\cdots \\ v_k = a_{1k} u_1 + a_{2k} u_2 + \cdots + a_{nk} u_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Všechny rovnice $(*)$ můžeme pomocí maticového násobení zapsat takto:

$$(v_1, v_2, \ldots v_k) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$(v_1, v_2 \dots v_k) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot A,$$

kde A má rozměry $n \times k$. Protože předpokládáme $k > n$, má homogenní soustava o k neznámých $x_1, x_2, \dots, x_k$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

netriviální řešení (neznámých je více než vedoucích koeficientů ve schod. tvaru matice A), tedy

$$(x_1, x_2, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots 0)$$

Spočítáme lineární kombinaci vektorů $v_1, \dots v_k$ s těmito koeficienty $x_1, x_2, \dots, x_k$:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = (v_1, v_2, \dots, v_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} =$$

$$= \left((u_1, u_2, \dots u_n) \, A \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \left(A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right)$$

$$= (u_1, u_2, \dots u_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Dokázali jsme, že existuje k-tice $(x_1, x_2, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$ taková, že $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = \vec{o}$.
Tedy $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lineárně závislé. Tím je nepřímý důkaz dokončen.

$\square$

Důsledek: Každé dvě báze prostoru U konečné dimenze mají stejný počet prvků.

Důkaz pomocí Steinitzovy věty:

Nechť $(v_1, \dots v_k)$ a $(u_1, \dots, u_n)$ jsou dvě báze prostoru U. Potom

$v_1, v_2, \dots v_k \in U = [u_1, \dots, u_n]$ a $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lineárně nezávislé. Podle Steinitzovy věty $k \leq n$.

Obráceně: $u_1, u_2, \dots u_n \in U = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ a $u_1, u_2, \dots u_n$ jsou lin. nezávislé. Podle Steinitzovy věty $n \leq k$.

Dohromady $k = n$, obě báze mají stejný počet prvků. $\square$

Definice dimenze: Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{K}$. Dimenze vekt. prostoru U nad $\mathbb{K}$ je počet vektorů nějaké báze prostoru U. Značíme

$$\dim_{\mathbb{K}} U$$

Příklady: ① $U = \mathbb{K}^n$ vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ má bázi

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$ $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tedy $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

② $U = \mathbb{R}_n[x]$ má bázi $1, x, x^2, \dots, x^n$. Tedy

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[x] = n+1.$$

③ $U = \mathbb{C}^2$ je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Již jsme si ukázali, že $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$.

Současně $U = \mathbb{C}^2$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$. Báze $\mathbb{C}^2$ jako vekt. prostoru nad $\mathbb{R}$ je $(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$.
Proto $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Zřejmě dané 4 vektory generují $\mathbb{C}^2$: $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$
$(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) = a_1(1,0) + b_1(i,0) + a_2(0,1) + b_2(0,i)$
Současně jsou lin. nezávislé nad $\mathbb{R}$, neboť

$$a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (0,0)$$

znamená, že

$$(a+ib, c+id) = (0,0)$$

Tedy $a=0, b=0, c=0, d=0$.

4 užitečné věty o bázi a dimenzi

① Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou lin. nezávislé. Pak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tvoří bázi prostoru U.

② Nechť $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ a $u_1, u_2, \ldots, u_n$ generují prostor U, pak $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tvoří bázi prostoru U.

③ Nechť V je vektorový podprostor v prostoru U konečné dimenze. Pak V má konečnou dimenzi a platí

$$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U.$$

④ Je-li $V \subseteq U$ vekt. podprostor a $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U$, pak $V = U$.

Důkazy: (1) Každý seznam lin. nezávislých vektorů lze doplnit na bázi. Kdybychom k $v_1, v_2, \ldots, v_n$ přidali nějaký vektor, tak báze má aspoň $n+1$ prvků. Spor s tím, že $\dim_{\mathbb{K}} U = n$.

(2) Z každého seznamu generujících prvků lze vybrat bázi. Kdybychom z vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nějaký vynechali, dostaneme bázi s nejvýše $n-1$ prvky. Ale $\dim_{\mathbb{K}} U = n$.

(3) Nechť $V \subseteq U$, $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Kdyby dimense V nebyla konečná, uměli bychom vybrat aspoň $n+1$ lin. nezávislých vektorů $v_1, \ldots v_{n+1} \in V \subseteq U$. V U ale nemůže existovat $n+1$ lin. nezávislých vektorů. Dále každou bázi V lze (jako lin. nezávislé vektory v U) doplnit na bázi U. Proto

$$\dim_{\mathbb{K}} V \leq \dim_{\mathbb{K}} U$$

(4) Nechť $V \subseteq U$, $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U$. Nechť $v_1, \ldots v_k$ je báze V. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé v U a jejich počet je roven $\dim_{\mathbb{K}} U$ ($\text{neb} = \dim_{\mathbb{K}} V$). Proto $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tvoří bázi celého U.
A tedy

$$V = [v_1, v_2, \ldots v_k] = U . \qquad \square$$

Souřadnice vektoru v dané bázi

Nechť U je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a uspořádaná n-tice vektorů $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ jeho báze. Pak každý vektor $u \in U$ lze psát právě jedním způsobem jako lineární kombinace vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$\forall u \in U \; \exists! (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$.

Důkaz: nechť $\quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$

$\quad u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$

Odečtením dostaneme: $\vec{0} = (a_1 - b_1) u_1 + (a_2 - b_2) u_2 + \dots + (a_n - b_n) u_n$

Protože jsou vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ lineárně nezávislé, musí být

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0$$

Tedy $\quad a_1 = b_1, \; a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Zápis je jednoznačný. Vzhledem k tomu, že $(u_1, \dots u_n)$ generují prostor U, tak nějaká n-tice čísel $a_1, a_2, \dots a_n$ taková, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

musí existovat. $\square$

Definice souřadnic: Souřadnice vektoru $u \in U$ v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je n-tice čísel $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ taková, že

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Píšeme
$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Zobrazení $(\;)_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$ je bijekce (zobrazení prosté a na).

Příklad $\quad U = \mathbb{R}_2[x] \quad$ Báze $\alpha = (1, x, x^2)$, $\beta = (1, x-1, (x-1)^2)$

Polynom $\quad p(x) = x^2 + x - 1$

$$p(x) = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 \qquad (p)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Souřadnice polynomu p v bázi B jsou

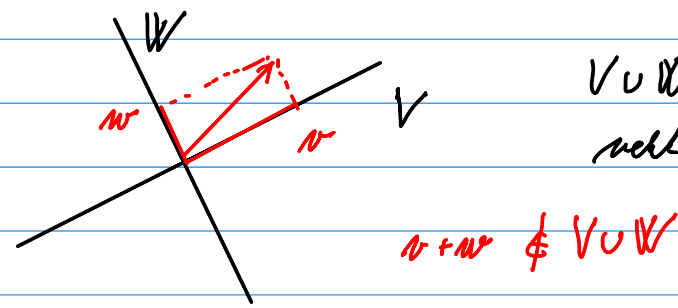
$$x^2+x+1 = 1\cdot 1 + 3\cdot(x-1) + 1\cdot(x-1)^2 =$$
$$= 1+3x-3+x^2-2x+1 = x^2+x-1$$

$(p)_B = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ Stejný polynom má v různých bázích různé souřadnice.

Průnik a součet vektorových podprostorů

Nechť V a W jsou vektorové podprostory v U. Potom jejich průnik $V \cap W$ je rovněž vekt. podprostor.

Sjednocení vekt. podprostorů $V \cup W$ obecně není vektorový podprostor: Příkladem je $U = \mathbb{R}^2$ s vyznačenými podprostory



$V \cup W$ není vekt. podprostor

Proto definujeme:

Součet vekt. podprostorů $V, W \subseteq U$ je
$$V + W = \{u \in U : \exists v \in V\ \exists w \in W : u = v + w\}$$
Jiný zápis
$$V + W = \{v + w \in U ;\ v \in V,\ w \in W\}.$$

Lemma Součet vekt. podprostorů je opět vekt. podprostor.

Důkaz: Protože V a W jsou neprázdné (např. $\vec{o} \in V$, $\vec{o} \in W$) je rovněž $V+W$ neprázdný ($\vec{o}+\vec{o} = \vec{o} \in V+W$).

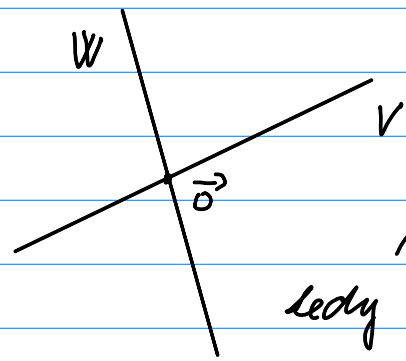
Nechť $u_1, u_2 \in V+W$. Pak $u_1 = v_1+w_1$, $u_2 = v_2+w_2$, $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$. Potom

$$u_1+u_2 = (v_1+w_1)+(v_2+w_2) = (\underbrace{v_1+v_2}_{V}) + (\underbrace{w_1+w_2}_{W}) \in V+W$$

Analogicky pro násobek.

Součet $V+W$ vektorových podprostorů nazýváme direktní, jestliže $V \cap W = \{o\}$. V tomto případě píšeme $V \oplus W$.

Příklad ① $U = \mathbb{R}^2$



$V+W = \mathbb{R}^2$

navíc $V \cap W = \{\vec{o}\}$, tedy součet je direktní.

② $U = \mathbb{R}^4$ $\quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ \sum_{i=1}^{4} x_i = 0\}$

$W = \{(0, y_2, 0, y_4) \in \mathbb{R}^4;\ y_2, y_4 \in \mathbb{R}\}$

Platí $V + W = \mathbb{R}^4$ neboť

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{(x_1, x_2, x_3, -x_1-x_2-x_3)}_{\in V} + \underbrace{(0, 0, 0, x_1+x_2+x_3+x_4)}_{\in W}$$

ale $V \cap W \neq \{\vec{o}\}$, neboť např. $(0, a, 0, -a) \in V \cap W$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

Věta o dimenzích součtu a průniku

Nechť U je vektorový prostor konečné dimenze, V a W jeho podprostory. Pak platí

$$\dim V + \dim W = \dim(V+W) + \dim(V\cap W) .$$

Důkaz: Máme podprostory

$$\begin{array}{ccccc} & \subseteq & V & \subseteq & \\ V\cap W & & & & V+W \\ & \subseteq & W & \subseteq & \end{array}$$

Dimenze je počet vektorů báze.

Nechť báze $V\cap W$ je $u_1, u_2, .. u_k$.

Doplníme ji na bázi V : $u_1, u_2, .., u_k, v_1 \dots v_l$

Stejně tak doplníme na bázi W : $u_1, u_2, .., u_k, w_1, \dots, w_m$

Tedy

$$\dim V\cap W = k$$
$$\dim V = k+l$$
$$\dim W = k+m$$

Dokážeme-li, že $\dim V+W = k+l+m$, tak výše uvedená formule platí. K tomu nám stačí dokázat, že vektory $u_1, .., u_k, v_1 \dots v_l, w_1 \dots w_m$ tvoří bázi $V+W$

1) Vektory $u_1,..,u_k, v_1,..,v_l, w_1,..,w_m$ generují $V+W$:
každý vektor z $V+W$ je tvaru $v+w$, kde $v\in V$ a $w\in W$.
Pak

$$v = a_1u_1 + .. + a_ku_k + b_1v_1 + .. + b_lv_l$$
$$w = c_1u_1 + .. + c_ku_k + d_1w_1 + .. + d_mw_m$$

Proto $v+w$ je lineární kombinací vektorů u_i, v_j, w_s.

2) Vektory $u_1,..,u_k, v_1,..,v_l, w_1,..,w_m$ jsou lin. nezávislé
Nechť

$$a_1u_1 + .. + a_ku_k + b_1v_1 + .. + b_lv_l + c_1w_1 + .. + c_mw_m = \vec{0}$$

Tedy $V \ni a_1u_1 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + \dots + b_\ell v_\ell = -c_1w_1 - \dots - c_mw_m \in W$

Proto tento vektor leží ve $V \cap W$, odtud

$$-c_1w_1 - \dots - c_mw_m = d_1u_1 + \dots + d_ku_k$$

Úpravou $\vec{o} = d_1u_1 + \dots + d_ku_k + c_1w_1 + \dots + c_mw_m$

Vektory $u_1, \dots u_k, w_1, \dots w_m$ tvoří bázi, jsou lin. nezávislé, proto

$$d_1 = \dots = d_k = c_1 = \dots = c_m = 0$$

Dosazením do 1. rovnice dostaneme:

$$a_1u_1 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + \dots + b_\ell v_\ell = \vec{o}$$

Vektory $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots v_\ell$ jsou lin. nezávislé, proto

$$a_1 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_\ell = 0.$$

Tedy $a_i = b_j = c_s = 0$ a daná $(k+\ell+m)$-tice vektorů je lineárně nezávislá. □

Příklad Součet podprostorů

$$V = [v_1, \dots v_k],\quad W = [w_1, w_2, \dots, w_\ell] \subseteq U$$

Potom

$$V + W = [v_1, \dots v_k, w_1, w_2 \dots w_\ell].$$

Chceme-li najít bázi $V+W$ stačí z těchto vektorů vybrat lineárně nezávislé se stejným lineárním obalem. To už umíme.

Příklad, jak počítat průnik podprostorů

$$V = [v_1, v_2, v_3],\quad W = [w_1, w_2, w_3] \subseteq U$$

$$V \cap W = \{ z \in U : z = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3 \}$$

Hledáme $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{K}$ tak, aby

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3$$

Rovnice

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 - b_1 w_1 - b_2 w_2 - b_3 w_3 = \vec{0}$$

vede na homogenní soustavu rovnic o 6 neznámých. Soustavu vyřešíme. Nechť je řešení například

$$\left.\begin{array}{ll} b_3 = p & a_3 = \\ b_2 = q & a_2 = \\ b_1 = 3p - 2q & a_1 = \end{array}\right\} \text{nemusíme dopočítat}$$

Jak z tohoto řešení dostaneme $V \cap W$ a jeho bázi?

$V \cap W = \{ z = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$, kde b_1, b_2, b_3 je řešení soustavy $\}$

$= \{ z = (3p - 2q) w_1 + q w_2 + p w_3, \quad p, q \in \mathbb{R} \}$

$= \{ p(3w_1 + w_3) + q(-2w_1 + w_2) \} = [3w_1 + w_3, -2w_1 + w_2]$.

Bázi $V \cap W$ vybereme z vektorů

$$3w_1 + w_3, -2w_1 + w_2$$

(lin. nezávislé se stejným lin. obalem).

Lineární zobrazení

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$.
Zobrazení $\varphi : U \to V$ se nazývá LINEÁRNÍ, jestliže
(1) $\forall u_1, u_2 \in U \qquad \varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$
(2) $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall u \in U \qquad \varphi(au) = a\varphi(u)$.

Tyto dvě podmínky můžeme zapsat podmínkou jedinou:

(*) $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall u_1, u_2 \in U \qquad \varphi(au_1 + bu_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2)$
Říkáme, že lin. zobrazení „zachovává lineární kombinace".

Speciálně platí $\varphi(\vec{o}) = \varphi(0 \cdot u) = 0 \cdot \varphi(u) = \vec{o}$.

Příklady: ① $U = V = \mathbb{R} \qquad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = cx$
Platí

$$\varphi(x_1+x_2) = c(x_1+x_2) = cx_1 + cx_2 = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$
$a \in \mathbb{R}$: $\varphi(ax) = c(ax) = a(cx) = a\varphi(x)$

② $U = V = \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = cx + d, \qquad d \neq 0$
není lineární zobrazení podle naší definice

$$\varphi(x_1+x_2) = c(x_1+x_2) + d = cx_1 + cx_2 + d$$
$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = cx_1 + d + cx_2 + d = cx_1 + cx_2 + 2d \qquad \#$$

$$\varphi(ax) = c(ax) + d = acx + d$$
$$a\varphi(x) = a(cx+d) = acx + ad \qquad \# \quad \text{pro } a \neq 1$$

③ Nejdůležitější příklad $\quad U = \mathbb{K}^n, \quad V = \mathbb{K}^k$
$A \in Mat_{k \times n}(\mathbb{K})$

Definujeme

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k \qquad \varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Jde o lineární zobrazení:

$$\varphi(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(ax) = A(ax) = aAx = a\varphi(x).$$

(4) $U = \mathbb{R}^M = \{f : M \to \mathbb{R}\}$ $\quad V = \mathbb{R}$, $m_0 \in M$ pevné

$\varphi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R} \qquad \varphi(f) = f(m_0)$

je lineární zobrazení

$$\varphi(f+g) = (f+g)(m_0) = f(m_0) + g(m_0) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(af) = (af)(m_0) = af(m_0) = a\varphi(f)$$

(5) Derivace $\quad U = \{$diferencovatelné funkce na intervalu $I\}$

$V = \{$funkce na intervalu $I\}$

$\varphi : U \to V \qquad \varphi(f) = f'$ derivace funkce f

Jde o lineární zobrazení

$$\varphi(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(af) = (af)' = af' = a\varphi(f).$$

(6) $U = C[a,b]$, $\quad V = \mathbb{R}$

$$\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R} \qquad \varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

φ je lineární zobrazení

$$\varphi(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \varphi(f) + \varphi(g)$$

Analogicky pro násobek

(7) Geometrická zobrazení v rovině
- otočení kolem počátku o úhel α v $\mathbb{R}^2$
- symetrie podle přímky procházející počátkem v $\mathbb{R}^2$
- otočení kolem osy procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$
- symetrie podle roviny (přímky) procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$

Věta Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$, kde V je konečně dimenzionální prostor je jednoznačně určeno svými hodnotami na vektorech nějaké báze.

Důkaz: Nechť $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ je pevně zvolená báze prostoru U. Nechť $u \in U$ je libovolný vektor. Potom

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n,$$

kde čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ jsou jednoznačně určená. Proto

$$\varphi(u) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(u_i).$$

Tedy $\varphi(u)$ je jednoznačně určen hodnotami φ na vektorech báze.

Příklad Každé lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je tvaru

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

pro nějaká a_1, a_2, a_3.

Důkaz: Nechť obrazy vektorů standardní báze e_1, e_2, e_3

v $\mathbb{R}^3$ jsou $\varphi(e_1) = a_1$, $\varphi(e_2) = a_2$, $\varphi(e_3) = a_3$

Potom

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i a_i =$$

$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

Analogicky lze dokázat:

Každé lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ je tvaru

$$\varphi(x) = Ax \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

To to ukazuje souvislost mezi lineárními zobrazeními a maticemi.

Jádro a obraz lineárního zobrazení

Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení.

Jádro lineárního zobrazení je množina

$$\ker \varphi = \{ u \in U,\ \varphi(u) = \vec{o} \}$$

Obraz lineárního zobrazení je množina

$$\operatorname{im} \varphi = \{ v \in V,\ \exists u \in U : \varphi(u) = v \}$$

Lemma $\ker \varphi$ je vektorový podprostor v U a $\operatorname{im} \varphi$ je vektorový podprostor ve V.

Důkaz provedeme pouze pro jádro: Nechť $u_1, u_2 \in \ker \varphi$, pak $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \vec{o}$. Potom $\varphi(a u_1 + b u_2) =$
$= a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2) = a \cdot \vec{o} + b \cdot \vec{o} = \vec{o}$. Tedy $a u_1 + b u_2 \in \ker \varphi$.