10. přednáška APLIKACE DETERMINANTU

Cramerovo pravidlo

$$A x = b$$

A matice $n \times n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Věta: jestliže $\det A \neq 0$, pak má soustava právě jedno řešení a platí

$$x_i = \frac{\det (s_1 A \;\; s_2 A \ldots \underbrace{b}_{i\text{-tý sloupec}} \ldots s_n A)}{\det A}$$

Dk: A 3×3

Rovnici lze psát

$$x_1 s_1(A) + x_2 s_2(A) + x_3 s_3(A) = b$$

To implikuje rovnost matic

$$\left(s_1(A) \quad x_1 s_1(A) + x_2 s_2(A) + x_3 s_3(A) \quad s_3(A) \right)$$

$$\approx \left(s_1(A) \quad b \quad s_3(A) \right)$$

Rovnost determinantů $s_i(A) = s_i$

$$\det (s_1 | x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 | s_3) = \det (s_1 | b | s_3)$$

$$\det(s_1 \mid x_1 s_1 \mid s_3) + \det(s_1 \mid x_2 s_2 \mid s_3) + \det(s_1 \mid x_3 s_3 \mid s_3)$$
$$= \det(s_1 \mid b \mid s_3)$$

$$\underbrace{x_1 \det(s_1 \mid s_1 \mid s_3)}_{0} + \underbrace{x_2 \det(s_1 \mid s_2 \mid s_3)}_{x_2 \det A} + \underbrace{x_3 \det(s_1 \mid s_3 \mid s_3)}_{0}$$
$$= \det(s_1 \mid b \mid s_3)$$

$$x_2 \det A = \det(s_1 \mid b \mid s_3)$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\det(s_1 \mid b \mid s_3)}{\det A}.$$

Příklad – je v přípravě na přednášku

Věta (nulovost determinantu)

Nechť A je matice $n \times n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $\det A = 0$
(2) Řádky matice A jsou lin. závislé.
(3) Sloupce matice A jsou lin. závislé.

Důkaz: (2) $\Rightarrow$ (1) Nechť řádky $s_1, s_2 \dots s_n$ matice A jsou lin. závislé. Pak pro nějaké i je

$$s_i = c_1 s_1 + \dots c_{i-1} s_{i-1} + c_{i+1} s_{i+1} + \dots c_n s_n$$

V matici A od řádku si odečteme c_1-násobek 1. řádku, c_2-násobek 2. řádku atd. Dostaneme matici B, která má i-tý řádek nulový

$$0 = \det B = \det A$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Nechť $\det A = 0$. Element. řádk. úpravami upravíme A na schod. tvar B. Přitom platí $\det B \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$.
$\det A = 0 \Rightarrow \det B = 0 \Rightarrow$ na diagonále je nulové číslo $\Rightarrow$ poslední řádek matice B je roven $(0\ 0 \dots 0)$.
Tento řádek jsme při úpravách dostali jako netriviální lin. kombinaci řádků matice A. Proto jsou řádky matice A lineárně závislé.

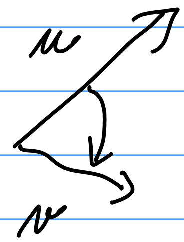
(1) $\Leftrightarrow$ (3) Dostaneme z (1) $\Leftrightarrow$ (2) přechodem od matice A k transponované matici A^T

$$\det A = \det A^T$$

Geometrické aplikace

Orientace v $\mathbb{R}^2$ dvojice vektorů (u, v)
$u, v \in \mathbb{R}^2$ lin. nez.

proti směru hod. ručiček
kladná orientace



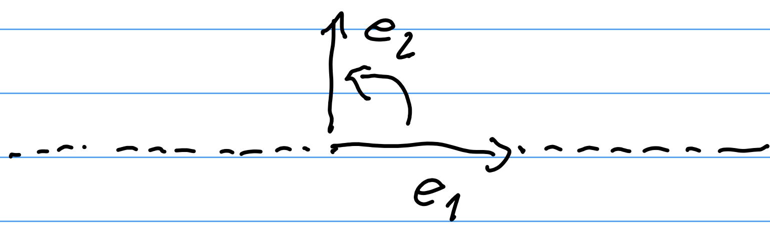
ve směru hod. ručiček
záporná orientace

Orientaci realizujeme pomocí det
Matice $(u|v)$ má sloupce u a v. 2×2

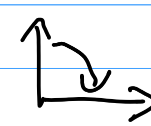
$\det(u|v) > 0$ kladná orientace

$\det(u|v) < 0$ záporná orientace

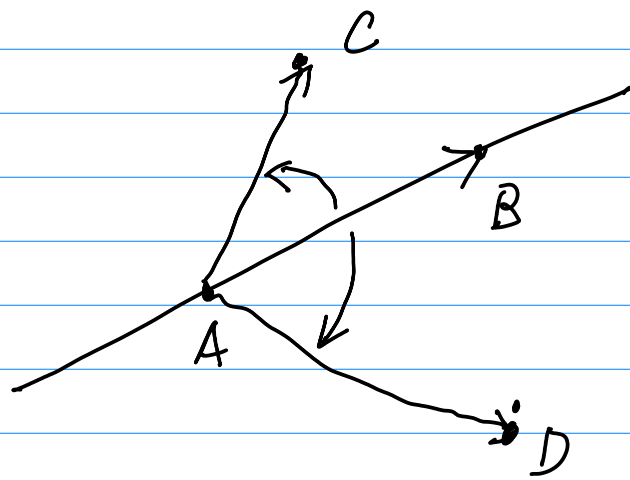
$$\det(e_1|e_2) = \det E = 1 > 0$$



$\det(e_2|e_1) = -1 < 0$



Příklad Přímka AB a body C, D.
Jak poznáme, že body C, D leží ve stejné polorovině určené přímkou AB



znaménko $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq$ znaménko $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

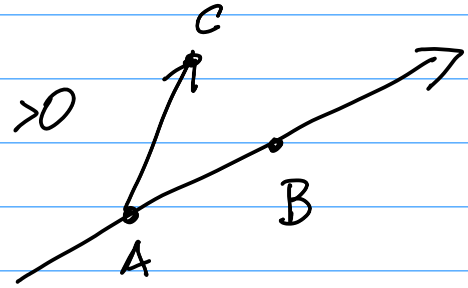
leží v různých polorovinách

=

ve stejných polorovinách

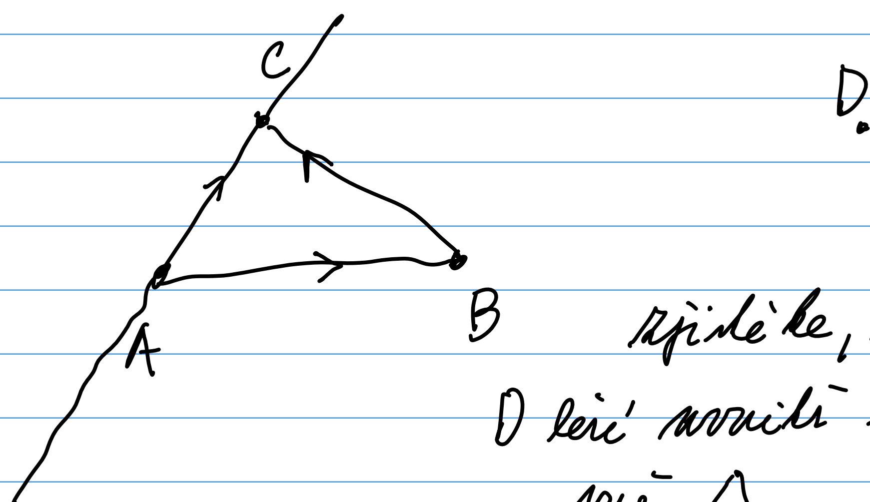
C leží vlevo od orient. přímky $\overrightarrow{AB}$ právě když

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$



vpravo, jestliže $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 0$.

C leží na přímce AB, jestliže $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.



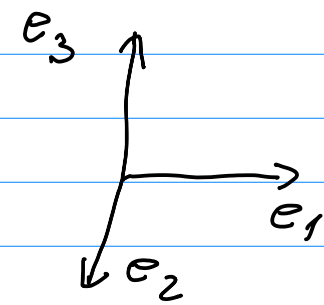
zjistěte, zda D leží uvnitř nebo vně Δ.

Orientace v $\mathbb{R}^3$

Uspořádaná trojice vektorů (u, v, w) lin. nezávislé.

jsou orient. kladně jestliže $\det(u|v|w) > 0$
záporně —||— $\det < 0$.

Příklad Stand. báze $\mathbb{R}^3$ e_1, e_2, e_3

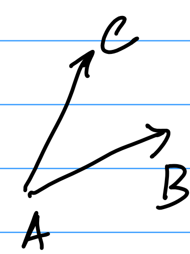


$\det(e_1|e_2|e_3) = \det E = 1 > 0$
kladná orientace

„pravidlo pravé ruky"

Příklad: Jak zjistíme, zda dva body D a E leží na stejné straně roviny ABC.

odpověď: leží pokud

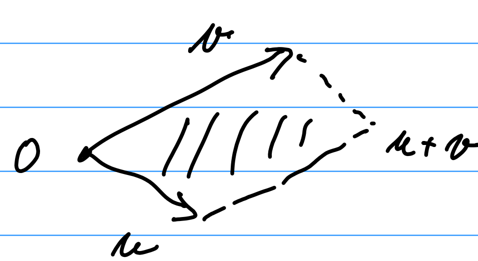


$\operatorname{sgn} \det(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AD})$
$= \operatorname{sgn} \det(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AE})$.

ORIENTOVANÝ OBSAH ROVNOBĚŽNÍKU

Uspořádaná dvojice vektorů (u,v) v $\mathbb{R}^2$
určují rovnoběžník

$0 \quad u \quad v \quad u+v$

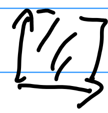


Orient. obsah $= (\pm 1) \cdot$ obsah rovnoběžníka.

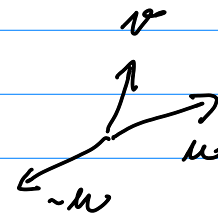
u,v lin. závislé $\Rightarrow$ obsah $= 0 \Rightarrow$ orient. obsah $= 0$
u,v jsou kladně orient $\Rightarrow$ orient. obsah $=$ obsah
u,v jsou záporně orient $\Rightarrow$ orient. obsah $= -$obsah

Pro takto definovaný orient. obsah platí (označení $S(u,v)$)

(1) $S(e_1,e_2) = 1$



(2) $S(u,v) = -S(v,u)$



(3) $S(cu,v) = c\,S(u,v) = S(u,cv)$

(4) $S(u+z,v) = S(u,v) + S(z,v)$
$S(u,v+z) = S(u,v) + S(u,z)$

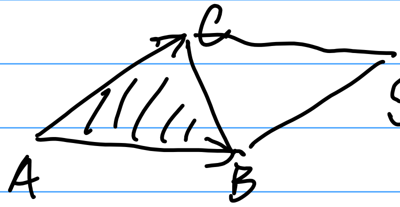
zkuste nakreslit pro konkrétní volbu

<u>Věta</u> Platí
$$S(u,v) = \det(u|v)$$

Plyne z toho, že S (orient obsah) má stejné vlastnosti jako det.

podle pravidel

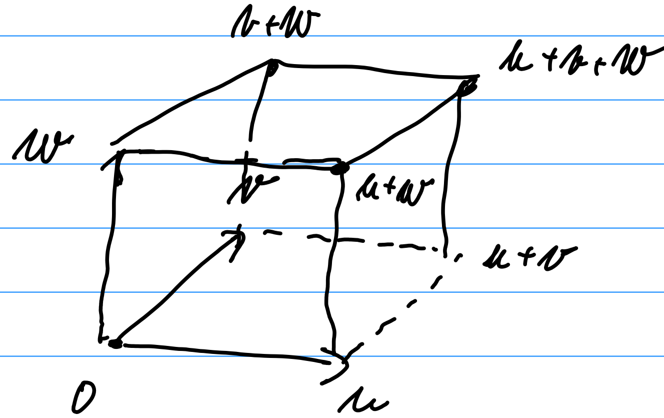
$$S(u,v) = S(u_1e_1 + u_2e_2 \,|\, v_1e_1 + v_2e_2) = \dots$$
$$= u_1v_2 - u_2v_1 = \det(u|v)$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}\,|\,\overrightarrow{AC})\right|$$

Orientovaný objem rovnoběžnostěnu

3 vektory (u, v, w) určují rovnoběžnostěn



Orient. objem $V(u, v, w)$ = orientace (u, v, w) · objem rovnoběžnostěnu

± 1

Zase lze ukázat díky tomu, že orient. objem má stejné vlastnosti jako determinant, že

$$V(u, v, w) = \det(u \,|\, v \,|\, w)$$

matice ze sloupců u, v, w

speciálně

$$V(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Orientovaný objem a lineární zobrazení

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární $\varphi(x) = Ax$

↑ matice 3×3

φ zobrazí krychli určenou vektory e_1, e_2, e_3 na rovnoběžnostěn určený vektory

$$Ae_1, Ae_2, Ae_3$$

$0, e_1, e_2, e_3, e_1+e_2, e_1+e_3, e_2+e_3, e_1+e_2+e_3$ krychle

$\downarrow \varphi$ rovnoběžnostěn

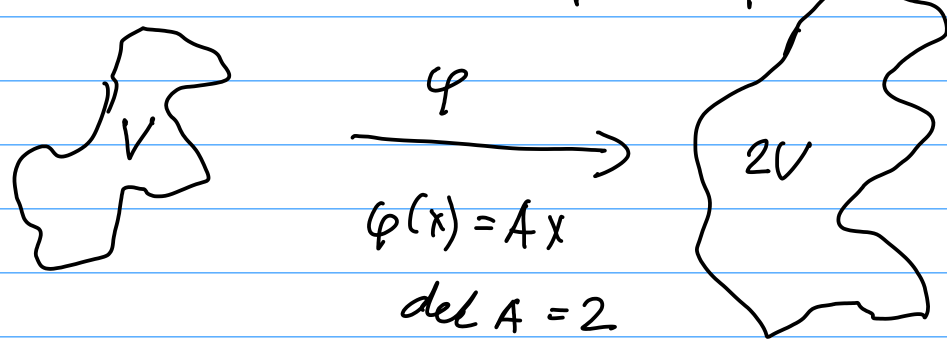
$0, Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_1+Ae_2, Ae_1+Ae_3, Ae_2+Ae_3, Ae_1+Ae_2+Ae_3$

Tento rovnoběžnostěn má objem

$$\det(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = \det A$$

A matice 3×3, lin. zobrazení zobrazí $\varphi(x) = Ax$

mění stand. objem útvarů $|\det A|$-krát.



Analogicky pro orientaci $\{ e_1, e_2, e_3$ jsou kl. orient.

$\det A > 0$ $\quad Ae_1, Ae_2, Ae_3$ jsou kladně orient.

$\det A < 0$ $\quad Ae_1, Ae_2, Ae_3$ jsou záp. orient.

$\underline{u, v, w}$ ~~kladně zor~~

$\downarrow$

$\underline{Au, Av, Aw}$

$$\det(Au, Av, Aw) = \det A(u, v, w) =$$
$$= \underline{\det A}\ \underline{\det(u, v, w)}$$

Vektorový součin a determinant

$u, v \in \mathbb{R}^3$ definujeme $u \times v \in \mathbb{R}^3$ jako vektor, jehož souřadnice jsou alg. doplňky k x_1, x_2, x_3 v matici

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

tj $\quad (u \times v)_1 = \tilde{x}_1 = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$

$$= u_2 v_3 - v_2 u_3$$

$$(u\times v)_2 = \tilde{x}_2 = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$= -(u_1 v_3 - v_1 u_3)$$

$$(u\times v)_3 = \tilde{x}_3 = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$= u_1 v_2 - v_1 u_2$$

Z vlastností determinantu lze odvodit vlastnosti vekt. součinu

VĚTA

(1) Zobrazení $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u,v) \longmapsto u\times v$

je lineární v 1. i 2. složce:

$(au + bz) \times v = a(u\times v) + b(z\times v)$ v 1. složce

(2) Vektory $(u, v, u\times v)$ jsou kladně orientované pokud jsou u a v lin. nezávislé.

(3) Vektor $u\times v$ je kolmý na u i na v.

(4) Velikost $\|u\times v\|$ je rovna obsahu (neorient.) rovnoběžníku určeného vektory u a v.

Důkaz: Podle Laplaceova rozvoje platí (podle 3. sloupce)

$$\det(u, v, x) = x_1 \cdot (u\times v)_1 + x_2 (u\times v)_2 + x_3 (u\times v)_3$$

(1) $\det(au + bz, v, x) = a \det(u, v, x) + b \det(z, v, x)$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \big((au+bz)\times v\big)_i = a\sum_{i=1}^{3} x_i (u\times v)_i + b\sum_{i=1}^{3} x_i (z\times v)_i$$

pro všechna x_1, x_2, x_3

Volba $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = 0$ dává

$$\big((au+bz)\times v\big)_1 = a(u\times v)_1 + b(z\times v)_1$$

Stejně tak pro 2. a 3. složku.

(2) $\det(u, v, u\times v) = \sum_{i=1}^{n} (u\times v)_i (u\times v)_i = \sum (u\times v)_i^2 = \|u\times v\|^2 > 0$

pokud $u\times v \neq 0$.

To nastane pokud u, v jsou lin. nezávislé.

(3) $0 = \det(u, v, u) = u_1\cdot(u\times v)_1 + u_2\cdot(u\times v)_2 + u_3\cdot(u\times v)_3$

Skal. součin $= 0 \Rightarrow u \perp u\times v$.

(4) Orient. objem rovnoběžnostěnu $u, v, u\times v$

2 způsoby

Geometricky $u\times v \perp u, v$ kladně orient.

$V(u, v, u\times v) = \text{obsah} \cdot \|u\times v\|$

2. způsob – Lapl. rozvoj

$V(u, v, u\times v) = \det(u, v, u\times v) = (u\times v)_1 (u\times v)_1 +$

$$= \|u \times v\|^2$$

Dostaneme

$$\|u \times v\| \cdot \text{obsah } ▱ = \|u \times v\|^2$$

$$\text{obsah } ▱ \neq 0 \Rightarrow \|u \times v\| = \text{obsah}$$

$$= 0 \Rightarrow u, v \text{ lin. závislé}$$

$$\Rightarrow u \times v = 0.$$