12. přednáška: Důkazy z přednášky 6

Steinitzova věta: Vekt. prostor U nad $\mathbb{K}$. V něm

$$v_1, v_2, \dots, v_k \in [u_1, u_2, \dots, u_n].$$

Jestliže $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. nezávislé, pak $k \le n$.

Důsledek: Každé dvě báze v prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků.

Důkaz S. věty nepřímý.

$$\text{Jestliže } \underbrace{v_1 \dots v_k \text{ jsou lin. nezávislé}}_{p}, \text{ pak } \underbrace{k \le n}_{q}. \qquad p \Rightarrow q$$

Místo toho dokážeme

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

Jestliže $k > n$, pak $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou lin. závislé.

Nechť $k > n$. Protože $v_1, v_2, \dots v_k \in [u_1, u_2, \dots u_n]$, platí

$$v_1 = a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{n1} u_n = (u_1\, u_2 \dots u_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots a_{n2} u_n = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$v_k = a_{1k} u_1 + a_{2k} u_2 + \dots + a_{nk} u_n = (u_1, u_2, \dots u_n) \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$(v_1\ v_2\ \dots\ v_k) = (u_1\ u_2\ \dots\ u_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$(*)\qquad (v_1\ v_2\ \dots\ v_k) = (u_1\ u_2\ \dots\ u_n)\ A$$

A má rozměry $n \times k$. Pokud $k > n$, tak homogenní soustava

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$$

má netriviální řešení $(x_1, x_2, \dots, x_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Vezměme toto řešení jako k-tici a počítejme lin. kombinaci

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_kv_k = (v_1\ v_2\ \dots\ v_k)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

podle (*)

$$= \left((u_1\ u_2\ \dots\ u_n)\cdot A\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = (u_1\ u_2\ \dots\ u_n)\Bigg(\underbrace{A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\Bigg) =$$

$$= (u_1\ u_2\ \dots\ u_n)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + \dots + 0\cdot u_n = \vec{o}$$

Závěr: $v_1, v_2, \dots, v_k$ jsou lin. závislé.

Předpoklad: $v_1 \dots v_k \in [u_1, u_2, \dots, u_n]$.

$v_1 \dots v_k$ jsou LN $\Rightarrow k \leq n$.

My jsme dokázali:

$$k > n \Rightarrow \exists x \neq 0 \in K^k \qquad Ax = 0$$

$$(v_1 \dots v_k) = (u_1 \dots u_n) \cdot A$$

$$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = \vec{0}$$

$v_1, \dots v_k$ jsou LZ.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

4 užitečné věty o bázi a dimenzi

① Nechť $\dim_K U = n$ a $v_1, v_2, \dots v_n$ jsou lin. nezávislé vektory. Pak $v_1, v_2, \dots v_n$ tvoří bázi prostoru U.

Důkaz: Každé dvě báze mají stejný počet prvků.

$v_1, v_2 \dots v_n$, $\underbrace{u_1, u_2, \dots u_n}_{\text{nějaká báze}}$

Algoritmus, který z těchto vektorů vybere lin. nezávislé se stejným lin. obalem.

Vybrané vektory

$$v_1, v_2, \dots v_n, u_{i_1}, \dots u_{i_l}.$$

- LN
- $[v_1 \dots v_n \; u_{i_1} \dots u_{i_l}] = [v_1 \dots v_n \; u_1 \dots u_n] = U$

$\underbrace{v_1 \dots v_n \; u_{i_1} \dots u_{i_l}}$ tvoří bázi U

$n + l$ prvků $=$ n prvků

$$l = 0$$

$v_1, v_2, \dots v_n$ je báze.

(2) Nechť $\dim_K U = n$ a nechť $u_1, \dots u_n$ generují U, ($[u_1 \dots u_n] = U$). Pak $u_1 \dots u_n$ tvoří bázi.

Z vektorů $u_1 \dots u_n$ vybereme lin. nez. se stejným lin. obalem.

- $u_{i_1}, \dots u_{i_\ell}$ LN
- $[u_{i_1}, \dots u_{i_\ell}] = [u_1 \dots u_n] = U$

$u_{i_1}, \dots u_{i_\ell}$ je báze

$$\ell = \dim U = n$$

$\Rightarrow$ $u_1 \dots u_n$ tvoří bázi U.

(3) Nechť V je podprostor ve vekt. prostoru U konečné dimenze nad K. Potom V je rovněž konečné dimenze a

$$\dim_K V \leq \dim_K U.$$

Důkaz:

$V \subseteq U$, $\dim U = n$. Kdyby $\dim V$ nebyla konečná, tak najdeme lin. nezávislé aspoň $n+1$ lin. nezávislých vektorů $v_1 \dots v_{n+1}$ ve V.

$v_1 \dots v_{n+1} \subseteq U = [u_1, u_2 \dots u_n]$

Podle Št. věty $n+1 \leq n$, SPOR.

Není možné, aby ve V bylo více než n lin. nez. vektorů $\Rightarrow$ $\dim V \leq n = \dim U$.

(4) Nechť V je podprostor v prostoru U konečné dimenze a $\dim_K V = \dim_K U$. Potom $V = U$.

Dk: Nechť $v_1, \dots v_k$ je báze prostoru V.
$v_1 \dots v_k$ jsou LN ve V, lin. nezávislé v U.
$\dim_K U = \dim_K V = k$, $v_1 \dots v_k$ jsou LN.
Použijeme větu ①, dostaneme, že $v_1 \dots v_k$ je báze U.

$$V = [v_1 \dots v_k] = U.$$

Věta o dimenzích součtu a průniku

Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze a V, W dva jeho podprostory. Pak platí

$$\underset{k+l}{\dim V} + \underset{k+m}{\dim W} = \underbrace{\dim (V+W)}_{k+l+m} + \underset{k}{\dim (V \cap W)}.$$

$$\left(\varphi : U \to V \qquad \dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi \right)$$

Důkaz:

$$\begin{matrix} & \subseteq V \subseteq & \\ V \cap W & & V+W \\ & \subseteq W \subseteq & \end{matrix}$$

Nechť báze $V \cap W$ je $u_1, u_2, \dots, u_k$ $\quad \dim V \cap W = k$.
Doplníme na bázi V $\quad u_1, u_2, \dots u_k, v_1, \dots v_l$ $\quad \dim V = k + l$
Doplníme na bázi W $\quad u_1, u_2, \dots u_k, w_1, \dots w_m$ $\quad \dim W = k + m$

Když se nám podaří najít bázi $V+W$ tvořenou $k+l+m$ vektory, je důkaz ukončen.

Které vektory tvoří bázi $V+W$?

$$u_1, \dots u_k, v_1 \dots v_l, w_1 \dots w_m.$$

Musíme ukázat, že je to skutečně báze.

A) $\underline{\overline{u_1 \dots u_{k}}\; v_1 \dots v_l}\;\; \overline{w_1 \dots w_m}$ generují $V + W$:

$\forall v \in V \;\; \exists a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_l \in \mathbb{K}$
$$v = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l$$

$\forall w \in W \;\; \exists c_1 \dots c_k, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{K}$
$$w = c_1 u_1 + \dots + c_k u_k + d_1 w_1 + \dots + d_m w_m$$

$$\underset{\in V+W}{v + w} = (a_1 + c_1) u_1 + \dots + (a_k + c_k) u_k + b_1 v_1 + \dots b_l v_l$$
$$+ d_1 w_1 + \dots + d_m w_m \in [u_1 \dots u_k, v_1 \dots v_l, w_1 \dots w_m]$$

(B) $u_1, \dots u_k, v_1 \dots v_l, w_1 \dots w_m$ jsou LN.

Chceme ale, že

- $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l + c_1 w_1 + \dots + c_m w_m = \vec{0}$,

pak $a_1 = \dots = a_k = b_1 = \dots b_l = c_1 = \dots = c_m = 0$.

Nechť $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l + \underline{c_1 w_1 + \dots + c_m w_m} = \vec{0}$

$(*)$ $$\underbrace{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l}_{\in V} = \underbrace{-c_1 w_1 - \dots - c_m w_m}_{\in W}$$

Vektor $(*)$ musí ležet ve $\underline{V \cap W}$, který $u_1 \dots u_k$

$$(*) = \underline{-c_1 w_1 - \dots - c_m w_m = d_1 u_1 + \dots + d_k u_k}$$

$$\vec{0} = c_1 w_1 + \dots + c_m w_m + d_1 u_1 + \dots + d_k u_k$$

$w_1 \dots w_m, u_1 \dots u_k$ báze W, lin. nez.

Tedy $c_1 = c_2 = \dots = c_n = d_1 = \dots = d_k = 0.$

$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ dosadíme do 1. rovnice:

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l + c_1 w_1 + \dots + c_n w_n = \vec{0}$$

$$a_1 u_1 + \dots a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_l v_l = \vec{0}$$

$u_1 \dots u_k\ v_1 \dots v_l$ báze V, lin. nez., a proto

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = b_1 = \dots = b_l = 0.$$

Tedy $u_1, \dots u_k, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_n$ jsou LN.

Direktní součet vekt. podprostorů je součet $V + W$ takový, že $V \cap W = \{\vec{0}\}$.

Zápis $V \oplus W$ $\qquad \dim \{\vec{0}\} = 0$

$V + W$ je direktní

$$\dim (V + W) = \dim V + \dim W - \dim (V \cap W)$$
$$= \dim V + \dim W.$$