2. přednáška Počítání s maticemi

Matice $A = (A_{ij})$ tvaru $k \times n$ má k řádků a n sloupců

$A_{i \text{ (řádek)}\, j \text{ (sloupec)}}$

$A_{ij} \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ číslo

Matice speciálního tvaru

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .... řádkový vektor

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ .... sloupcový vektor

- **Sčítání matic stejného tvaru** provádíme po složkách

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Vlastnosti má tato operace stejné jako sčítání čísel v $\mathbb{K}$:

(1) je komutativní $\quad A + B = B + A$

(2) je asociativní $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$

(3) označíme-li O matici složenou ze samých 0, platí $\quad A + O = A$

(4) označíme-li k matici $A = (A_{ij})$ matici opačnou jako $-A = (-A_{ij})$, platí

$$A + (-A) = O$$

- **Násobení matice A číslem** $c \in \mathbb{K}$ značíme cA a definujeme opět po složkách

$$(cA)_{ij} = c A_{ij}$$

$$(Ac)_{ij} = A_{ij}c = cA_{ij} = (cA)_{ij}$$

Vlastnosti této operace

$$\left.\begin{aligned} c(A+B) &= cA + cB \\ (c+d)A &= cA + dA \end{aligned}\right\} \text{distributivita}$$

$$(c\cdot d)A = c(dA)$$

$$1\cdot A = A$$

- Násobení matic už po složkách NEDEFINUJEME!

Postupně

(1) Řádek délky n násobíme sloupcem výšky n

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Výsledkem je matice tvaru 1×1, tedy číslo.

(2) Násobení matice A tvaru $k\times n$ sloupcem velikosti n

$$A = (a_{ij})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{\text{matice } k\times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{matice } n\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}}_{\text{matice } k\times 1}$$

Pozorování:

i-tý prvek výsledku závisí pouze na i-tém řádku matice A

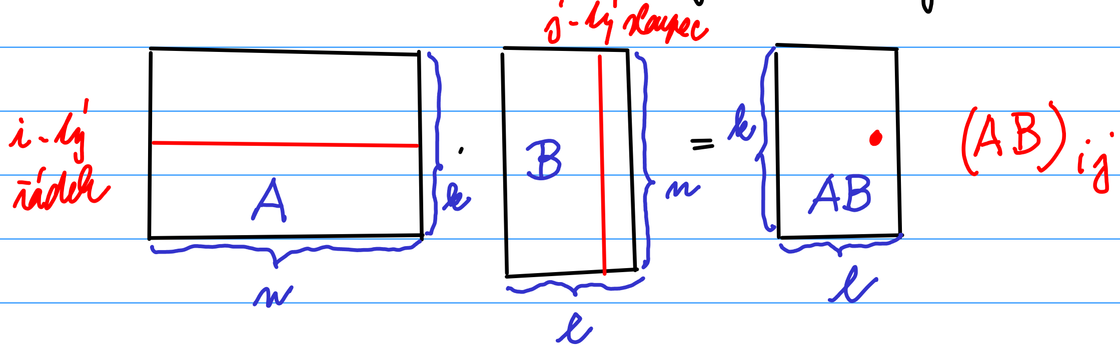
Soustavu rovnic s pravou stranou $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ a neznámými $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ můžeme psát

$$A \cdot x = b$$

(3) Násobení matice A tvaru $k \times n$ maticí B tvaru $n \times l$ je matice tvaru $k \times l$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} A_{ip} B_{pj}$$

$$= A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots A_{in} B_{nj}$$



$$k/n \cdot n/l = k/l$$

$(AB)_{ij}$ závisí pouze na i-tém řádku matice A a j-tém řádku matice B

Příklady

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 11 \\ 11 & 10 & 5 & 21 \\ 12 & 6 & -1 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = s_2(A)$$

2. sloupec matice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = r_3(B)$$

3. řádek matice B

Jednotková matice E_k ... matice $k \times k$, která má na hlavní diagonále 1 a jinde 0

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

obecně

$$\underset{k \times n}{A} \cdot E_n = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

obecně

$$E_k \cdot \underset{k \times n}{A} = A$$

Vlastnosti násobení

(1) není komutativní

- $\underset{k \times n}{A} \cdot \underset{n \times l}{B}$ $\qquad$ $\underbrace{\underset{n \times l}{B} \cdot \underset{k \times n}{A}}_{\text{má smysl pouze pro } l = k}$

- $\underbrace{\underset{k \times n}{A} \cdot \underset{n \times k}{B}}_{\text{výsledek } k \times k}$ $\qquad$ $\underbrace{\underset{n \times k}{B} \cdot \underset{k \times n}{A}}_{\text{výsledek } n \times n}$

Rovnost $A \cdot B = B \cdot A$ má smysl pouze pro $k = n$.

- Rovnost $A \cdot B \overset{?}{=} B \cdot A$ pro matice $n \times n$

obecně neplatí !

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Násobení je asociativní – dá hodně práci (nebudeme dělat, ale ti, co chcete A nebo B si to zkuste)

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

pokud aspoň jedna strana dává smysl (... rozměry matic umožňují jejich násobení).

(3) Násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

$$D\,(A + B) = (D \cdot A) + (D \cdot B)$$

(4) Jednotková matice $E_k = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ typu $k \times k$

$$\underset{k\times n}{E_k \cdot A} = A \qquad \underset{k\times n}{A} \cdot E_n = A$$

Inverzní matice ke čtvercové matici A typu $n \times n$ je matice B typu $n \times n$ s vlastnostmi

$$A \cdot B = E_n$$

$$B \cdot A = E_n$$

Matice (i když je nenulová) nemusí mít inverzní matici:

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \\ b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Matice se stejnými řádky nemůže být jednotková!

Transponovaná matice k matici $A = (A_{ij})$ tvaru $k \times n$ je matice A^T tvaru $n \times k$ taková, že

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Platí $\quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(Zkuste si dokázat – dobré cvičení na definici násobení a definici transponované matice.)

Aplikace násobení matic - tzv. lineární modely

Nechť sloupcový vektor $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ popisuje stav

nějakého systému. Tento systém se vyvíjí v čase. Nechť $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ je stav v čase t.

Uvažujme čas diskrétní s jednotkami minuta, hodina, rok, 20 let atd. Velmi často se časová změna systému modeluje pomocí maticového násobení takto

$$X(t+1) = A \cdot X(t)$$

kde A je matice $n \times n$ s časově nezávislými složkami A_{ij}

Je-li $X(0)$ stav systému na začátku, tak v čase

$$\begin{aligned}
t=1 \quad &\text{je} \quad X(1) = A\,X(0) \\
t=2 \quad & \quad\quad X(2) = A\,X(1) = A \cdot A \cdot X(0) \\
& \quad\quad\quad = A^2 X(0) \\
t=3 \quad & \quad\quad X(3) = A\,X(2) = \dots = A^3 X(0)
\end{aligned}$$

atd.

Z vlastností matice A umíme často usoudit, zda daný systém expanduje, nebo zda zaniká či je stabilní. Minule jsme zmínili tzv. Leslieho populační model. Byl dán rovnicemi

$$x_1(t+1) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t)$$
$$x_2(t+1) = a_{21}x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = a_{32}x_2(t)$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{13} \geq 0$
$a_{21} \in [0,1]$
$a_{32} \in [0,1]$

Maticově

$$X(t+1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 \end{pmatrix} X(t)$$

Interpretace $x_1(t)$ ... velikost 1. generace
$x_2(t)$ ... — " — 2. generace
$x_3(t)$ ... — " — 3. generace

a_{11} ... plodnost v 1. generaci
a_{12} plodnost v 2. generaci
a_{13} plodnost v 3. generaci
$a_{21} = 1 -$ úmrtnost v 1. generaci
$a_{32} = 1 -$ úmrtnost v 2. generaci

Jiný lineární model – Markovův proces

Máme možné stavy $1, 2, 3, \ldots, n$.
Stav se nastane v čase t s pravděpodobností
$$0 \leq x_k(t) \leq 1$$
Platí $x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) = 1$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$ pravděpodobnostní vektor

Dále máme soubor čísel p_{ij} pro $1 \leq i, j \leq n$,

Číslo P_{ij} je pravděpodobnost toho, že se systém ze stavu j dostane do stavu i za časovou jednotku.
Součet $\sum_{i=1}^{n} P_{ij}$ se musí rovnat 1
(Systém se někam musí dostat.)

Tedy pravděpodobnost stavu i v čase $t+1$ je

$$x_i(t+1) = P_{i1}\, x_1(t) + P_{i2}\, x_2(t) + \dots + P_{in}\, x_n(t)$$

To lze maticově zapsat takto

$$X(t+1) = P \cdot X(t)$$

Příklad Mlsný hazardér

Mlsný hazardér má 3 bonbóny. Hází mincí.
Když padne orel dostane 1 bonbón
panna musí 1 bonbón odevzdat
Hra končí, když bude mít 5 bonbónů nebo žádnou. Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí nejpozději po 4 hodech?
Stavy = počet bonbónů 0, 1, 2, 3, 4, 5
Markovův proces s počátečním pravděpodobnostním vektorem $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a maticí

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost stavů po 4. kole je

$$X(4) = P \cdot X(3) = P \cdot P \cdot X(2) = P \cdot P \cdot P\, X(1) = P \cdot P \cdot P \cdot P\, X(0)$$

$$= P^4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/16 \\ 0 \\ 5/16 \\ 0 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost, že hra skončí do 4. kola je

$$1/8 + 3/8 = \frac{1}{2}$$

(Zde není explicitně provedeno maticové násobení $P \cdot P \cdot P \cdot P$)