Počítání s maticemi

A typu $k \times n$ je tabulka s čísly, která má k řádků a n sloupců

Číslo v i-tém řádku a j-tém sloupci označujeme A_{ij}

$A_{ij} \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

Sčítání matic $A+B$

- obě matice musí mít stejný tvar
  A, B tvaru $k \times n$
- sčítání provádíme na složkách

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 8 & -9 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 12 & -4 & 17 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti

1) $A+B = B+A$ komutativita
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ asociativita
3) existuje nulová matice $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$A + \mathbb{O} = A$$

4) opačná matice $(-A)_{ij} = -A_{ij}$

$$A + (-A) = \mathbb{O}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} \cdot 1 & \cdot 2 & \cdot 3 \\ \cdot 4 & \cdot 5 & \cdot 6 \end{pmatrix}$

Násobení matice číslem

$c \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, A matice $k \times n$

cA je matice $k \times n$

$$(cA)_{ij} = c A_{ij} \qquad (Ac)_{ij} = A_{ij}\, c = c A_{ij} = (cA)_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad 4 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -16 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Vlastnosti</u>:

1) distributivita

$$(c+d)A = cA + dA$$

2) jiná distributivita

$$c(A+B) = cA + cB$$

3) $(c \cdot d)A = c \cdot (dA)$

4) $1 \cdot A = A$

Lineární kombinace matic $A_1, A_2, \dots, A_k$ typu $k \times n$ je matice

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_k A_k$$

NÁSOBENÍ MATIC

Motivace $A = (a_{ij})$ typu $k \times n$, $b = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{matrix}$

Soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

chceme napsat pomocí násobení matic

$$A \cdot x = b \qquad x = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definice v krocích

1) $$\underset{1 \times n}{(a_1 \; a_2 \; a_3 \dots a_n)} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}} = \underset{1 \times 1}{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)}$$

2) Matice A typu $k \times n$

$$\underset{k \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \end{pmatrix}} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}} = b_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

1

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \dots \\ a_{k1}b_1 + a_{k2}b_2 + \dots + a_{kn}b_n \end{pmatrix} \qquad k \times 1$$

Zápis soustavy rovnic

$$\underset{k \times n}{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \qquad A \cdot x = b$$

znamená, že

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

A matice $k \times \underline{n}$, B matice $\underline{n} \times p$

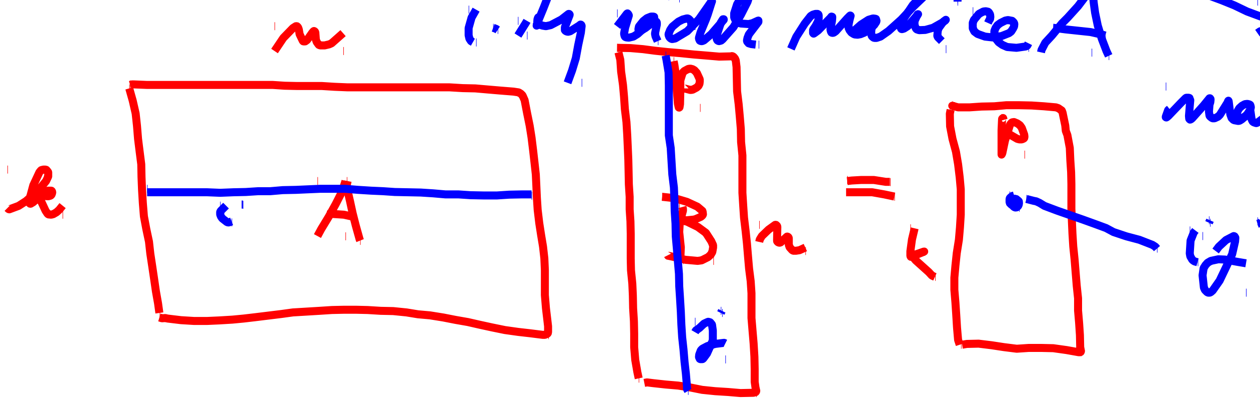
Součin AB je matice $k \times p$

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{kn}B_{nj}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sj}$$

$$= r_i(A) \cdot s_j(B)$$

i-tý řádek matice A j-tý sloupec matice B



Příklady

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 11 & -1 \\ -5 & 38 & 25 & -3 \\ -7 & 58 & 39 & -5 \end{pmatrix}$$

$3 \times \underline{2}$ $\quad \underline{2} \times 4$ $\quad 3 \times 4$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = s_1(A) \cdot \underset{0}{b_1} + s_2(A) \underset{1}{b_2} + s_3(A) \underset{0}{b_3}$$

$$(0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{31}\ \ a_{32}\ \ a_{33}) = r_3(A)$$

$$(b_1\ b_2\ b_3)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = b_1 r_1(A) + b_2 r_2(A) + b_3 r_3(A)$$

$$(0, 2, -1)\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} = 0\cdot r_1(A) + 2r_2(A) - r_3(A)$$
$$= (2a_{21}-a_{31},\ 2a_{22}-a_{32},\ 2a_{23}-a_{33})$$

jednotková matice 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E_3 = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$E_2 \cdot A = A$$

Jednotková matice $n \times n$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot E_n = A$$

$k \times n$

$$E_k \cdot A = A$$

Vlastnosti násobení

1) NENÍ KOMUTATIVNÍ

$\underset{k\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} \qquad \underset{k\times p}{A\cdot B}$

$\underset{n\times p}{B} \cdot \underset{k\times n}{A}$ musí být $p=k$

$\underset{k\times n}{A} \quad \underset{n\times k}{B}$

$A\cdot B$ je typu $k\times k$

$B\cdot A$ je typu $n\times n$

O komutativitě má smysl mluvit jen pro čtvercové matice

A B typu $n\times n$

$A\cdot B$ i $B\cdot A$ jsou typu $n\times n$

Ale pro čtvercové stejné obecně $\boxed{\text{neplatí}}$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -1 & 24 \end{pmatrix} \neq$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 9 & 24 \end{pmatrix}$$

Násobení je asociativní

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Jednotková matice

$A_{k \times n}$ $\qquad A \cdot E_n = A \qquad E_k \cdot A = A$

Distributivita vzhledem ke sčítání

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+D)\cdot B = A\cdot B + D\cdot B$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A\cdot(A+B) + B(A+B)$$

$$= A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B$$

$$= A^2 + \underbrace{A\cdot B + B\cdot A}_{\neq 2AB} + B^2$$

Transponovaná matice k matici A typu $k \times n$ je matice A^T typu $n \times k$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to 1,3$$

3,1

Pro transponování matice platí

$$(A \cdot B)^T = B^T A^T$$

$k \times n \quad n \times p \qquad p \times n \quad n \times k$

$p \times k \qquad p \times k$

Inverzní matice

Chceme najít k matici A typu $n \times n$ matici B typu $n \times n$

$$A \cdot B = E_n \qquad B \cdot A = E_n$$

Taková matice se nazývá inverzní.

Je určena jednoznačně

$$A \cdot C = E_n \qquad C \cdot A = E_n$$

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C$$

Proto inverzní matici, pokud existuje, označíme A^{-1}.

A^{-1} obecně neexistuje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A nemá inversní matici

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} r_1(B) + r_2(B) \\ 2r_1(B) + 2r_2(B) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 2c_{11} & 2c_{12} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K čemu je násobení matic dobré

Lineární modely

Proces s n stavy $1, 2, \ldots, n$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_n$ charakterizují tyto stavy

Proces je časově proměnný

$t = 0, 1, 2, \ldots$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow X(t+1) = \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{pmatrix}$$

$$X(t+1) = \underset{n \times n}{A} \cdot X(t)$$

neměnná v čase

$X(0) \qquad X(1) = A \cdot X(0)$

$X(2) = A \cdot X(1) = A \cdot (A \cdot X(0)) = \underbrace{A^2}_{A \cdot A} \cdot X(0)$

$X(3) = A \cdot X(2) = \dots\dots$

$\dots = A^3 X(0)$

Vlastnosti matice pomohají určit vývoj daného systému (vlastní čísla a vlastní vektory matice A)

Leslieho populační model

$x_1(t)$ velikost 1. generace

$x_2(t)$ velikost 2. generace

$x_3(t)$ velikost 3. generace

a_{11} porodnost 1. generace

a_{12} porodnost 2. generace

$x_1(t+1) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + a_{13} x_3(t)$

$x_2(t+1) = b_{21} x_1(t)$

$x_3(t+1) = b_{32} x_2(t)$

$b_{21} = 1 -$ úmrtnost 1. generace

$b_{32} = 1 -$ úmrtnost 2. generace

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Leslieho matice}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{1i} \geq 0 \\ b_{21} \in [0,1] \\ b_{32} \in [0,1] \end{array}$$

Markovovy procesy

stavy $1, 2, \dots n$

$X_i(t)$ je pravděpodobnost, že systém v čase t je ve stavu i

$$\underset{n \times n}{P} = (P_{ij})$$

P_{ij} = pravděpodobnost, že systém ze stavu j přejde do stavu i za jednotku času

Markovian process

$$X(t+1) = \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$x_1(t+1) = P_{11} x_1(t) + P_{12} x_2(t) + \ldots + P_{1n} x_n(t)$$