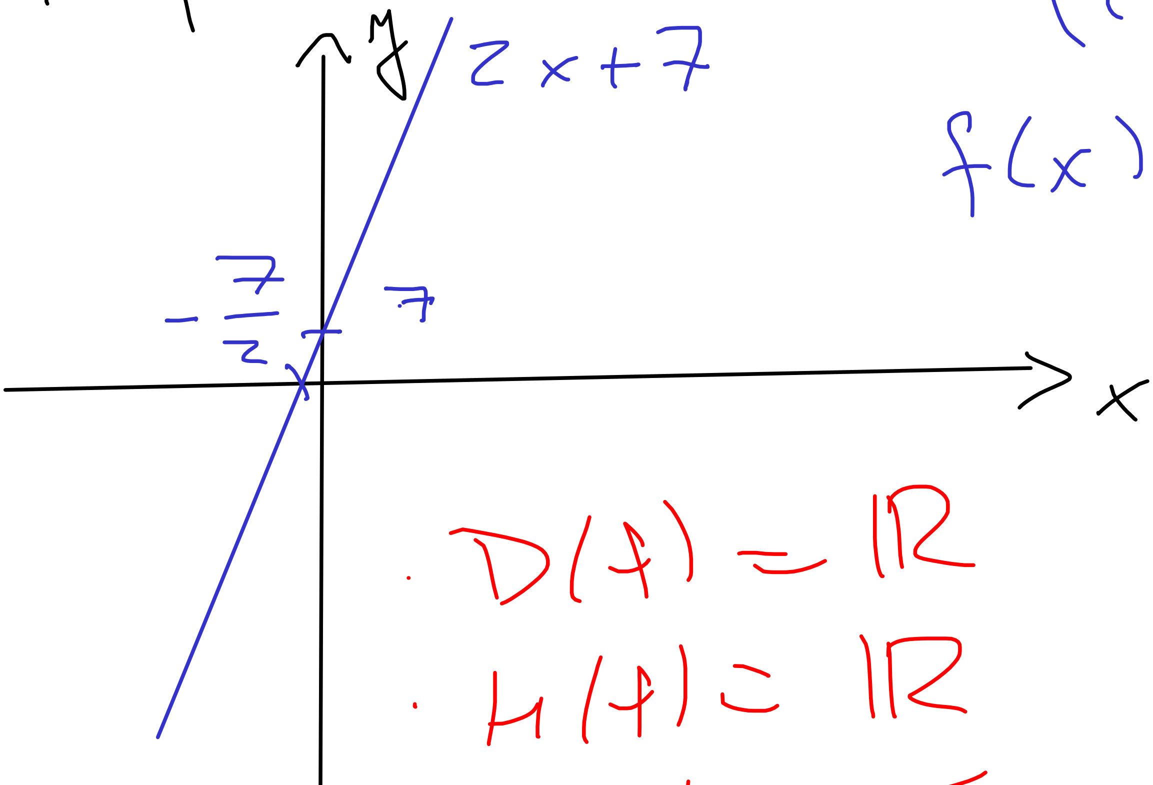
# 3.1

1. $f(x) = 2x + 7$




$f(0) = 7$

$f(x) = 2x + 7 = 0$

$x = -\frac{7}{2}$

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $H(f) = \mathbb{R}$
- rostoucí
- injektivní
- surjektivní

Def: $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$

je rostoucí (klesající)

jestliže

$\forall x_1, x_2 \in M$ t.ž. $x_1 < x_2$:

$f(x_1) < f(x_2)$

$(\forall x_1, x_2 \in M,\ x_1 < x_2:\ f(x_1) > f(x_2))$

- $f$ je injektivní, jestliže

$\forall x_1, x_2 \in M$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

- $f$ je surjektivní, jestliže

$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in M$: $f(x) = y$

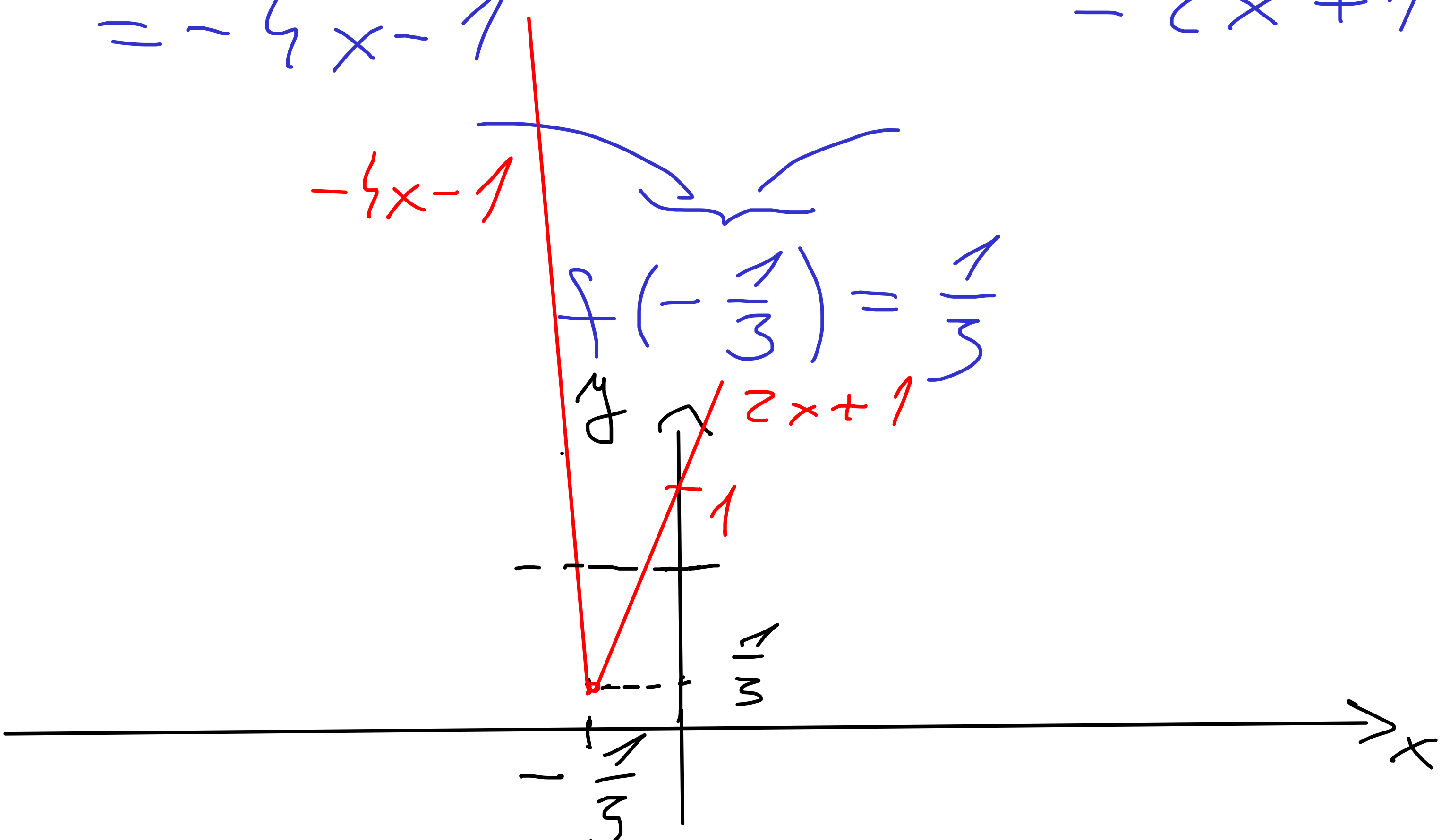
7. $f(x) = |3x+1| - x$

$x \in (-\infty, -\frac{1}{3}]$ $\quad$ $x \in [-\frac{1}{3}, \infty)$

$f(x) = -(3x+1) - x$ $\quad$ $f(x) = (3x+1) - x$

$= -4x - 1$ $\quad$ $= 2x + 1$

$f(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$




$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = [\frac{1}{3}, \infty)$

není injektivní

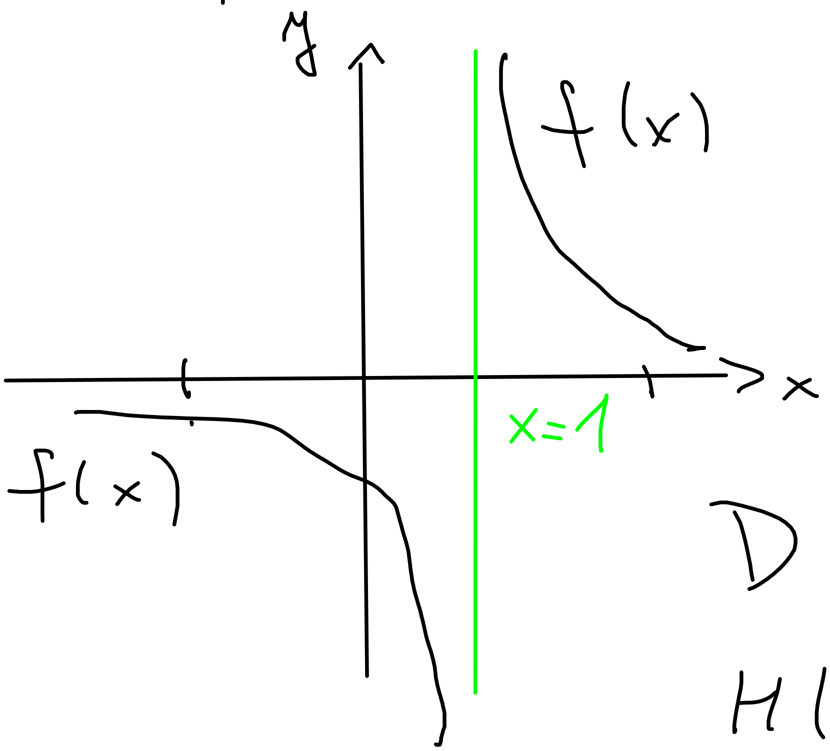
není surjektivní

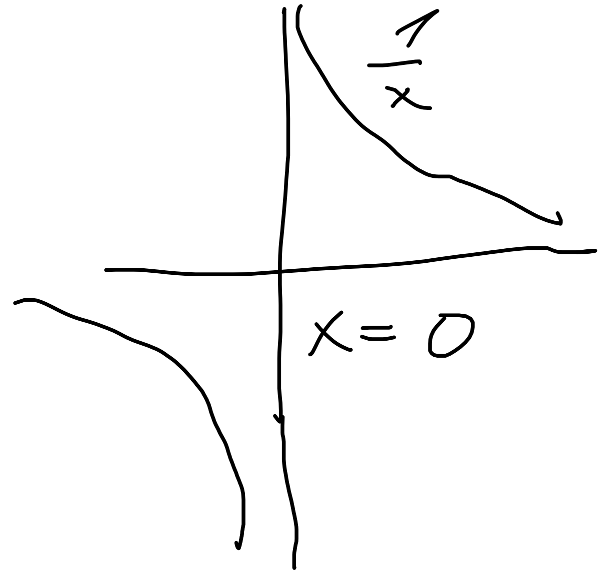
není ani rostoucí ani klesající na celém $D(f)$

je klesající na $(-\infty, -\frac{1}{3}]$

rostoucí $[-\frac{1}{3}, \infty)$

3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$




$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

injektivní

není surj.

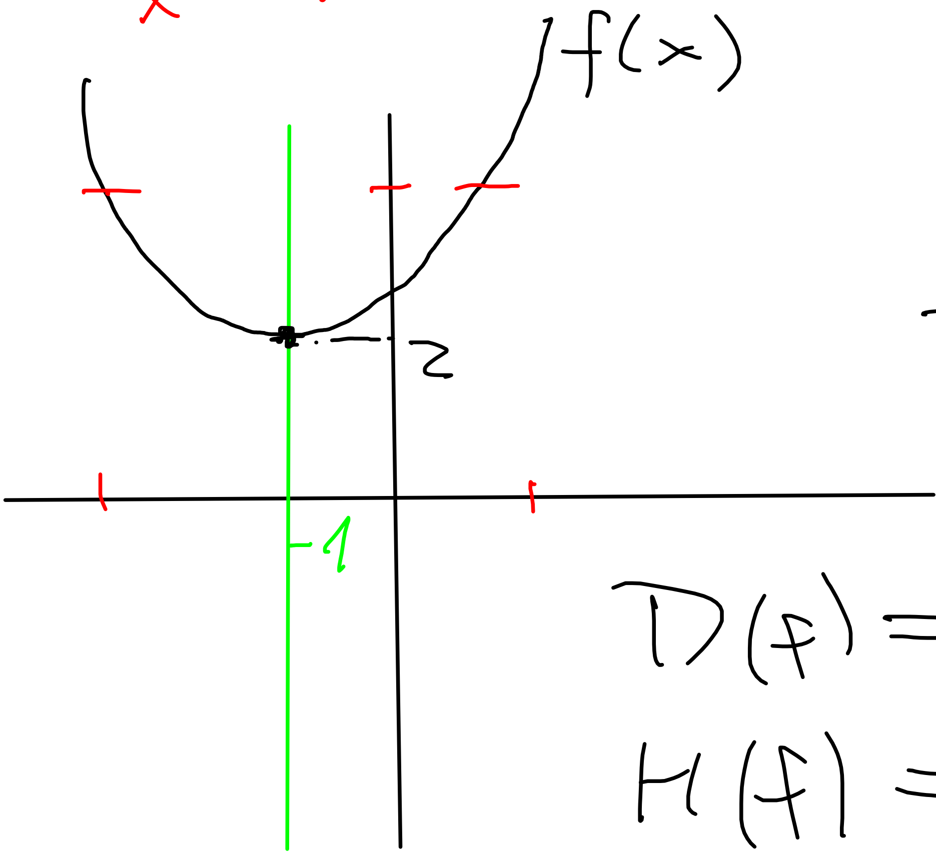
na D(f) není ani rostoucí ani klesající

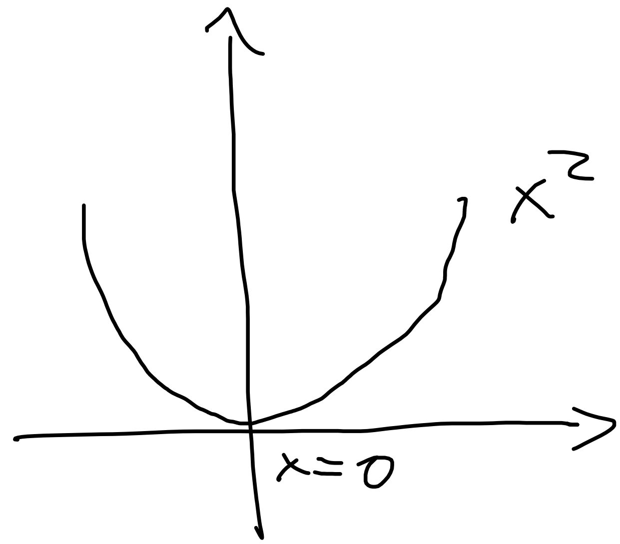
klesající na $(-\infty, 1)$

klesající na $(1, \infty)$

3. $f(x) = (x^2+2x)+3$

$$= (\underbrace{(x+1)^2}_{x^2+2x+1} - 1) + 3 = (x+1)^2 + 2$$




$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = [2, \infty)$

není inj.

není surj.

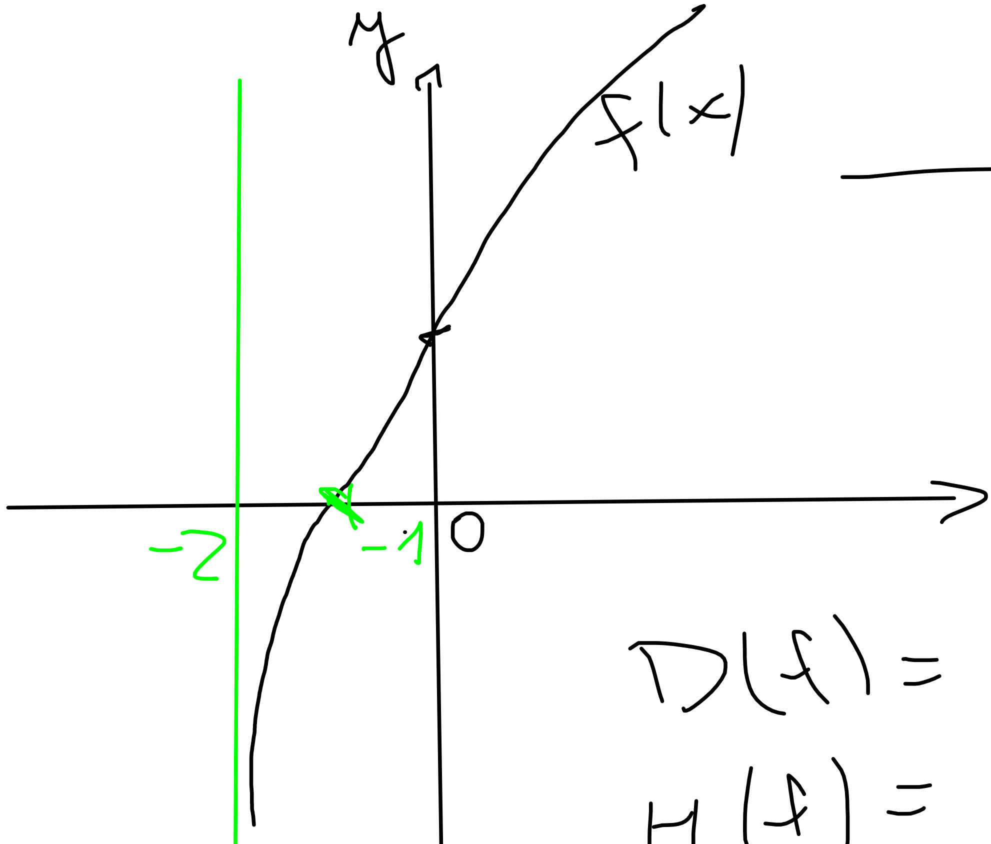
není ani rostoucí ani klesající na $D(f)$

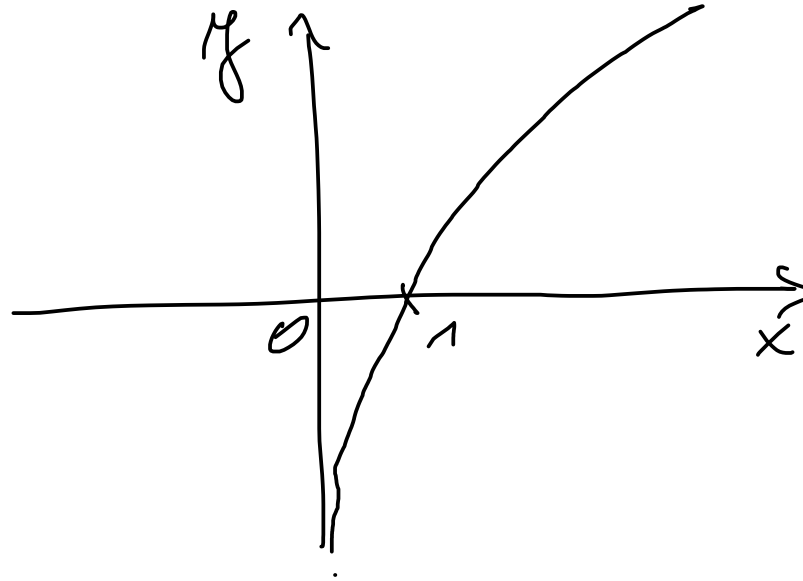
klesající na $(-\infty, -1]$

rostoucí na $[-1, \infty)$

5. $f(x) = \log_{10}(x+2)$

$\log x$




$D(f) = (-2, \infty)$

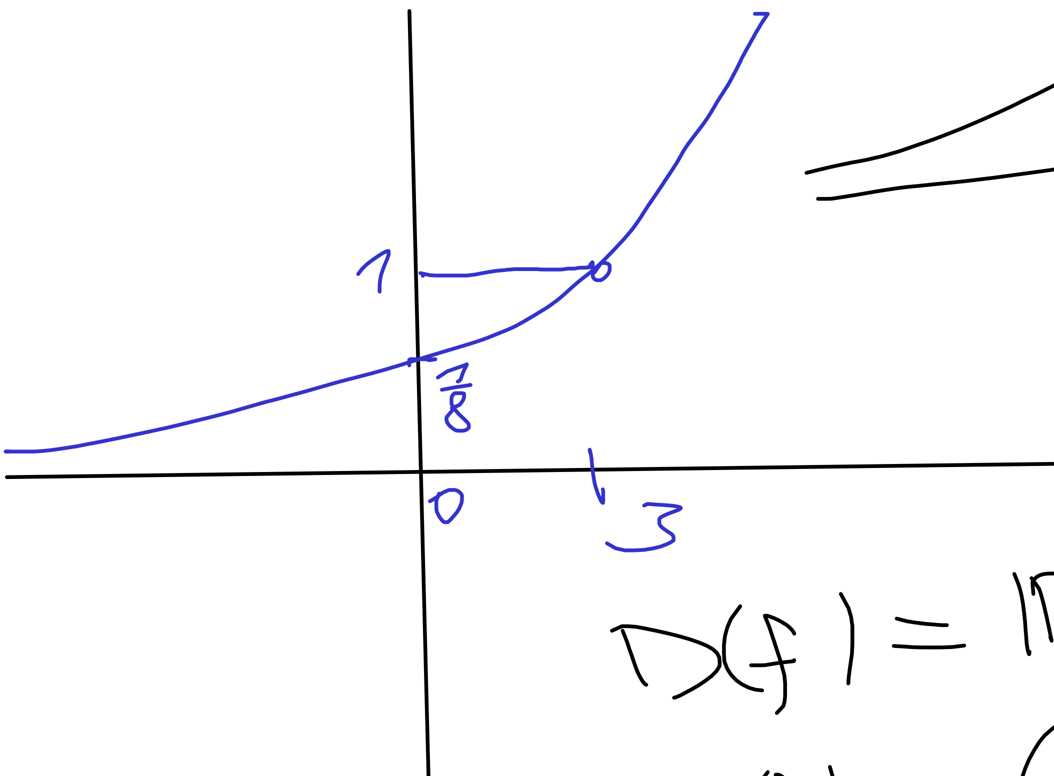
$H(f) = \mathbb{R}$

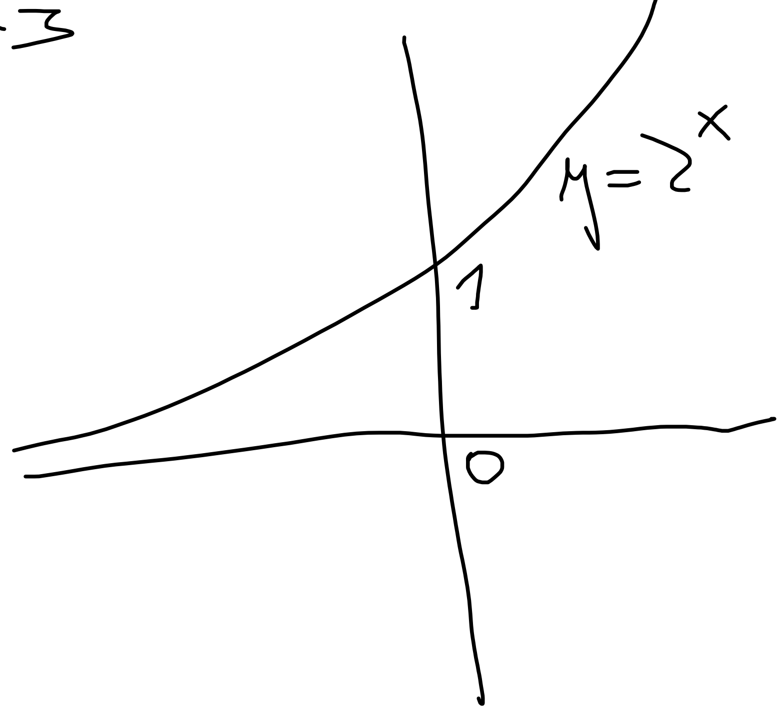
je inj.

je surj.

je rostoucí

6. $f(x) = 2^{x-3}$




$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = (0, \infty)$

je inj.

není surj.

je rostoucí

7. $f(x) = (x-1)^2 + (x+2)^2$

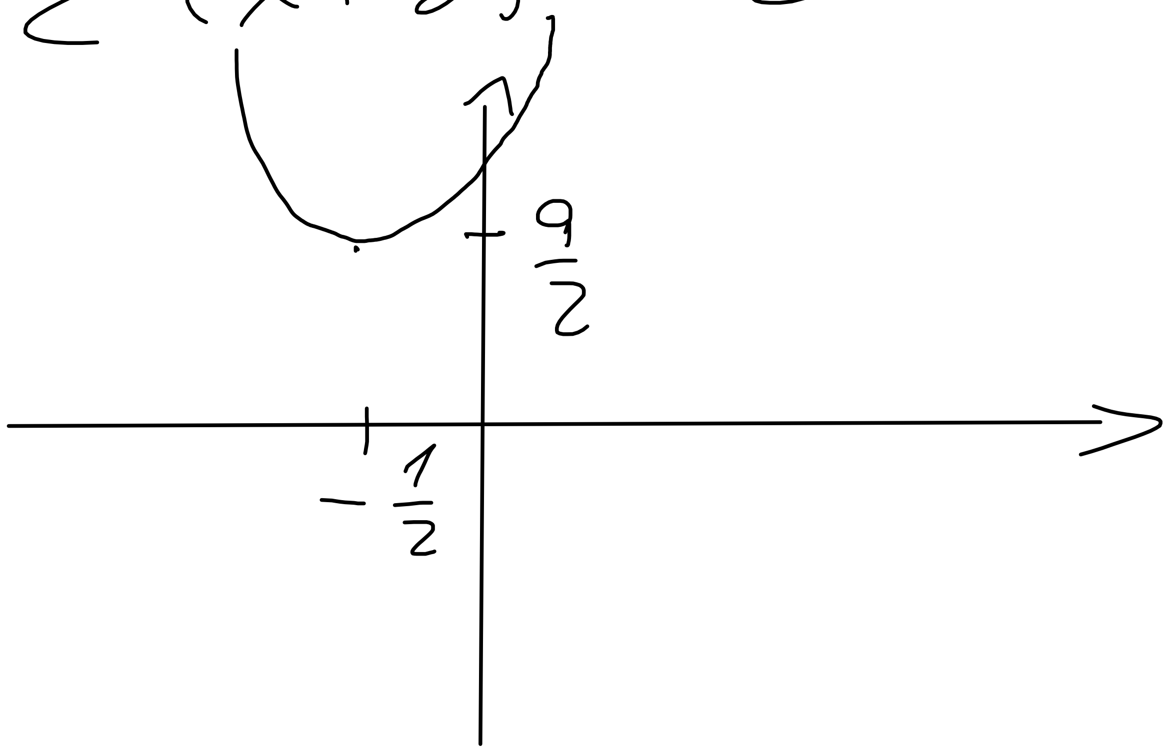
$= (x^2 - 2x + 1) + x^2 + 4x + 4$

$= 2x^2 + 2x + 5$

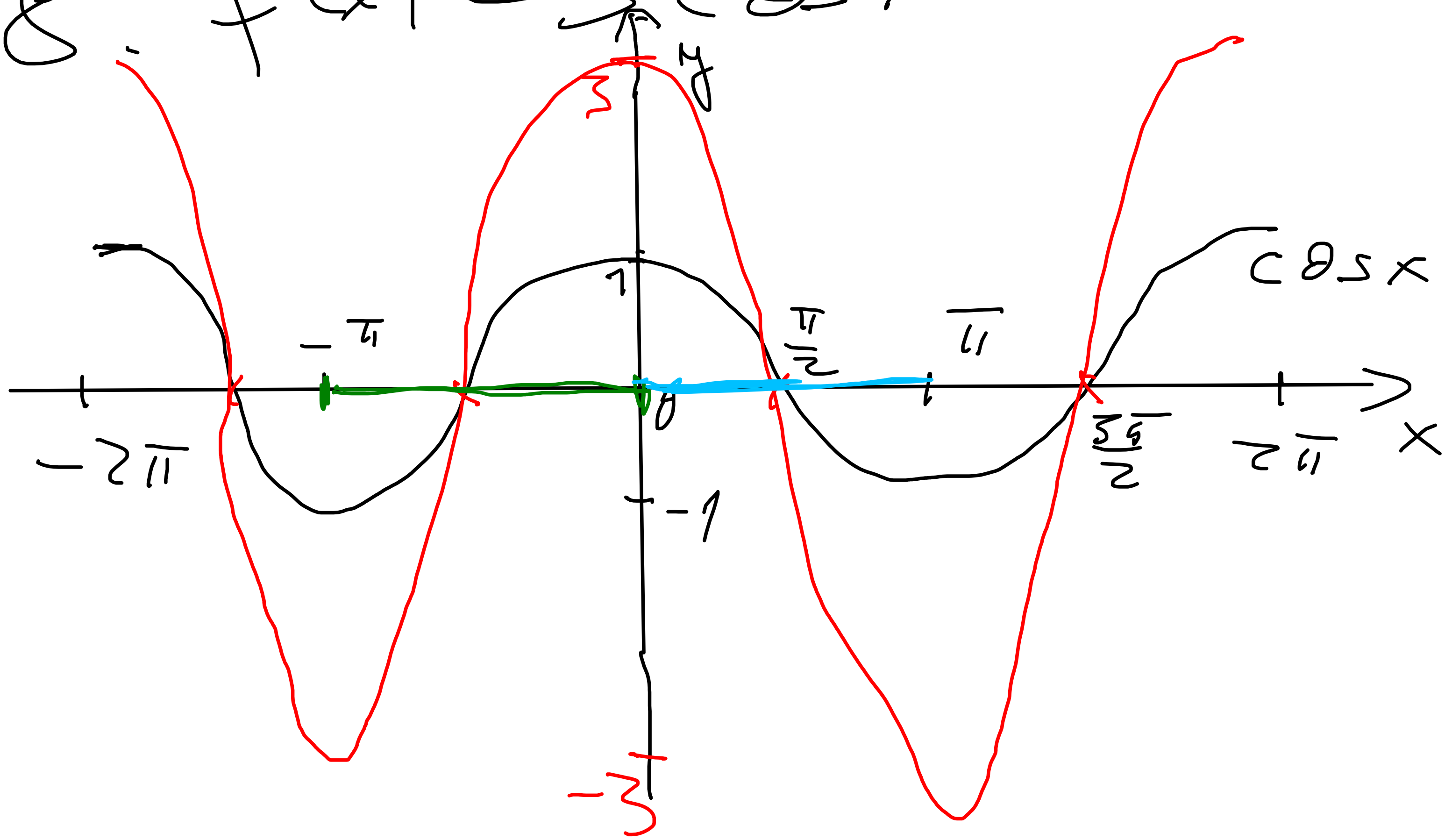
$= 2\left[ x^2 + x + \frac{5}{2} \right]$

$= 2\left[ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{5}{2} \right]$

$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$



8. $f(x) = 3\cos x$




$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = [-3, 3]$

není inj.

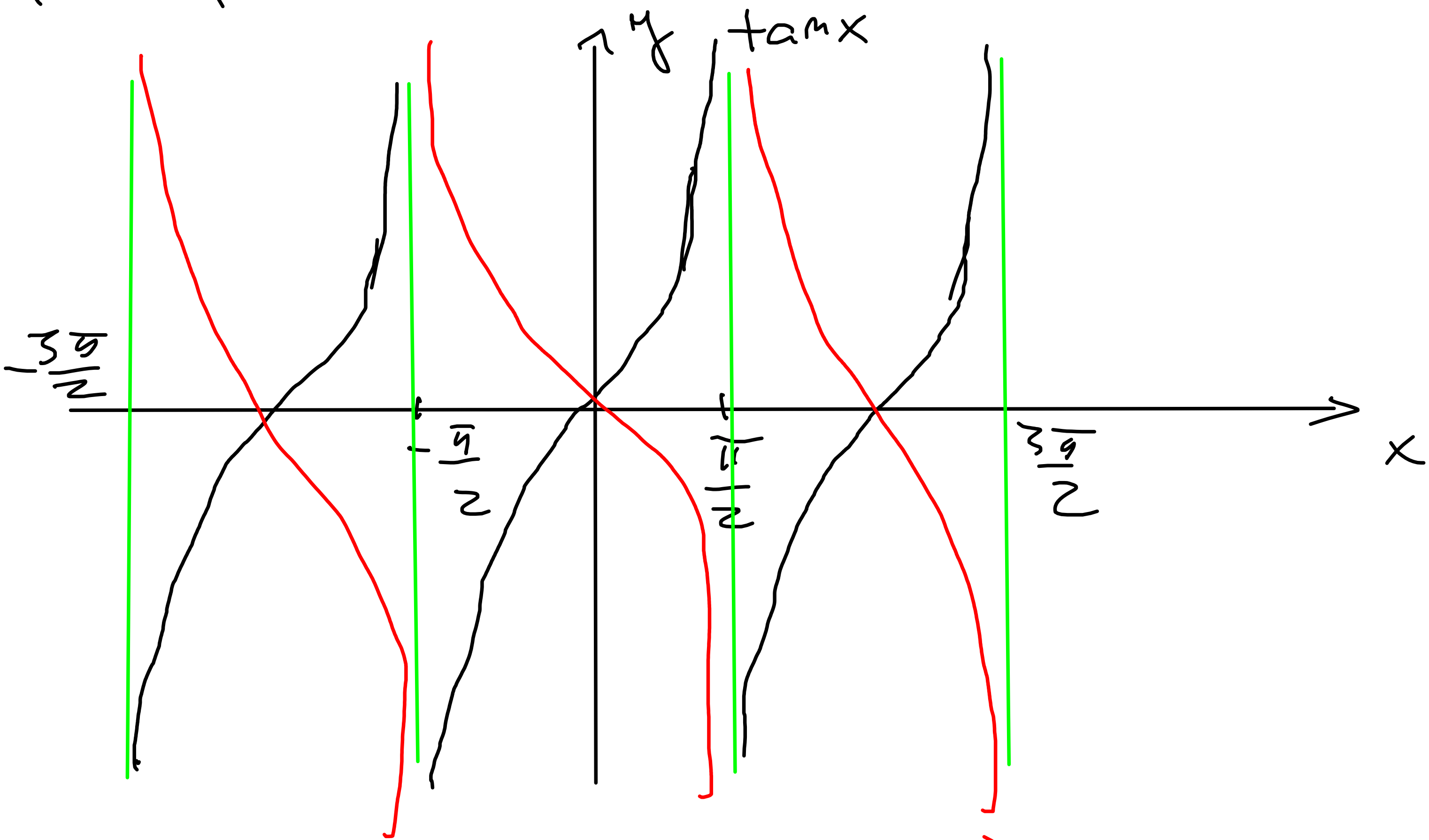
není surj

ani rostoucí ani klesající

rostoucí na $[-\pi, 0]$,

přesněji na $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$
$k \in \mathbb{Z}$

9. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$




$f(x) = \mathrm{tg}(-x)$

$D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$H(f) = \mathbb{R}$

není inj.

je surj.

na D(f) ani kles. ani rost.

klesající na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

**Př 2** $f(x) = \dfrac{1}{\log_{10}(x^2-1) - 1}$

**Určíme D(f):**

$x^2 - 1 > 0$

$\log_{10}(x^2-1) \neq 1 \quad / 10^{(\ )}$

$x^2 - 1 \neq 10$

$x^2 \neq 11 \qquad x \neq \pm\sqrt{11}$

$x^2 > 1$

$x < -1$ nebo $x > 1$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

**Závěr** $x \in (-\infty, -\sqrt{11}) \cup (-\sqrt{11}, -1) \cup (1, \sqrt{11}) \cup (\sqrt{11}, \infty)$

Jmenovatel $g(x) = \log_{10}(x^2-1)-1$

funkce sudá

$x \in (1,\infty) \Rightarrow x^2-1 \in (0,\infty)$

$\Rightarrow \log(x^2-1) \in (-\infty,\infty)$

$\Rightarrow \log(x^2-1)-1 \in (-\infty,\infty)$

$x = +\sqrt{11} \Rightarrow \log(x^2-1)-1=0$

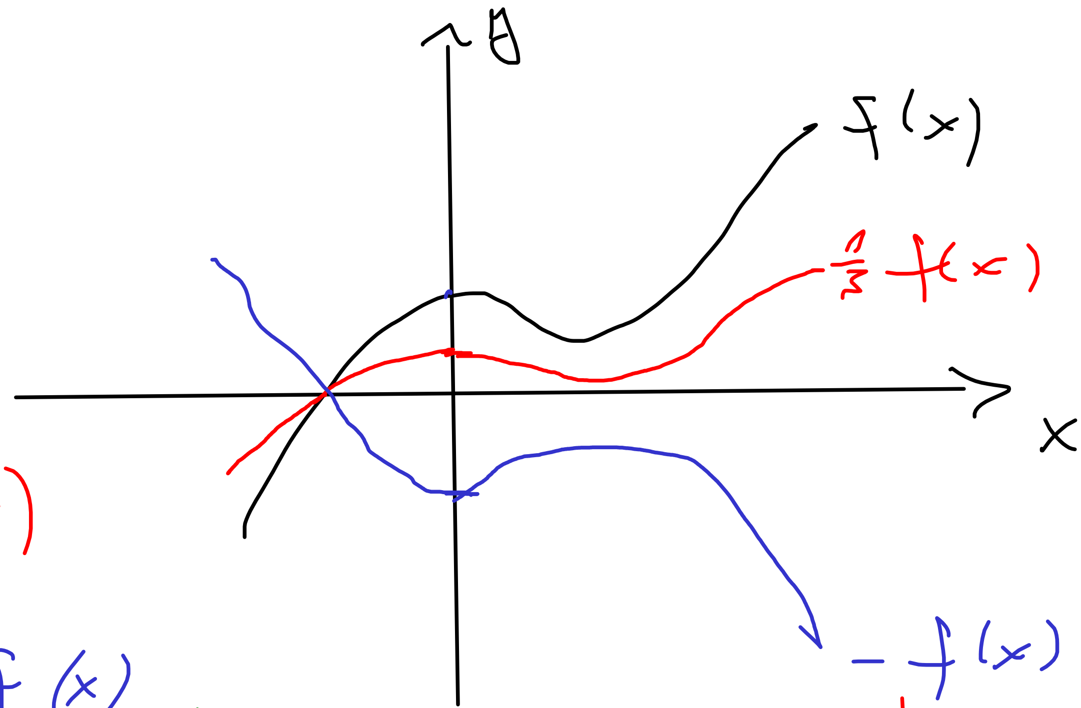
Závěr $x \in D(f)$

$\Rightarrow g(x) \in (-\infty,0)\cup(0,\infty)$

Závěr: $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

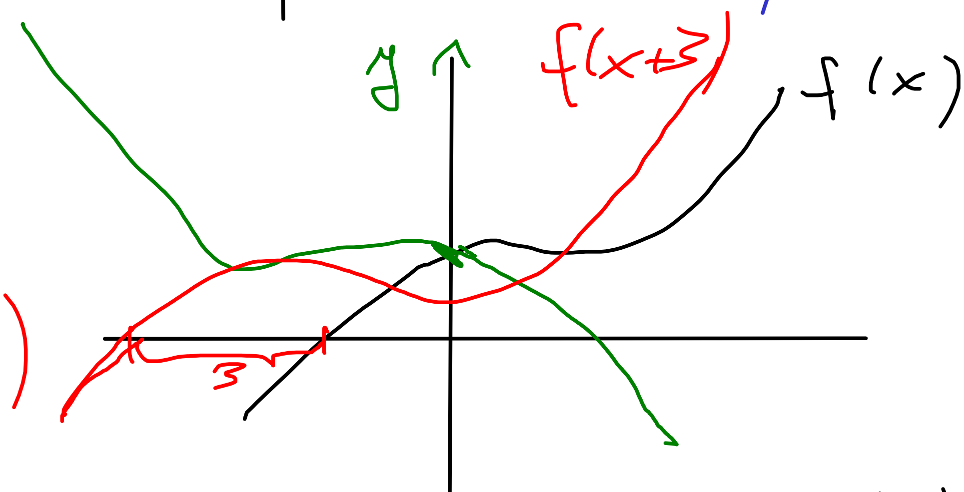
$H(f) = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$

# Pr 3.3




(b) $y = \frac{1}{3}f(x)$

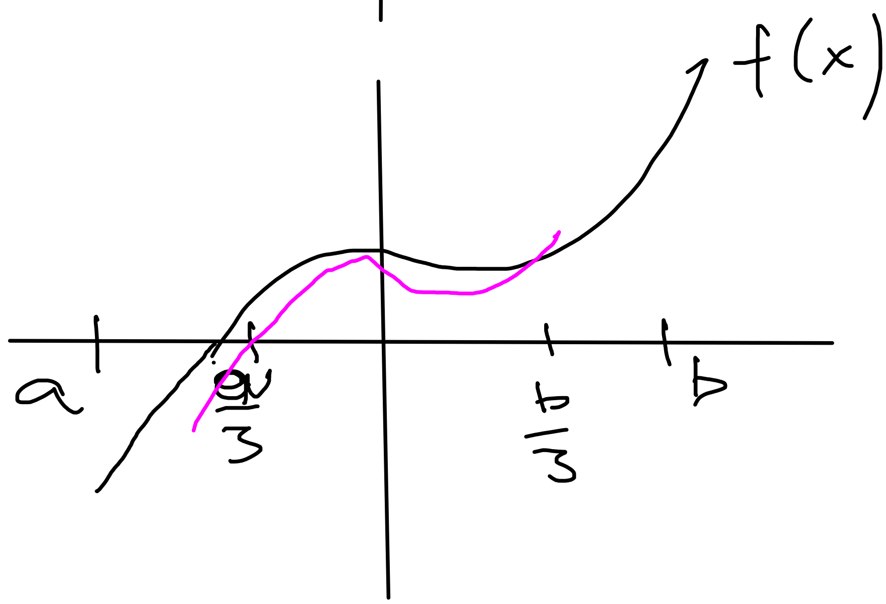
(c) $y = -f(x)$




(d) $y = f(-x)$

(e) $y = f(x+3)$

9. $y = f(3x)$



$\underline{3.4}$ $f(x) = |3x-8| + 2$

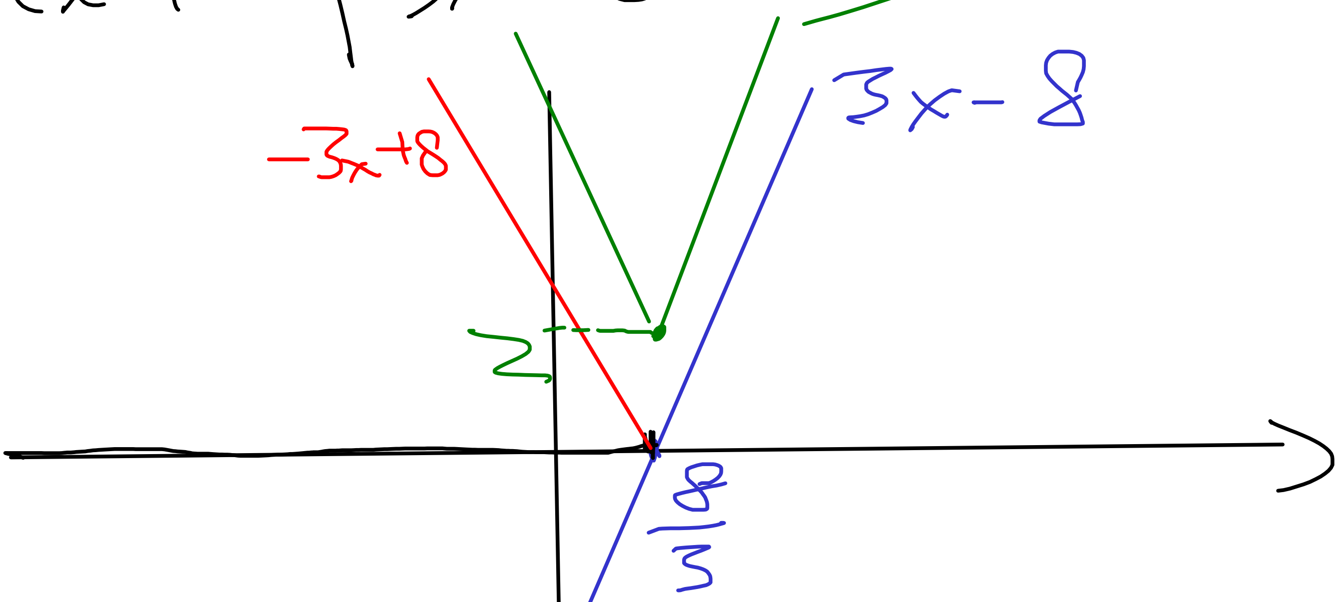
$$g_1(x) = 3x$$

$$g_2(x) = x - 8$$

$$g_3(x) = x + 2$$

$$f(x) = g_3\left(|g_2 \circ g_1(x)|\right)$$

$f(x) = |3x - 8| + 2 \longrightarrow f(x)$




klesajúca na $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$

rastúca na $\left[\frac{8}{3}, \infty\right)$

3.5 $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (0, \frac{\pi}{2})$

$f(x)$ klesající na $D(f)$

a) Dokažte, že $g(x) = \cos(f(x))$ je rostoucí na $D(f)$

cos je na $(0, \frac{\pi}{2})$ klesající

Ukážeme, že $g(x)$ rostoucí:

$x_1, x_2 \in D(f)$ lib. t. ž.

$x_1 < x_2$

- pak $f(x_1) > f(x_2)$

(neboť f klesající)

- pak $\cos(f(x_1)) < \cos(f(x_2))$

(neboť cos klesající)

Tedy $g(x_1) < g(x_2)$