

# Lineární algebra a geometrie III

Doc. RNDr. Martin Čadek, CSc.  
Bc. Lukáš Vokřínek, PhD.

14. září 2022

## Obsah

Úvod	2
Sylabus přednášky	2
1 Afinní a projektivní prostory	3
2 Polyedry a lineární programování	13
3 Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru	24
4 Metrická klasifikace nadkvadrik	31
5 Mooreova–Penroseova pseudoinverze	44
6 Multilineární algebra	50
7 Tenzorový součin	58
8 Symetrické a antisymetrické tenzory	69
9 Determinanty, objemy a orientace	79
10 Smithův normální tvar celočíselných matic	89
11 Smithův normální tvar polynomiálních matic	96
Dodatky	108

# Úvod

Obsah skript je zřejmý z následujícího podrobného sylabu. Většina kapitol kromě teoretického výkladu obsahuje vyřešené příklady a na konci kontrolní otázky a úlohy k samostatnému procvičení. Rádi bychom poděkovali Richardu Lastoveckému, který značnou část textu přepsal v L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xu a opatřil úlohami k samostatnému řešení.

Místa označená jednou hvězdičkou „\*“ považujeme za těžká a jejich studium doporučujeme pouze studentům usilujícím o lepší známku. Místa označená dvěma hvězdičkami „\*\*“ jsou ještě náročnější. Části označené „cv“ se dělaly na cvičení a „nd“ se nedělaly vůbec.

Martin Čadek & Lukáš Vokřínek

## Sylabus přednášky

- 1. Afinní a projektivní prostory:** afinní prostor, komplexifikace vektorového a afinního prostoru, projektivní prostor, projektivní rozšíření afinního prostoru.
- 2. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru:** nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru, vztah projektivních nadkvadrik a bilineárních forem a jejich klasifikace, klasifikace afinních nadkvadrik.
- 3. Metrická klasifikace nadkvadrik:** polárně sdružené body vzhledem k nadkvadrice, střed nadkvadriky, hlavní směry, hlavní nadroviny, vrcholy nadkvadriky, metrická klasifikace nadkvadrik.
- 4. Mooreova–Penroseova pseudoinverze:** Mooreova–Penroseova pseudoinverze, singulární hodnoty, singulární rozklad, aproximace řešení soustavy lineárních rovnic, lineární regrese.
- 5. Multilineární algebra:** faktorový prostor, multilineární zobrazení, duální prostor, duální báze, duální zobrazení, dualita a podprostory, báze prostoru multilineárních forem.
- 6. Tenzorový součin:** tenzorový součin a jeho univerzální vlastnost, asociativita, komutativita a další vlastnosti tenzorového součinu, vztah tenzorového součinu a prostoru lineárních zobrazení, tenzorová algebra vektorového prostoru, souřadnice tenzorů při změně báze.
- 7. Symetrické a antisymetrické tenzory:** symetrické tenzory, symetrická algebra vektorového prostoru a její báze, antisymetrické tenzory, vnější algebra vektorového prostoru a její báze, vztah vnější mocniny a determinantu.
- 8. Determinanty, objemy a orientace:** antisymetrické formy a objemy, orientace, objem v Eukleidovském prostoru, geometrie v rovině a prostoru, kvaterniony a jejich vztah ke geometrii v prostoru.
- 9. Smithův normální tvar celočíselných matic:** celočíselné matice a jejich Smithův normální tvar, prezentace konečně generovaných komutativních grup, klasifikace konečně generovaných komutativních grup.
- 10. Smithův normální tvar polynomiálních matic:** polynomiální matice a jejich Smithův normální tvar,  $\mathbb{K}[\lambda]$ -moduly a jejich vztah k operátorům na vektorových prostorech, kanonická prezentace operátorů na  $\mathbb{K}^n$ , racionální kanonický tvar, Cayleyho–Hamiltonova věta, Jordanův kanonický tvar.

# 1. Afinní a projektivní prostory

Začneme s krátkou motivací. Naším cílem bude studium kuželoseček a jejich více-rozměrných analogií, kvadrik a nadkvadrik. Na kuželosečky se dá pohlížet dvěma způsoby – geometricky jako na množiny bodů, které splňují nějakou kvadratickou rovnici a algebraicky jako na tuto rovnici samotnou. Klasifikace kuželoseček pak spočívá v nalezení jistých kanonických tvarů – geometricky to znamená, že po posunutí a otočení každá kuželosečka vypadá jako elipsa, hyperbola, parabola, atd. a algebraicky pak to, že po jisté vhodné lineární substituci rovnice kuželosečky vypadá nějakým specifickým způsobem. Aby byly tyto dva pohledy ekvivalentní, je potřeba uvažovat „komplexně“, neboť například  $x^2 + y^2 = -1$  a  $x^2 = -1$  není možné převést na sebe, nicméně mají tyto rovnice totožnou množinu řešení, totiž prázdnou. Pokud bychom uvažovali i komplexní řešení, budou se jejich množiny chovat geometricky jinak.

Kromě komplexních bodů bude ještě výhodné přidat k naší rovině „body v nekonečnu“. Například by mělo být zřejmé, že střed elipsy hraje zásadní roli (elipsa je podle něj symetrická). Představme si nyní, že jeden konec elipsy držíme na místě a druhý konec táhneme směrem od prvního – střed se bude vzdalovat poloviční rychlostí. V limitním případě, kdy pohyblivý konec elipsy zmizí v nekonečnu, stane se z elipsy parabola a ta již střed mít nebude, protože jsme jej také přesunuli do nekonečna. Nicméně, tento bod v nekonečnu je stále v jistém smyslu středem paraboly a je vhodné jej mít k dispozici. O něco jednodušší příklad je dvojice různoběžných přímk, jejichž průsečík přesunujeme do nekonečna. Pokud budeme vhodnou dvojici bodů držet na místě, stane se v limitním případě z dvojice různoběžných přímk dvojice rovnoběžných přímk. Pokud budeme uvažovat i body v nekonečnu, přímky se budou stále protínat (tak, jak se nám zdá, že se koleje v dálce protínají).

V dalším tedy obohatíme rovinu (obecněji afinní prostor) o komplexní body a později o body v nekonečnu. Mluvíme o komplexním a projektivním rozšíření.

## 1.1. Komplexifikace reálného vektorového prostoru

Nechť  $V$  je reálný vektorový prostor. Jeho *komplexním rozšířením* (*komplexifikací*) je komplexní vektorový prostor  $V^{\mathbb{C}}$  s nosnou množinou  $V \times V$ , na které je definováno sčítání a násobení komplexním číslem takto:

$$\begin{aligned}(v, w) + (v', w') &= (v + v', w + w') \\ (a + ib)(v, w) &= (av - bw, bv + aw)\end{aligned}$$

Není těžké dokázat, že jde skutečně o vektorový prostor nad  $\mathbb{C}$  s nulovým prvkem  $(0, 0)$ . (Dobrou motivací je způsob, jakým se konstruují komplexní čísla jako dvojice reálných čísel.)

Vektory  $v \in V$  ztotožníme s prvky  $(v, 0) \in V^{\mathbb{C}}$  a budeme tak  $V$  považovat za podmnožinu prostoru  $V^{\mathbb{C}}$ . Platí

$$(v, w) = (v, 0) + i(w, 0) = v + iw$$

*Poznámka.* Poněkud abstraktní, ale velice užitečné pozorování je následující univerzální vlastnost: každé  $\mathbb{R}$ -lineární zobrazení  $\varphi: V \rightarrow W$  do komplexního vektorového prostoru  $W$  se jednoznačně rozšiřuje na  $\mathbb{C}$ -lineární zobrazení  $\tilde{\varphi}: V^{\mathbb{C}} \rightarrow W$ , nutně dané předpisem

$$\tilde{\varphi}(v + iw) = \tilde{\varphi}(v) + i\tilde{\varphi}(w) = \varphi(v) + i\varphi(w).$$

To, že je vskutku  $\mathbb{C}$ -lineární se ověří snadno (stačí zachovávat násobení  $i$ ).

## 1. Afinní a projektivní prostory

---

**Věta 1.1.** Každá báze  $(e_1, \dots, e_n)$  prostoru  $V$  je bází prostoru  $V^{\mathbb{C}}$ .

- cv *Důkaz.* Necht'  $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$  je libovolný vektor. Chceme ukázat, že existují jediná komplexní čísla  $z_k = a_k + ib_k$  taková, že

$$u + iv = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n = (a_1 + ib_1)e_1 + \dots + (a_n + ib_n)e_n.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostáváme ekvivalentní soustavu

$$u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, \quad v = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n.$$

Tato soustava má jediné řešení:  $a_k$  je  $k$ -tá souřadnice  $u$  a  $b_k$  je  $k$ -tá souřadnice  $v$ . □

*Poznámka.* Alternativní důkaz: báze  $(e_i)$  se pozná podle toho, že zobrazení  $V^{\mathbb{C}} \rightarrow W$  jsou jednoznačně určena obrazy  $e_i$ . Ale takové zobrazení je jednoznačně určeno svým zúžením na  $V$  a to svými hodnotami na  $e_i$ .

**Příklad.** Komplexní rozšíření vektorového prostoru  $\mathbb{R}^n$  je izomorfní s  $\mathbb{C}^n$ . Nejlépe se to vidí pomocí předchozí poznámky a věty: inkluze  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  se rozšiřuje na  $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , které posílá bázový vektor  $e_i$  na bázový vektor  $e_i$  a je tedy isomorfismem.

- cv **Příklad.** Dokažte, že komplexní rozšíření prostoru polynomů s reálnými koeficienty  $\mathbb{R}[x]$  je izomorfní s prostorem polynomů s komplexními koeficienty  $\mathbb{C}[x]$ .

**Definice 1.2.** Necht'  $\varphi: V \rightarrow W$  je lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory. Komplexní rozšíření  $\varphi^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}} \rightarrow W^{\mathbb{C}}$  je zobrazení definované předpisem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(v + iw) = \varphi(v) + i\varphi(w).$$

Toto zobrazení je opět lineární.

*Poznámka.* Zobrazení  $\varphi^{\mathbb{C}}$  je jediné rozšíření kompozice  $V \xrightarrow{\varphi} W \rightarrow W^{\mathbb{C}}$ , tj. takové  $\mathbb{C}$ -lineární zobrazení, že následující diagram komutuje

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ V^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\varphi^{\mathbb{C}}} & W^{\mathbb{C}} \end{array}$$

**Věta 1.3.** Je-li  $A$  matice lineárního zobrazení  $\varphi: V \rightarrow W$  v bázích  $\alpha$  a  $\beta$ , pak  $\varphi^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}} \rightarrow W^{\mathbb{C}}$  má v bázích  $\alpha$  a  $\beta$  opět matici zobrazení  $A$ .

- cv *Důkaz.* Necht'  $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\beta = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m)$ . Matice  $A = (a_{ij})$  je definována takto:

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^k \tilde{e}_i a_{ij}$$

Pro  $\varphi^{\mathbb{C}}$  platí

$$\varphi^{\mathbb{C}}(e_j) = \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^k \tilde{e}_i a_{ij}.$$

Tedy  $(\varphi^{\mathbb{C}})_{\beta\alpha} = A$ . □

## 1.2. Afinní prostor a jeho komplexifikace

**Definice 1.4.** Necht'  $V$  je vektorový prostor. *Afinní prostor*  $\mathcal{S}$  se zaměřením  $V$  je množina  $\mathcal{S}$  společně s vektorovým prostorem  $V$  a s operací  $+: \mathcal{S} \times V \rightarrow \mathcal{S}$ , která splňuje následující podmínky:

- (1) pro každé  $A \in \mathcal{S}$  platí  $A + 0 = A$ ,
- (2) pro každé  $A \in \mathcal{S}$  a  $v, w \in V$  platí  $(A + v) + w = A + (v + w)$ ,
- (3) pro každé  $A, B \in \mathcal{S}$  existuje právě jedno  $v \in V$  tak, že  $A + v = B$ . Píšeme  $v = \overrightarrow{AB}$ .

Pro *zaměření*  $V$  používáme značení  $V = \text{Dir } \mathcal{S}$ .

*Poznámka.* Lepší by bylo definovat afinní prostor jako multisorted algebru, tj. chtít  $V$  jako součást struktury (včetně operací sčítání a násobení skaláry) a přidat *dvě* operace  $+: \mathcal{S} \times V \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\overrightarrow{\phantom{A}}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow V$ . (Bez toho nelze třetí podmínku vyjádřit pomocí rovnic a také nelze přirozeně definovat homomorfismy mezi afinními prostory s *různými* zaměřeními).

(První dvě podmínky zkráceně říkají, že  $V$  má pravou akci na  $\mathcal{S}$ . Poslední podmínka říká, že tato akce je jednoduše tranzitivní.)

Z poslední podmínky plyne, že pro každou volbu „počátku“  $O \in \mathcal{S}$  je zobrazení  $\text{Dir } \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $v \mapsto O + v$ , bijekce a můžeme tedy ztotožnit  $\mathcal{S}$  s vektorovým prostorem  $\text{Dir } \mathcal{S}$ . Důležité je ale mít na paměti, že tato identifikace závisí na volbě počátku. Každá jiná identifikace se však liší pouze o translaci,  $v \mapsto \overrightarrow{PO} + v$ .

Naopak, každý vektorový prostor  $V$  lze chápat jako afinní prostor se zaměřením  $V$  tím, že počátek „zapomeneme“, tj. požadované zobrazení  $V \times V \rightarrow V$  bude sčítání ve  $V$ .

**Definice 1.5.** *Báze afinního prostoru*  $\mathcal{S}$  je  $(n + 1)$ -tice  $(O, e_1, \dots, e_n)$ , kde  $O \in \mathcal{S}$  je bod (počátek) a  $(e_1, \dots, e_n)$  je báze vektorového prostoru  $V$ . *Souřadnice* bodu  $A \in \mathcal{S}$  v této bázi je  $(n + 1)$ -tice skalárů  $(1, x_1, \dots, x_n)^T$  taková, že

$$A = O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (O, e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Souřadnice vektoru  $v \in \text{Dir } \mathcal{S}$  v této bázi je  $(n + 1)$ -tice skalárů  $(0, x_1, \dots, x_n)^T$  taková, že

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (O, e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Alternativně zapisujeme souřadnice bodů  $[x_1, \dots, x_n] = (1, x_1, \dots, x_n)^T$  a souřadnice vektorů  $(x_1, \dots, x_n) = (0, x_1, \dots, x_n)^T$ .

**Příklad.** Každý afinní podprostor vektorového prostoru je afinní prostor.

**Příklad.** *Standardním afinním prostorem* dimenze  $n$  budeme rozumět prostor

$$\mathcal{A}_n = \{(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 = 1\}.$$

## 1. Afinní a projektivní prostory

Vzhledem k předchozí diskuzi lze  $\mathcal{A}_n$  považovat za „prostor souřadnic“. Konkrétně, báze afinního prostoru  $\mathcal{S}$  zadává izomorfismus  $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{S}$  daný násobením zleva řádkem  $(O, e_1, \dots, e_n)$ . Inverzní zobrazení  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}_n$  pak přiřazuje každému bodu jeho souřadnice.

V afinním prostoru můžeme definovat afinní kombinace: jsou-li  $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{S}$  body a  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  čísla taková, že  $x_0 + \dots + x_n = 1$ , položíme

$$x_0 A_0 + \dots + x_n A_n = P + x_0 \overrightarrow{PA_0} + \dots + x_n \overrightarrow{PA_n} \in \mathcal{S},$$

cv kde  $P \in \mathcal{S}$  je libovolně zvolený bod. Snadno se ukáže, že výsledek na této volbě nezávisí.

*Poznámka.* Podobně pro  $x_1 + \dots + x_n = 0$  definujeme

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = x_1 \overrightarrow{PA_1} + \dots + x_n \overrightarrow{PA_n} \in \text{Dir } \mathcal{S}$$

a výsledek nezávisí na volbě  $P$  (pro  $n = 0$  je výsledkem  $0 \in \text{Dir } \mathcal{S}$ ).

**Příklad.** Prostorem barycentrických souřadnic dimenze  $n$  budeme rozumět prostor

$$\mathcal{B}_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1\}.$$

Stejně jako izomorfismy  $\mathcal{A}_n \cong \mathcal{S}$  odpovídají bázím  $\mathcal{S}$ , izomorfismy  $\mathcal{B}_n \cong \mathcal{S}$  odpovídají bodovým bázím, tj.  $(n+1)$ -ticím bodů  $E_0, \dots, E_n$  takovým, že každý bod  $A$  lze jednoznačně vyjádřit jako  $A = x_0 E_0 + \dots + x_n E_n$ ,  $x_0 + \dots + x_n = 1$ . Koeficienty  $x_i$  nazýváme *barycentrické souřadnice* bodu  $A$ .

*Poznámka.* V multisorted algebraickém smyslu máme možnost generovat volně afinní prostor  $k$  body a  $l$  vektory. Přitom ve speciálních případech dostáváme afinní bázi ( $k = 1, l = n$ ), bodovou bázi ( $k = n + 1, l = 0$ ) a případ bezbodového afinního prostoru, tj. případu kdy  $\mathcal{S} = 0$  a  $V$  je netriviální s nějakou bází ( $k = 0, l = n + 1$ ).

*Poznámka.* Alternativně lze afinní prostor definovat pomocí afinních kombinací (nevýhodou je, že axiomy jsou o poznání složitější, výhodou naopak to, že není potřeba mluvit o zaměření – to se pak definuje jako prostor všech translací, tj. zobrazení tvaru  $A \mapsto A + x_1 P_1 + \dots + x_n P_n$ ,  $x_1 + \dots + x_n = 0$ ; ve skutečnosti stačí vzít  $n = 2$  a  $x_1 = -1, x_2 = 1$ ).

V tomto směru mi nejspokojivější přijde následující definice: Afinní prostor je množina  $\mathcal{S}$  společně s operacemi  $\mathcal{B}_n \times \mathcal{S}^{n+1} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $((x_0, \dots, x_n), (A_0, \dots, A_n)) \mapsto x_0 A_0 + \dots + x_n A_n$ , které splňují následující axiomy:

- $0A_0 + \dots + 0A_{i-1} + 1A_i + 0A_{i+1} + \dots + 0A_n = A_i$ ,
- $y_0(x_{00}A_0 + \dots + x_{0n}A_n) + \dots + y_m(x_{m0}A_0 + \dots + x_{mn}A_n) = (y_0x_{00} + \dots + y_mx_{m0})A_0 + \dots + (y_0x_{0n} + \dots + y_mx_{mn})A_n$ .

K těmto vztahům lze dospět rozepsáním definice algebraické teorie dané  $\mathcal{T}^{\text{op}} = \{\mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots\}$  ( $\mathcal{B}_n$  je volný afinní prostor na  $n+1$  bodech, tedy zejména  $\mathcal{B}_{-1} = \emptyset$ ). Dostáváme tak operace  $\text{Aff}(\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_n) \times \mathcal{S}^{n+1} \rightarrow \mathcal{S}^{m+1}$  splňující  $\text{id } \mathbf{A} = \mathbf{A}$ ,  $(\psi\varphi)\mathbf{A} = \psi(\varphi\mathbf{A})$ ,  $\varphi\mathbf{A} = (\varphi_0\mathbf{A}, \dots, \varphi_m\mathbf{A})$ , kde  $\varphi_i$  je složení  $\mathcal{B}_0 \xrightarrow{e_i} \mathcal{B}_m \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}_n$ .

Nechť  $\mathcal{S}$  je afinní prostor, jehož zaměření  $V$  je reálný vektorový prostor. *Komplexním rozšířením (komplexifikací)* afinního prostoru  $\mathcal{S}$  je množina  $\mathcal{S}^{\mathbb{C}} = \mathcal{S} \times V$  s operací

$$+ : \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$$

definovanou předpisem

$$(A, u) + (v, w) = (A + v, u + w).$$

Jednoduše se dá ověřit, že takto definovaná operace má všechny vlastnosti z definice afinního prostoru, např. vlastnost (3) je splněna, protože rovnice

$$(A, u) + (v, w) = (B, t)$$

má jediné řešení  $(v, w) = (\overrightarrow{AB}, t - u)$ .

Bod  $A \in \mathcal{S}$  ztotožníme s bodem  $(A, 0) \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$  a budeme tak opět chápat  $\mathcal{S}$  jako podmnožinu  $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ . Pro každý bod  $(A, u) \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$  pak platí

$$(A, u) = (A, 0) + (0, u) = A + iu.$$

cv **Příklad.** Je-li  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$  afinní podprostor s parametrickým popisem

$$\{P + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\},$$

pak  $\mathcal{T}^{\mathbb{C}}$  je afinní podprostor v  $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$  s parametrickým popisem

$$\{P + t_1v_1 + \cdots + t_kv_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}\}.$$

cv **Příklad.** Je-li  $\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$  afinní podprostor všech reálných řešení soustavy rovnic  $Ax = b$ , pak  $\mathcal{T}^{\mathbb{C}} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = b\}$  je prostorem všech komplexních řešení téže soustavy.

**Definice 1.6.** Zobrazení  $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  mezi afinními prostory se nazývá *afinní*, jestliže existuje lineární zobrazení  $\underline{\varphi}: \text{Dir } \mathcal{S} \rightarrow \text{Dir } \mathcal{T}$  takové, že

$$\varphi(A + v) = \varphi(A) + \underline{\varphi}(v)$$

pro všechny body  $A \in \mathcal{S}$  a všechny vektory  $v \in \text{Dir } \mathcal{S}$ . Zobrazení  $\underline{\varphi}$  se nazývá *indukované lineární zobrazení*.

*Poznámka.* Konceptně mnohem čistší je definovat afinní zobrazení jako dvojici  $(\varphi, \overline{\varphi})$  takovou, že  $\underline{\varphi}$  je lineární a  $\varphi$  splňuje podmínku z předchozí definice (to je přesně homomorfismus multisorted algeber).

*Poznámka.* Indukované lineární zobrazení je jednoznačně určeno afinním zobrazením  $\varphi$ , protože platí  $\underline{\varphi}(v) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(P+v)}$ , pro libovolný bod  $P \in \mathcal{S}$ .

*Poznámka.* Alternativně lze afinní zobrazení popsat právě jako ta zobrazení, která zachovávají afinní kombinace:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0A_0 + \cdots + x_nA_n) &= \varphi(P + x_0\overrightarrow{PA_0} + \cdots + x_n\overrightarrow{PA_n}) = \varphi(P) + x_0\underline{\varphi}(\overrightarrow{PA_0}) + \cdots + x_n\underline{\varphi}(\overrightarrow{PA_n}) \\ &= \varphi(P) + x_0\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A_0)} + \cdots + x_n\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A_n)} = x_0\varphi(A_0) + \cdots + x_n\varphi(A_n). \end{aligned}$$

**Definice 1.7.** Nechtě  $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  je afinní zobrazení mezi reálnými afinními prostory. Jeho *komplexní rozšíření*  $\varphi^{\mathbb{C}}: \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{T}^{\mathbb{C}}$  je definováno předpisem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(A + iu) = \varphi(A) + i\underline{\varphi}(u),$$

kde  $\underline{\varphi}$  je indukované lineární zobrazení.

cv Zobrazení  $\varphi^{\mathbb{C}}$  je opět afinní s indukovaným lineárním zobrazením  $\underline{\varphi^{\mathbb{C}}} = \underline{\varphi}$ .

### 1.3. Projektivní prostor

Nechť  $V$  je  $(n + 1)$ -rozměrný vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{K}$  (obvykle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ ).

**Definice 1.8.** Množinu  $\mathcal{P}(V)$  všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru  $V$  nazveme  $n$ -rozměrným *projektivním prostorem* nad  $\mathbb{K}$ . Vektorový prostor  $V$  se nazývá *aritmetickým základem* projektivního prostoru  $\mathcal{P}(V)$ . Prvky projektivního prostoru se nazývají *body*.

Každý nenulový vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  určuje jednorozměrný podprostor

$$[v] = \{kv \in V \mid k \in \mathbb{K}\} \in \mathcal{P}(V);$$

vektor  $v$  se nazývá *aritmetickým zástupcem* bodu  $[v]$ . Zjevně každý jiný aritmetický zástupce je nenulovým násobkem  $v$  a můžeme tedy alternativně  $\mathcal{P}(V)$  chápat jako rozklad  $(V \setminus \{0\})/\sim$  podle relace ekvivalence  $v \sim kv$ ,  $k \in \mathbb{K}^\times$ .

**Příklad.** *Standardním projektivním prostorem* dimenze  $n$  budeme rozumět  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ . K popisu bodů budeme používat označení

$$(x_0 : \dots : x_n) = [(x_0, \dots, x_n)].$$

Jedna z možných názorných představ o projektivním prostoru s aritmetickým základem  $\mathbb{R}^{n+1}$  je založena na pozorování, že každá přímka v  $\mathbb{R}^{n+1}$  protne sféru

$$S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

právě ve dvou bodech. Tedy  $\mathcal{P}_n$  je  $S^n$ , kde „ztotožníme“ protilehlé body. O něco lépe představitelná je identifikace bodů na okraji hemisféry. Takto lze podmnožiny projektivního prostoru v omezené míře i namalovat, viz přednášky.

*Poznámka.* Na přednášce jsem měl delší odbočku ohledně ploch, orientace, atd. Konkrétně jsem mluvil o Riemannovských plochách, Möbiově pásce, Kleinově láhvi a projektivním prostoru.

Libovolná báze  $\alpha = (e_0, \dots, e_n)$  vektorového prostoru  $V$  zadává identifikaci  $V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{n+1}$  a následně  $\mathcal{P}(V) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}_n$ ,  $[v] \mapsto [(v)_\alpha]$ . O obrazu bodu  $[v]$  budeme hovořit jako o jeho *homogenních souřadnicích*. Konkrétně, je-li  $(v)_\alpha = (x_0, \dots, x_n)$ , jsou homogenní souřadnice  $[v]$  rovny  $(x_0 : \dots : x_n)$  a tyto nezávisí na volbě aritmetického základu  $v$ .

### 1.4. Projektivní podprostory

Jednorozměrné podprostory v  $(k + 1)$ -rozměrném podprostoru  $W \subseteq V$  tvoří  $k$ -rozměrný *projektivní podprostor*  $\mathcal{P}(W)$  v projektivním prostoru  $\mathcal{P}(V)$ . Jednorozměrný projektivní podprostor se nazývá *projektivní přímka*.

**Příklad.** Každé dvě přímky  $p, q$  v  $\mathcal{P}_2$  mají společný bod. V aritmetickém základu  $\mathbb{K}^3$  přímkám  $p$  a  $q$  odpovídají podprostory  $U$  a  $V$  dimenze 2. Protože

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U + V)$$

a  $\dim(U + V) \leq 3$ , je  $\dim U \cap V \geq 1$ . Tedy  $p \cap q$  obsahuje alespoň jeden bod projektivního prostoru  $\mathcal{P}_2$ .



Nechť  $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{P}_n$  je  $k$ -rozměrný projektivní podprostor, zadaný  $(k+1)$ -rozměrným podprostorem  $W \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$  popsaným homogenní soustavou rovnic  $Ax = 0$ . Stejná soustava rovnic pak popisuje homogenní souřadnice bodů projektivního prostoru  $\mathcal{P}(W)$ , tj.

$$\mathcal{P}(W) = \{[x] \mid Ax = 0\}.$$

### 1.5. Kolineace

Nechť  $\mathcal{P}(V)$  a  $\mathcal{P}(W)$  jsou dva projektivní prostory dimenze  $n$ . Zobrazení  $\Phi: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(W)$  se nazývá *kolineace*, jestliže existuje lineární izomorfismus  $\varphi: V \xrightarrow{\cong} W$  takový, že

$$\Phi([v]) = [\varphi(v)]$$

pro všechna  $v \in V$ . Píšeme  $\Phi = [\varphi]$ . Kolineace  $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  tvoří grupu, kterou budeme značit  $PGL(\mathcal{P}_n)$ .

cv *Poznámka.* Analogicky k situaci ve vektorových a afinních prostorech existuje pojem báze projektivního prostoru – konkrétně *geometrická báze* je  $(n+2)$ -tice bodů tvaru  $[e_0], \dots, [e_n], [e_0 + \dots + e_n]$  pro nějakou bázi aritmetického základu. Platí, že kolineace je jednoznačně určena tím, kam posílá bázi a tu může poslat na libovolnou jinou bázi. Viz cvičení.

### 1.6. Afinní prostor jako podmnožina projektivního prostoru

Nyní se k afinnímu prostoru pokusíme přidat body v nekonečnu. Názornou představu o tomto procesu si můžeme učinit tím, že afinní prostor budeme vnímat jako rovinu nad níž se nachází pozorovatel (jako když se díváme na podlahu). Pak když pozorujeme svět kolem sebe tak vidíme jednak body této roviny a jednak body na horizontu<sup>1</sup>. Body na horizontu mají speciální význam, odpovídají směrům v rovině – například každé dvě rovnoběžné přímky v rovině se protínají na horizontu přesně v bodě odpovídajícím jejich společnému směru, atd. Pokusíme se nyní tuto situaci popsat obecně.

Nechť  $\mathcal{P}(V)$  je  $n$ -rozměrný projektivní prostor s aritmetickým základem  $V$ . Nechť  $\mathcal{N} \subseteq V$  je afinní nadrovina neprocházející počátkem. Pro každý bod  $X \in \mathcal{P}(V)$  nastane právě jedna z následujících dvou možností:

- $X \cap \mathcal{N} = \emptyset$ , potom  $X \in \mathcal{P}(\text{Dir } \mathcal{N})$  nebo
- $X \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ , potom je tímto průnikem jediný bod. Naopak, každým bodem  $A \in \mathcal{N}$  prochází jediný jednorozměrný podprostor  $X \in \mathcal{P}(V)$ .

Dostáváme tak identifikaci  $\mathcal{N} \cong \mathcal{P}(V) \setminus \mathcal{P}(\text{Dir } \mathcal{N})$ . Definujme *nevlastní prostor* afinního prostoru  $\mathcal{S}$  jako  $\nu(\mathcal{S}) = \mathcal{P}(\text{Dir } \mathcal{S})$ . Můžeme potom psát

$$\mathcal{P}(V) = \mathcal{N} \sqcup \nu(\mathcal{N}).$$

O bodech z  $\mathcal{N}$  (lépe řečeno jednorozměrných podprostorech  $V$  protínajících  $\mathcal{N}$ ) budeme hovořit jako o *vlastních bodech* a o bodech  $\nu(\mathcal{N})$  jako o *nevlastních bodech* nebo také *směrech*. Toto rozdělení samozřejmě závisí na volbě nadroviny  $\mathcal{N}$  (ve skutečnosti pouze na  $\text{Dir } \mathcal{N}$ ).

V této situaci mluvíme o projektivním prostoru  $\mathcal{P}(V)$  jako o *projektivním rozšíření* afinního prostoru  $\mathcal{N}$  a značíme jej  $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{P}(V)$ .

<sup>1</sup>Body nad horizontem budeme ignorovat. Důvodem je, že naše vnímání je založené na polopřímkách, zatímco projektivní prostor na přímkách a v projektivním vnímání jsou tedy body nad horizontem zároveň body roviny vyskytující se tímž směrem za pozorovatelem.

## 1. Afinní a projektivní prostory

*Poznámka.* S poslední závorkou souvisí následující otázka: kdy jsou dva afinní prostory *stejné*? Zřejmě musí mít stejnou nosnou množinu a stejnou afinní strukturu. Znamená to nutně, že mají stejné zaměření ve smyslu naší definice? Já bych řekl, že ne, že to je externí struktura. Z tohoto pohledu je lepší definice pomocí afinních kombinací, kde je zaměření konstrukce a nikoliv součást definice (zaměření je vektorový prostor všech translací).

**Příklad.** Zabývejme se příkladem  $\mathcal{N} = \mathcal{A}_n \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ , tj. standardním afinním prostorem dimenze  $n$ . Potom bod  $(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$  ztotožňujeme s vlastním bodem  $(1 : x_1 : \dots : x_n)$  a zbylé body  $\mathcal{P}_n$  jsou tvaru  $(0 : x_1 : \dots : x_n)$  a leží v  $\nu(\mathcal{A}_n)$ . Zejména  $\mathcal{P}_n = \overline{\mathcal{A}_n}$ .

\*\* *Poznámka.* Přesuňme se nyní do situace, kdy máme zadaný abstraktní afinní prostor  $\mathcal{S}$  a chceme definovat jeho projektivní rozšíření. Podle předchozího výkladu je vhodné  $\mathcal{S}$  vložit do nějakého vektorového prostoru  $V$  jako afinní nadrovinu neprocházející počátkem. K tomu, abychom tento vektorový prostor definovali, předpokládejme prvně, že takové vložení máme a popišme  $V$  pouze pomocí  $\mathcal{S}$ .

Nechť  $P \in \mathcal{S}$  je libovolný bod (o kterém můžeme uvažovat jako o počátku). Zjevně platí  $V = [P] \oplus \text{Dir } \mathcal{S}$  (jsou to podprostory komplementární dimenze s nulovým průnikem, protože  $\mathcal{S}$  neprochází počátkem), a proto můžeme obecný vektor  $u \in V$  psát jednoznačně jako  $u = tP + v$ , kde  $t \in \mathbb{K}$  a  $v \in \text{Dir } \mathcal{S}$ . Zřejmě tedy máme bijekci  $\mathbb{K} \times \text{Dir } \mathcal{S} \cong V$ ,  $(t, v) \mapsto tP + v$ .

Mohli bychom tedy definovat  $V = \mathbb{K} \times \text{Dir } \mathcal{S}$ , bijekce z předchozího odstavce ale bohužel závisí na volbě počátku  $P$ . Pokusme se nyní této závislosti zbavit a uvažujme tedy jinou volbou počátku  $Q$  a počítejme

$$sQ + w = s(P + \overrightarrow{PQ}) + w = sP + (s\overrightarrow{PQ} + w).$$

Zřejmě tedy platí  $tP + v = sQ + w$ , právě když  $s = t$  a  $v = s\overrightarrow{PQ} + w$ .

Je-li nyní  $\mathcal{S}$  libovolný afinní prostor, uvážíme na  $\mathbb{K} \times \mathcal{S} \times \text{Dir } \mathcal{S}$  relaci ekvivalence, jejíž třídy  $[(t, P, v)]$  budeme značit  $tP + v$  a budeme tedy požadovat  $tP + v = sQ + w$ , právě když platí  $s = t$  a  $v - w = s\overrightarrow{PQ}$ . Potom lze na vzniklém rozkladu  $V(\mathcal{S}) = (\mathbb{K} \times \mathcal{S} \times \text{Dir } \mathcal{S}) / \sim$  zavést strukturu vektorového prostoru (platí  $tP + v = tO + (t\overrightarrow{OP} + v)$  a položíme  $(tO + v) + (sO + w) = (t + s)O + (v + w)$ ). Bod  $A \in \mathcal{S}$  ztotožníme s vektorem  $1A + 0 \in V(\mathcal{S})$  a tímto způsobem budeme chápat  $\mathcal{S}$  jako nadrovinu ve  $V(\mathcal{S})$ . Dostáváme tak projektivní rozšíření  $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{P}(V(\mathcal{S}))$ .

*Poznámka.* Pomocí afinních kombinací lze tuto konstrukci o něco zkrátit:  $V$  vznikne přidáním jediného bodu  $0$  k  $\mathcal{S}$ ,  $V = 0 * \mathcal{A}$ , jedná se tedy o afinní prostor s vybraným bodem  $0$ , tj. o vektorový prostor. Body  $V$  lze psát jako afinní kombinace  $t_0 0 + t_1 A_1 + \dots + t_n A_n$ , přičemž

$$t_0 0 + t_1 A_1 + \dots + t_n A_n = s_0 0 + s_1 B_1 + \dots + s_n B_n,$$

právě když  $t_0 = s_0$  a  $t_1 A_1 + \dots + t_n A_n = s_1 B_1 + \dots + s_n B_n$  – to jsou buď nenulové násobky nějakých afinních kombinací (pokud  $t_0 \neq 1$ ) nebo kombinace s nulovým součtem a tedy vektory z  $\text{Dir } \mathcal{S}$ ; v obou případech dává rovnost smysl.

cv **Cvičení.** Popište projektivní přímku procházející dvěma vlastními body; vlastním a nevlastním bodem (řešte stejným způsobem).

### 1.7. Projektivní rozšíření afinních podprostorů

Nechť  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$  je afinní podprostor. Naším cílem bude zkonstruovat projektivní podprostor  $\overline{\mathcal{T}} \subseteq \overline{\mathcal{S}}$  tak, že  $\overline{\mathcal{T}}$  bude projektivním rozšířením  $\mathcal{T}$ . Předpokládejme tedy, že  $\mathcal{S} \subseteq V$  jako afinní nadrovina a pokusme se najít vektorový podprostor  $W \subseteq V$ , v němž bude  $\mathcal{T}$  ležet jako afinní nadrovina. Protože  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$  neprochází počátkem, stačí za  $W$  zvolit lineární obal  $\mathcal{T}$ , který

je zjevně  $W = \{0\} * \mathcal{T}$  (spojení počátku a  $\mathcal{T}$  – to je afinní podprostor obsahující počátek, tj. vektorový podprostor). Pro dimenzi platí  $\dim W = \dim\{0\} + 1 + \dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T} + 1$ , takže v něm vsuktuku leží  $\mathcal{T}$  jako afinní nadrovina neprocházející počátkem. Můžeme tedy psát  $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{P}(W)$  a jedná se o projektivní podprostor  $\mathcal{S}$  – hovoříme o *projektivním rozšíření afinního podprostoru*. Z konstrukce vidíme, že se jedná o *nejmenší* projektivní podprostor  $\overline{\mathcal{S}}$  obsahující  $\mathcal{T}$ . Z předchozí sekce víme, že  $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \sqcup \nu(\mathcal{T})$  a tedy  $\overline{\mathcal{T}}$  obsahuje krom bodů z  $\mathcal{T}$  také směry v zaměření  $\text{Dir } \mathcal{T}$ . To podává uspokojivé vysvětlení, proč (a kde!) se protínají rovnoběžné přímky.

Zabývejme se nyní početním aspektem. Nechť je  $\mathcal{T}$  zadán soustavou (nehomogenních) lineárních rovnic  $b + Ax = 0$ . Tu můžeme vhodně zapsat jako  $(b \mid A) \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0$ . Protože jsou tedy body  $\mathcal{T}$  dány soustavou

$$(b \mid A) \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = 0, \quad x_0 = 1,$$

je zjevně  $\mathcal{T}$  afinní nadrovinou ve vektorovém podprostoru zadaném první (homogenní) soustavou rovnic  $(b \mid A) \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = 0$  (speciálně je třeba vyřešit případ, že by původní soustava neměla řešení<sup>2</sup>).

Podívejme se na tento podprostor poněkud elementárněji: platí  $X = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathcal{T}$ , právě když  $x_0 \neq 0$  a  $X = (1 : x_1/x_0 : \dots : x_n/x_0) = (1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \in \mathcal{T}$ , tj. právě když  $x_0 \neq 0$  a

$$b + A(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)^T = 0.$$

Přenásobením  $x_0 \neq 0$  dostáváme ekvivalentní podmínku

$$bx_0 + A(x_1, \dots, x_n)^T = (b \mid A) (x_0, x_1, \dots, x_n)^T = 0.$$

Dostaneme tedy popis projektivního rozšíření  $\overline{\mathcal{T}}$  tak, že do soustavy zadávající  $\mathcal{T}$  dosadíme  $(1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , přenásobením  $x_0$  z ní uděláme opět lineární soustavu a zapomeneme na podmínku  $x_0 \neq 0$  (tím přesně přidáme nevlastní body – navíc je jasné, že tyto přidané body budou právě ty s  $x_0 = 0$ , tj. řešení homogenizované soustavy).

### \* 1.8. Vztah afinních zobrazení, lineárních zobrazení a kolineací

Zabývejme se vztahem afinních zobrazení  $\mathcal{A}_m \rightarrow \mathcal{A}_n$  a lineárních zobrazení  $\mathbb{K}^{m+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ . Zjevně, každé lineární zobrazení  $T: \mathbb{K}^{m+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$  s vlastností  $T(\mathcal{A}_m) \subseteq \mathcal{A}_n$  dává po zúžení afinní zobrazení  $\varphi: \mathcal{A}_m \rightarrow \mathcal{A}_n$ . Budeme-li  $T$  psát blokově tvaru  $(1+n) \times (1+m)$ , pak

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & c \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + cx \\ b + Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b + Ax \end{pmatrix}$$

a je vidět, že musí platit  $k = 1, c = 0$ .

Naopak, nechť  $\varphi$  je afinní zobrazení. Potom

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b + Ax \end{pmatrix},$$

<sup>2</sup>V takovém případě je  $\mathcal{T} = \emptyset$  a tedy podle naší definice je  $\overline{\mathcal{T}} = \emptyset$ . Z druhého pohledu je pak  $\mathcal{T} = \emptyset$  s *netriválním* zaměřením daném řešeními příslušně homogenní soustavy a  $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \sqcup \nu(\mathcal{T}) = \mathcal{P}(\text{Dir } \mathcal{T})$ .

## 1. Afinní a projektivní prostory

---

pokud vezmeme za  $b$  souřadnice  $\varphi(e_0)$  a za  $A$  matici  $\underline{\varphi}$  ve standardních bázích. Proto je  $\varphi$  zúžením lineárního zobrazení s maticí  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}$ .

cv Na cvičení ukážeme, že, je-li kolineace  $\Phi$  reprezentována dvěma lineárními izomorfismy  $\varphi, \psi$ , pak platí  $\psi = k\varphi$ . Díky předchozí analýze je pak jednoduché vidět, že každá kolineace je reprezentována maximálně jedním afinním zobrazením a tento případ nastane, právě když  $\Phi$  zachovává rozklad na vlastní a nevlastní podprostory. Ve výsledku tedy lze říct, že afinní zobrazení jsou kolineace zachovávající rozklad  $\overline{\mathcal{A}}_n = \mathcal{A}_n \sqcup \nu(\mathcal{A}_n)$ .

### Kontrolní otázky

1. Nechť  $V$  je reálný vektorový prostor. Definujte jeho komplexifikaci  $V^{\mathbb{C}}$ . Ukažte na příkladu  $V = \mathbb{R}_2[x]$  reálných polynomů stupně nejvýše 2. Co je  $V^{\mathbb{C}}$  v tomto případě?
2. Vyslovte definici afinního prostoru a afinního zobrazení. Demonstrujte na několika příkladech.
3. Co jsou body projektivního prostoru  $\mathcal{P}_n$ ? Co jsou přímky v  $\mathcal{P}_n$ ? Mají každé dvě projektivní přímky v  $\mathcal{P}_3$  neprázdný průnik?
4. Vysvětlete projektivní rozšíření afinní roviny  $\mathcal{A}_2$  na projektivní prostor  $\mathcal{P}_2$ . Představujte si  $\mathcal{A}_2$  jako rovinu v  $\mathbb{R}^3$  zadanou v souřadnicích rovnicí  $x_0 = 1$ . Co jsou v tomto případě nevlastní body?

### Příklady k procvičení

1. Ke komplexnímu vektorovému prostoru  $V$  lze definovat konjugovaný prostor  $\overline{V}$  takto: množinově  $\overline{V} = V$ , sčítání vektorů je stejné jako ve  $V$  a násobení skalárem  $\odot$  definujeme předpisem

$$(a + ib) \odot u = (a - ib) \cdot u.$$

Dokažte, že  $\overline{V}$  je komplexní vektorový prostor.

2. Ke komplexnímu vektorovému prostoru  $V$  lze definovat jeho *realifikaci*  $V^{\mathbb{R}}$  takto: množinově  $V^{\mathbb{R}} = V$ , sčítání vektorů je stejné jako ve  $V$  a násobení reálným číslem je stejné. Nechť  $(e_1, \dots, e_n)$  je báze  $V$ . Najděte nějakou bázi  $V^{\mathbb{R}}$ .

[Řešení: Např.  $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ .]

3. Dokažte, že pro reálný vektorový prostor  $V$  platí

$$(V^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} \simeq V \oplus V.$$

4. Dokažte, že pro komplexní vektorový prostor  $V$  platí

$$(V^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}.$$

5. Nechť  $\varphi: V \rightarrow W$  je lineární zobrazení mezi komplexními vektorovými prostory. Zobrazením  $\varphi$  je indukováno zobrazení

$$\varphi^{\mathbb{R}}: V^{\mathbb{R}} \rightarrow W^{\mathbb{R}}.$$

Dokažte, že  $\varphi^{\mathbb{R}}$  je lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory.

6. Jsou-li v prostorech  $V$  a  $W$  z předchozího příkladu zvoleny báze  $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$  a  $\beta = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m)$ , můžeme najít matice  $A$  a  $B$  takové, že matice zobrazení  $(\varphi)_{\beta\alpha} = A + iB$ . Zvolme v prostoru  $V^{\mathbb{R}}$  bázi  $\alpha^{\mathbb{R}} = (e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$  a v prostoru  $W^{\mathbb{R}}$  bázi  $\beta^{\mathbb{R}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m, i\tilde{e}_1, \dots, i\tilde{e}_m)$ . Dokažte, že matice zobrazení  $\varphi^{\mathbb{R}}$  v těchto bázích je

$$(\varphi^{\mathbb{R}})_{\beta^{\mathbb{R}}\alpha^{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Uvědomte si, jaké jsou rozměry jednotlivých matic!

7. V prostoru  $\mathcal{A}_3^{\mathbb{C}}$  udejte příklady přímky  $p$  takové, že přímky  $p$  a  $\bar{p}$  jsou rovnoběžné, různoběžné, mimoběžné.
8. Necht'  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_n$  je afinní podprostor. Popište nejmenší projektivní podprostor  $\overline{\mathcal{A}}_n$  obsahující  $\mathcal{S}$ , tzv. projektivní rozšíření  $\mathcal{S}$ . Značíme jej  $\overline{\mathcal{S}}$ . Popište také nevlastní body  $\overline{\mathcal{S}}$ . Interpretujte průnik  $\overline{\mathcal{S}} \cap \overline{\mathcal{T}}$ . (Podstatné je, že  $\mathcal{S}$  je afinní nadrovinou ve svém lineárním obalu.)
9. Najděte bod, kde se protínají větve paraboly  $y = x^2$ .

## 2. Polyedry a lineární programování

Hlavní myšlenkou této kapitoly je studovat podmnožiny eukleidovského prostoru  $\mathbb{R}^n$  skrze rovnice či nerovnice, které tyto podmnožiny splňují. Možností, jak toto upřesnit je spousta: můžeme uvažovat rovnice tvaru  $f(x) = 0$ , kde  $f$  omezíme na (homogenní nebo nehomogenní) lineární funkce, (homogenní nebo nehomogenní) polynomiální funkce, spojitě funkce, hladké funkce, atd.; také můžeme uvažovat nerovnice  $f(x) \geq 0$  pro stejné třídy funkcí. V dalším nás bude nejvíce zajímat případ lineárních nerovnic  $ax + \beta \geq 0$ , kde používáme značení  $a \in (\mathbb{R}^n)^*$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Z tohoto pohledu neumíme rozlišit mezi množinou tří bodů v rovině a trojúhelníkem mající tyto tři body za vrcholy, protože tyto množiny splňují přesně tytéž lineární nerovnice – to si lze snadno rozmyslet, když si uvědomíme, že množina řešení nerovnice je polorovina, a že tyto dvě množiny leží ve stejných polorovinách (přesněji pokud v nějaké polorovině leží trojice bodů, bude v ní automaticky ležet i celý trojúhelník). Přitom trojúhelník je v jistém smyslu speciální, protože to je celá množina řešení jistého systému nerovnic. Situace se snadno popíše pomocí tzv. Galoisovy konexe. Zásadní výsledek, i když velmi snadný, je, že vždy dostáváme bijekci mezi množinami řešení na straně jedné a množinami vztahů na straně druhé.

Tato dualita bude v našem výkladu hrát zásadní roli a lze ji velice hezky ilustrovat na předchozím příkladu. Viděli jsem, že pokud tři body patří do množiny řešení systému lineárních nerovnic, bude tam ležet i celý trojúhelník jimi “generovaný”. Naopak trojúhelník lze zadat třemi nerovnicemi vyjadřujícími náležitost do tří polorovin určených jednotlivými hranami trojúhelníka. Samozřejmě bude trojúhelník splňovat také spoustu dalších nerovnic, ale ty budou opět “generovány” těmi zmíněnými třemi. Trojúhelník tedy lze zadat třemi body nebo třemi nerovnicemi. Ve vyšších dimenzích už tyto počty nebudou totožné, ale vždy bude platit, že daný útvar lze zadat konečným počtem bodů, právě když jej lze zadat konečným počtem lineárních nerovnic a takovéto útvary budeme nazývat polyedry.

Zabývejme se nyní krátce tím, jak vypadají polyedry dimenze 2. S výjimkou celé roviny se jedná o mnohoúhelníky s tím, že některé vrcholy mohou ležet “v nekonečnu”; například (konvexní) úhel je trojúhelník mající dva vrcholy v nekonečnu. Jestliže k rovině přidáme body v nekonečnu (půjde o jisté projektivní rozšíření), můžeme pak s body v nekonečnu nakládat

## 2. Polyedry a lineární programování

stejně jako s ostatními body a situace se stane homogenní; po pravdě se opravdu stanou definující rovnice homogenní, jak časem uvidíme. Protože je tato homogenní situace výrazně jednodušší, začneme prvně s ní a budeme tedy zkoumat podmnožiny  $\mathbb{R}^n$  skrze homogenní lineární nerovnice, které tato podmnožina splňuje.

Začneme s Galoisovou konexí, která je sice poměrně snadným pojmem, ale bude i přesto velmi užitečná.

**Definice 2.1.** Galoisova konexe je dvojice zobrazení  $F: A \longleftarrow B : G$  mezi uspořádanými množinami  $A, B$ , splňující:

- $a \leq a' \Rightarrow Fa \geq Fa'$ ,
- $b \leq b' \Rightarrow Gb \geq Gb'$ ,
- $a \leq GFa$ ,
- $b \leq FGb$ .

První dvě podmínky říkají, že obě  $F, G$  obrací uspořádání, pro vysvětlení zbylých dvou budeme prvky v obrazu  $G$  nazývat  $G$ -uzavřené a prvky v obrazu  $F$  pak  $F$ -uzavřené. Pro  $a \in A$  je  $GFa$  tedy  $G$ -uzavřený, nyní ukážeme, že je dokonce nejmenší  $G$ -uzavřený nad  $a$ : nechť tedy  $a \leq Gb$ , pak  $b \leq FGb \leq Fa$  a nakonec  $a \leq GFa \leq Gb$ . Budeme tedy říkat, že  $GFa$  je  $G$ -uzávěr  $a$ , složení  $GF$  budeme nazývat uzávěrový operátor a zejména vidíme, že  $a$  je  $G$ -uzavřený, právě když  $GFa = a$ .

**Lemma 2.2.** Galoisova konexe se zužuje na bijekci mezi  $G$ -uzavřenými a  $F$ -uzavřenými prvky. □

### 2.1. Polyedrání kužely

Prvně se budeme zabývat homogenní situací, tedy homogenními lineárními nerovnicemi. Uvažme následující Galoisovu konexi

$$(-)^\diamond: \{\text{podmnožiny } U\} \longleftarrow \{\text{podmnožiny } U^*\} : (-)^\diamond$$

posílající podmnožinu  $X \subseteq U$  na množinu všech homogenních lineárních nerovnic, které tato podmnožina splňuje, přesněji

$$X^\diamond = \{a \in U^* \mid \forall x \in X: ax \geq 0\}$$

Zobrazení v opačném směru je definováno zcela analogicky: přiřadí systému  $A$  lineárních nerovnic množinu řešení tohoto systému,

$$A^\diamond = \{x \in U \mid \forall a \in A: ax \geq 0\}.$$

Evidentně  $(-)^{\diamond}$ -uzavřené podmnožiny, tj. prvky obrazu  $(-)^{\diamond}$ , jsou právě množiny řešení systémů homogenních lineárních rovnic a  $(-)^{\diamond}$ -uzávěr množiny  $X$  je pak množina  $X^{\diamond\diamond}$  řešení systému všech homogenních nerovnic, které  $X$  splňuje. O něco přehledněji je množina řešení jedné nerovnice poloprostor procházející počátkem a  $X^{\diamond\diamond}$  je tedy průnik všech poloprostorů procházejících počátkem, ve kterých  $X$  leží. Následující tvrzení poměrně snadno charakterizuje  $(-)^{\diamond}$ -uzavřené množiny, v dalším jej ale nebudeme používat.

**Tvrzení 2.3.** Podmnožina  $X \subseteq U$  je  $(-)^{\circ}$ -uzavřená, právě když je  $X$  uzavřená na nezáporné lineární kombinace a zároveň uzavřená ve smyslu topologie.<sup>3</sup>

Množinám uzavřeným na nezáporné lineární kombinace budeme říkat konvexní kužely. Definujme

$$\text{cone } X = \{t_1x_1 + \dots + t_nx_n \mid n \geq 0, x_i \in X, t_i \geq 0\},$$

tj. množinu všech nezáporných lineárních kombinací prvků (pro  $n = 0$  dostaneme  $0 \in \text{cone } X$ ). Množina  $X$  je tedy konvexní kužel, pokud  $X = \text{cone } X$ . Podle předchozího tvrzení se Galoisova konexe zužuje na bijekci

$$\{\text{uzavřené konvexní kužely v } U\} \cong \{\text{uzavřené konvexní kužely v } U^*\},$$

v dalším nás ale budou zajímat jen ty konvexní kužely, které jsou v nějakém smyslu konečné a které budou zjevně  $(-)^{\circ}$ -uzavřené.

Definujme  $\mathcal{H}$ -kužel jakožto množinu tvaru  $A^{\circ}$  pro libovolnou konečnou množinu  $A$ , tedy jakožto množinu řešení konečného systému homogenních lineárních nerovnic. Definujme dále  $\mathcal{V}$ -kužel jakožto množinu tvaru  $X^{\circ\circ}$  pro nějakou konečnou množinu  $X$ ; jedná se tedy o nejmenší  $(-)^{\circ}$ -uzavřenou množinu obsahující  $X$  a je tedy v jistém smyslu generovaná konečnou množinou  $X$  – následující věta tuto situaci popíše konkrétně. Evidentně pak dostáváme zúžením Galoisovy korespondence bijekce

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}\text{-kužely v } U\} &\cong \{\mathcal{H}\text{-kužely v } U^*\} \\ \{\mathcal{H}\text{-kužely v } U\} &\cong \{\mathcal{V}\text{-kužely v } U^*\} \end{aligned}$$

**Věta 2.4.** Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1.  $C$  je  $\mathcal{V}$ -kužel,
2.  $C = \text{cone } X$  pro nějakou konečnou množinu  $X$ ,
3.  $C = X^{\circ\circ}$  pro nějakou konečnou množinu  $X$ , tj.  $C$  je  $\mathcal{H}$ -kužel.

Množinám tohoto tvaru budeme říkat *polyedrální kužely*.

*Poznámka.* V kontextu předchozího tvrzení lze ekvivalenci prvních dvou popisů interpretovat tak, že pro konečnou množinu  $X$  již bude  $\text{cone } X$  topologicky uzavřený konvexní kužel a leží tedy v obrazu. Poznamenejme, že pro nekonečnou množinu  $X$  toto pravda není (to by pak každý konvexní kužel byl automaticky topologicky uzavřený).

<sup>3</sup>Zjevně každá množina řešení  $A^{\circ}$  je uzavřený konvexní kužel (například je to průnik poloprostorů  $a^{\circ}$  pro  $a \in A$ , které jsou uzavřenými konvexními kužely, a tím pádem i jejich průnik).

Zbývá tedy ukázat, že naopak každý uzavřený konvexní kužel  $X$  splňuje  $X = X^{\circ\circ}$ , přičemž inkluze  $\subseteq$  platí pro libovolné  $X$ . Necht' tedy  $X$  je uzavřený konvexní kužel a  $u \notin X$ . Zvolme na  $U$  libovolně skalární součín a necht'  $\bar{x} \in X$  je nějaký z nejbližších bodů k  $u$  (podle definice je  $X$  neprázdná a nejbližší bod existuje díky uzavřenosti  $X$ ). Potom zjevně

$$ax := \langle \bar{x} - u, x \rangle = 1/2 \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \bar{x} + tx - u, \bar{x} + tx - u \rangle \geq 0$$

(v opačném případě by vzdálenost  $\bar{x} + tx$  od  $u$  byla pro malé  $t > 0$  menší než vzdálenost  $\bar{x}$  od  $u$ ), takže  $a \in X^{\circ}$ , přitom

$$au = \langle \bar{x} - u, u \rangle < \langle \bar{x} - u, \bar{x} \rangle = 1/2 \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} \langle t\bar{x} - u, t\bar{x} - u \rangle = 0$$

(v opačném případě by vzdálenost  $t\bar{x}$  od  $u$  byla pro  $t$  blízko 1 menší než vzdálenost  $\bar{x}$  od  $u$ ), takže  $u$  nespĺňuje  $au \geq 0$  a tedy  $u \notin X^{\circ\circ}$ .

## 2. Polyedry a lineární programování

Pro důkaz bude zcela zásadní tzv. Motzkinova eliminace, kterou lze teoreticky použít i k řešení soustavy nerovnic – konkrétně ji lze použít k rozhodování, zda daný systém má nějaké řešení. Uvažujme soustavu homogenních lineárních nerovnic  $bt + Ax \geq 0$  v proměnných  $t, x_1, \dots, x_n$  jako soustavu nerovnic v jedné proměnné  $t$  a považujme tedy  $x_1, \dots, x_n$  za parametry. Budeme zkoumat, kdy má tato soustava řešení. Jednotlivé nerovnice v systému rozdělíme podle koeficientu  $\beta_i$ :

$$\beta_i t + a_i x \geq 0$$

Pokud  $\beta_j = 0$ , je tato nerovnice ekvivalentní  $a_j x \geq 0$ . Pokud  $\beta_k > 0$ , je tato nerovnice ekvivalentní  $t \geq -a_k/\beta_k \cdot x$ . Pokud  $\beta_l < 0$ , je tato nerovnice ekvivalentní  $t \leq -a_l/\beta_l \cdot x$ . Zjevně lze systém skládající se z posledních dvou typů nerovnic vyřešit vzhledem k  $t$ , právě když každá horní mez je větší nebo rovna každé dolní mezi, tj.

$$-a_l/\beta_l \cdot x \geq -a_k/\beta_k \cdot x$$

nebo ekvivalentně

$$(a_k/\beta_k - a_l/\beta_l) \cdot x \geq 0.$$

Společně s nerovnicemi prvního typu, tj.  $a_j x \geq 0$ , dostáváme soustavu  $A'x \geq 0$ , pro níž platí: pro každou volbu parametru  $x$  má původní soustava  $bt + Ax \geq 0$  nějaké řešení  $t$ , právě když platí  $A'x \geq 0$ . Symbolicky:

$$\exists t: bt + Ax \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A'x \geq 0.$$

*Poznámka.* Jedná se o analogii Gaussovy eliminace. V řeči rovnic by Motzkinova eliminace probíhala tak, že bychom z každé rovnice obsahující  $t$  vyjádřili  $t$  a tato vyjádření položili navzájem si rovna, rovnice neobsahující  $t$  bychom zachovali. To je zhruba to samé, co se děje při Gaussově eliminaci, tam ale porovnáme všechna vyjádření pouze vůči jednomu konkrétnímu (danému výběrem pivotu).

Poslední formulace říká, že lze Motzkinovu eliminaci považovat za tzv. eliminaci (existenčních) kvantifikátorů, protože pro danou formuli s existenčním kvantifikátorem najdeme ekvivalentní formuli bez kvantifikátoru, přičemž iterací lze samozřejmě odstranit libovolný konečný počet existenčních kvantifikátorů.

*Poznámka.* Jiná formulace využívá projekci  $(t, x) \mapsto x$ . Formule vlevo zjevně popisuje obraz množiny řešení soustavy  $bt + Ax \geq 0$ , tedy obecného  $\mathcal{H}$ -kuželu. Ekvivalence pak říká, že obrazem je  $\mathcal{H}$ -kužel zadaný soustavou  $A'x \geq 0$ . Tak lze interpretovat i následující důkaz hlavní věty.

*Důkaz.* Prvně ukážeme  $2 \Rightarrow 3$ . Nechť tedy  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ , pak  $\text{cone } X$  je zjevně množina těch  $x$ , které splňují formuli

$$\exists t_1 \dots \exists t_k: x = t_1 x_1 + \dots + t_k x_k, t_1 \geq 0, \dots, t_k \geq 0$$

Protože je však tato formule ekvivalentní formuli  $Ax \geq 0$  díky Motzkinově eliminaci, jedná se o  $\mathcal{H}$ -kužel.

Nyní ukážeme  $1 \Rightarrow 2$ , přesněji pro konečnou množinu  $X$  dokážeme  $X^\circ = \text{cone } X$ . Protože je  $X^\circ$  nejmenší množina tvaru  $A^\circ$  obsahující  $X$ , stačí ukázat, že  $\text{cone } X$  splňuje totéž. Podle právě dokázané implikace  $2 \Rightarrow 3$  je  $\text{cone } X$  tvaru  $A^\circ$  (navíc pro konečnou množinu  $A$ ). Zároveň je každá množina tvaru  $A^\circ$  uzavřená na nezáporné lineární kombinace, takže pokud obsahuje  $X$ , musí obsahovat i  $\text{cone } X$  a tím pádem je  $\text{cone } X$  nejmenší.

Implikace  $3 \Rightarrow 1$  je jednoduchou aplikací duality a již dokázané implikace  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ , totiž  $C$  je  $\mathcal{H}$ -kužel  $\Rightarrow C^\circ$  je  $\mathcal{V}$ -kužel  $\Rightarrow C^\circ$  je  $\mathcal{H}$ -kužel  $\Rightarrow C$  je  $\mathcal{V}$ -kužel.  $\square$



**Důsledek 2.5** (Farkasovo lemma pro kužely). *Nechť  $C: Ax \geq 0$  je polyedrál ní kužel. Pak  $C$  splňuje lineární nerovnici  $cx \geq 0$ , právě když je tato nezápornou lineární kombinací generujících nerovnic, tj.  $c = yA$  pro nějaké  $y \geq 0$ .*

*Důkaz.* Podle předpokladu platí  $C = A^\circ$ , kde  $A$  nyní bereme jako množinu řádků matice  $A$ , tedy jako podmnožinu  $A \subseteq U^*$ . Jestliže  $C$  splňuje  $cx \geq 0$ , pak  $c \in C^\circ = A^\circ = \text{cone } A$ , protože je  $A$  konečná. To ale přesně znamená, že  $c$  je nezápornou lineární kombinací řádků matice  $A$ .  $\square$

## 2.2. Polyedry

Uvažujme  $U$  jako podprostor  $\{1\} \times U \subseteq \mathbb{R} \times U$  se souřadnicemi  $t$  na  $\mathbb{R}$  a  $x$  na  $U$ , tedy jako podprostor  $\{t = 1\}$ . Zjevně řešení systému  $b + Ax \geq 0$  jsou právě průniky

$$\{bt + Ax \geq 0\} \cap \{t = 1\}$$

polyedrál níh kuželů s nadrovinou  $\{t = 1\}$ . Takovým podmnožinám budeme říkat *polyedry*. Zabývejme se nyní podrobněji zobrazením

$$\{\text{kužely v } \mathbb{R} \times U\} \rightarrow \{\text{polyedry v } U\}$$

daným právě průnikem s  $\{t = 1\}$ . Označme pro jednoduchost  $C_1 = C \cap \{t = 1\}$ , v dalším budeme potřebovat také  $C_0 = C \cap \{t = 0\}$ . Je-li polyedr  $P$  obrazem kuželu  $C$ , pak zřejmě  $P = C_1 \subseteq C$ , takže  $P^\circ \subseteq C$  a následně

$$P \subseteq (P^\circ)_1 \subseteq C_1$$

a protože  $P = C_1$ , dostáváme  $P = (P^\circ)_1$ . Máme tedy přirozeného kandidáta na inverzní zobrazení, totiž  $P \mapsto P^\circ$ . Zřejmě kužely tohoto tvaru budou obsaženy v  $t \geq 0$ , protože celý prostor  $\{t = 1\}$  je v tomto poloprostoru obsažen. Navíc, pokud  $P \neq \emptyset$ , není  $P^\circ$  zcela obsažen v  $\{t = 0\}$ . Budeme tedy říkat, že kužel  $C$  je *kladný*, pokud  $C \subseteq \{t \geq 0\}$ ,  $C \not\subseteq \{t = 0\}$ . Ve zbylém případě  $P = \emptyset$  je pak  $P^\circ = 0$ . Kladným kuželům společně s nulovým budeme říkat *nezáporné*.

**Věta 2.6.** *Zobrazení  $C \mapsto C_1$  je bijekce*

$$\{\text{nezáporné kužely v } \mathbb{R} \times U\} \rightarrow \{\text{polyedry v } U\}$$

s inverzí  $P \mapsto P^\circ$ .

*Důkaz.* Již jsme ukázali, že pro polyedr  $P$  platí  $P = (P^\circ)_1$ , zbývá tedy dokázat  $C = C_1^\circ$  pro nezáporné kužely  $C$ . Protože se jedná o  $(-)$ -uzavřené množiny, je toto ekvivalentní  $C^\circ = C_1^\circ$ , přičemž implikace  $\Rightarrow$  je triviální. Nechť tedy  $cx \geq 0$  platí na  $C_1$  a ukážeme, že platí i na  $C$ . Protože každý prvek  $C$  s  $t > 0$  je kladným násobkem prvku z  $C_1$  bude nerovnice  $cx \geq 0$  pro takové prvky splněna a zbývá vyřešit případ  $v \in C_0$ . Nechť  $x_0 \in C_1$  je libovolný bod. Pak  $x_0 + \lambda v \in C_1$  pro libovolné  $\lambda \geq 0$  a musí tedy platit  $c(x_0 + \lambda v) \geq 0$  pro libovolné  $\lambda \geq 0$  a tedy jistě  $cv \geq 0$ , takže  $v$  také splňuje uvažovanou nerovnici.  $\square$

Nyní vysvětlíme, jak popsat polyedry pomocí  $\mathcal{V}$ -kuželů. Protože je  $\mathcal{V}$ -kužel obsažen v  $t \geq 0$ , můžeme jeho generující vektory psát jako  $(1, x_i)$  nebo  $(0, v_j)$ . Jejich nezáporná kombinace leží v  $\{t = 1\}$ , právě když je tvaru

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + t_1 v_1 + \cdots + t_l v_l,$$

## 2. Polyedry a lineární programování

kde  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$  a všechny koeficienty jsou nezáporné. Jedná se tedy o součet konvexního obalu  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$  bodů a konvexního kužele  $\text{cone}\{v_1, \dots, v_l\}$  vektorů. Druhá množina je pak zároveň průnikem s  $\{t = 0\}$  a lze ji tedy považovat za “zaměření” polyedru.

*Poznámka.* Podmnožina

$$\text{conv } X = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0\}$$

je nejmenší konvexní podmnožina obsahující  $X$ , tj. nejmenší podmnožina uzavřená na konvexní kombinace (nezáporné se součtem koeficientů 1). Platí totiž, že konvexní kombinace konvexních kombinací je opět konvexní. Navíc lze každou takovou dostat iterováním konvexní kombinace pro dva prvky, kde  $\lambda x + \mu y = x + \mu(y - x)$  jsou přesně body úsečky  $xy$ , protože  $\mu \in [0, 1]$ , takže podmnožina je konvexní, právě když s každými dvěma body obsahuje i příslušnou úsečku.

Uvažujme nyní kladný polyedrální kužel  $C: Ax \geq bt$ . Průnikem s  $\{t = 1\}$  tak dostaneme polyedr  $P: Ax \geq b$ . Naopak, každá neprázdná množina tohoto tvaru dostaneme jako  $C_1$  pro kladný kužel  $C: Ax \geq bt, t \geq 0$ . Díky jednoznačnosti platí  $P^{\infty} = C$  a tedy nerovnice, které  $P$  splňuje jsou právě nezáporné lineární kombinace  $Ax \geq bt, 0 \geq -t$ , což můžeme díky  $t = 1$  přepsat jako nezáporné lineární kombinace

$$Ax \geq b, 0x \geq -1,$$

tedy lineární nerovnice, které  $P$  splňuje jsou právě nezáporné kombinace generujících nerovnic a triviální nerovnice  $0 \geq -1$ .

**Tvrzení 2.7** (Farkasovo lemma pro polyedry). *Polyedr  $P: Ax \geq b$  je prázdný, tj. soustava  $Ax \geq b$  nemá řešení, právě když nezápornou lineární kombinací nerovnic z  $Ax \geq b$  lze vyrobiť  $0 \geq 1$ .*

*Důkaz.* Soustava nemá řešení, právě když kužel  $C: Ax \geq bt$  má prázdný průnik s  $\{t = 1\}$ , tj. právě když leží v  $0 \geq t$ . To je ale právě když je  $0 \geq t$  nezápornou lineární kombinací nerovnic z  $Ax \geq bt$ . Tvrzení se dostane dosazením  $t = 1$ .  $\square$

### 2.3. Afinní obal polyedru

**Lemma 2.8.** *Nechť  $P: Ax \geq b$  je neprázdný polyedr. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1.  $P$  nespĺňuje žádnou netriviální rovnici.
2.  $P$  nespĺňuje žádnou netriviální nerovnici z  $Ax \geq b$  jako rovnici.
3. Existuje bod  $P$  splňující všechny netriviální nerovnice v  $Ax \geq b$  ostře.

Zjevně první podmínka znamená, že  $P$  neleží v žádném vlastním afinním podprostoru, tedy že afinní obal  $P$  je celý prostor  $U$ . V takovém případě řekneme, že dimenze  $P$  je rovna dimenzi  $U$ . Body z podmínky 3 nazveme *vnitřní* body polyedru  $P$ , takže budeme říkat, že  $P$  je polyedr s neprázdným vnitřkem.

Obecně lze uvažovat  $P$  uvnitř svého afinního obalu, kde podmínky již splněny budou (některé nerovnice se po zúžení na afinní obal stanou triviálními) a dimenze  $P$  je pak rovna dimenzi tohoto afinního obalu. Vnitřní body  $P$  chápaného jako podmnožinu svém afinním obalu nazveme *relativně vnitřní*.

Snadno se ukáže, že každý bod je relativně vnitřním bodem právě jedné stěny (a každá neprázdná stěna má nějaký relativně vnitřní bod), totiž stěny určené všemi nerovnicemi z  $Ax \geq b$ , které jsou v daném bodě splněné jako rovnice. Ostatní jsou splněny ostře, takže podle lematu je bod relativně vnitřním bodem této stěny. Je tedy každý polyedr disjunktivním sjednocením relativních vnitřků stěn.

*Důkaz.* Budeme předpokládat, že všechny nerovnice v  $Ax \geq b$  jsou netriviální.

Implikace  $1 \Rightarrow 2$  je zřejmá.

Pro implikaci  $2 \Rightarrow 3$  předpokládáme, že každá nerovnice  $a_i x \geq \beta_i$  systému  $Ax \geq b$  je v nějakém bodě  $x_i \in P$  splněna ostře. Potom barycentrum  $\frac{1}{k}x_1 + \dots + \frac{1}{k}x_k$  bude všechny nerovnice splňovat ostře.

Zbývá  $3 \Rightarrow 1$ . Budeme ekvivalentně dokazovat, že žádná netriviální nerovnice není na  $P$  splněna jako rovnice. Uvažme tedy nerovnici  $cx \geq \delta$ , která je splněna na  $P$  a musí tedy být nezápornou lineární kombinací nerovnic z  $Ax \geq b$ ,  $0x \geq -1$ . Pokud je navíc netriviální, musí být nějaký koeficient nenulový. Každý bod splňující jednotlivé nerovnice ostře, jehož existence je zaručena podle 3, bude splňovat ostře i nerovnici  $cx \geq \delta$  a tato nerovnice tedy nemůže být na  $P$  splněna jako rovnice.  $\square$

## 2.4. Stěny polyedrů

Nechť  $cx \geq \delta$  je lineární nerovnice, kterou polyedr  $P$  splňuje. Potom průnik  $P$  s podprostorem  $cx = \delta$  nazveme *stěnou* polyedru  $P$ . Dva speciální případy nerovnic, které  $P$  splňuje jsou  $0x \geq -1$ ,  $0x \geq 0$ , které odpovídají stěnám  $\emptyset$ ,  $P$ .

Nechť nyní  $P: Ax \geq b$ . Již víme, že  $cx \geq \delta$  platí na  $P$ , právě když je nezápornou lineární kombinací nerovnic ze systému  $Ax \geq b$  a  $0x \geq -1$ . Jestliže má být průnik polyedru  $P$  s podprostorem  $cx = \delta$  neprázdný, jistě nebude poslední nerovnice v kombinaci vystupovat. Navíc pokud  $cx \geq \delta$  je kombinací, ve které vystupují s nenulovými koeficienty právě řádky  $a_i x \geq \beta_i$ , řekněme s koeficienty  $\lambda_i > 0$ , pak pro libovolné  $x \in P$  platí

$$cx = \delta \quad \Leftrightarrow \quad \forall i: a_i x = \beta_i$$

(jinak by musela platit pro nějaké  $i$  nerovnost  $a_i x > \beta_i$  a protože je nerovnice brána s kladným koeficientem, bylo by i  $cx > \delta$ ). Je tedy obecná stěna dána tím, že některé z nerovnic systému  $Ax \geq b$  nahradíme rovnicemi.

**Lemma 2.9.** *Nechť  $P: Ax \geq b$  je polyedr s neprázdným vnitřkem. Předpokládejme, že žádná nerovnice systému  $Ax \geq b$  není nadbytečná (tj. důsledkem zbylých nerovnic). Potom přiřazení*

$$\{\text{nerovnice systému } Ax \geq b\} \rightarrow \{\text{stěny } P \text{ kodimenze } 1\},$$

*posílající nerovnici  $ax \geq \beta$  na stěnu  $P \cap \{ax = \beta\}$ , je bijekce.*

*Důkaz.* Prvně ukážeme, že je zobrazení dobře definované, tedy že pro každou nerovnici  $ax \geq \beta$  systému je příslušná stěna kodimenze 1, tedy že má uvnitř nadroviny  $\{ax = \beta\}$  neprázdný vnitřek. Označme podsoustavu vzniklou odstraněním nerovnice jako  $A'x \geq b'$ . Protože má  $P$  neprázdný vnitřek, existuje  $z$  splňující  $A'z > b'$ ,  $az > \beta$ . Protože není naše nerovnice nadbytečná, musí existovat bod  $y$  splňující  $A'y \geq b'$ ,  $ay < \beta$ . Vhodnou kombinací  $y$ ,  $z$  s kladnými koeficienty dostaneme bod  $x$  splňující  $A'x > b'$ ,  $ax = \beta$ , jedná se tedy o vnitřní bod stěny  $P \cap \{ax = \beta\}$ .

## 2. Polyedry a lineární programování

---

Každá stěna je dána nahrazením některých nerovnic systému příslušnými rovnicemi. Pokud by byly alespoň dvě, příslušný afinní prostor by měl kodimenzi alespoň dvě a stěna by nemohla mít kodimenzi 1. Je tedy zobrazení surjektivní.

Každá stěna kodimenze 1 má jako afinní obal afinní nadrovinu a protože má  $P$  neprázdný vnitřek, leží  $P$  právě v jednom poloprostoru určeném touto nadrovinou. Je tedy nerovnice zadávající stěnu určena jednoznačně až na kladný násobek. Díky nenadbytečnosti je v systému maximálně jedna taková nerovnice. Je tedy zobrazení injektivní.  $\square$

Z důkazu je navíc zřejmé, že nenadbytečné nerovnice jsou jednoznačné až na kladný násobek (formulace analogického výsledku pro polyedry s prázdným vnitřkem je výrazně složitější).

**Důsledek 2.10.** *Minimální (tj. minimální neprázdné) stěny jsou afinní podprostory. Je-li polyedr  $P: Ax \geq b$ , jsou minimální stěny tvaru  $\{A'x = b'\}$ , kde  $A'x \geq b'$  je podsystém  $Ax \geq b$ .*

*Důkaz.* Každá stěna je dána nahrazením některých nerovnic systému příslušnými rovnicemi. Označme podprostor určený těmito rovnicemi  $U' \subseteq U$ . Pokud je stěna minimální, musí být zbylé nerovnice triviální na  $U'$ , jinak by existovala nějaká nenadbytečná a ta by určovala nějakou stěnu. Jestliže jsou však ostatní nerovnice nadbytečné, je celé  $U'$  stěnou. Navíc vidíme, že je  $U'$  prostor řešení systému rovnic určeného podsystémem  $Ax \geq b$ . Poznamenejme, že z toho, že další nerovnice musí být na  $U'$  triviální, snadno plyne, že každá minimální stěna má zaměření  $\{Ax = 0\}$ , zejména je tedy stejné pro všechny minimální stěny.  $\square$

Polyedr, jehož minimální stěny jsou body se nazývá *bodovaný* a jeho minimální stěny se nazývají *vrcholy*. Samozřejmě každý neprázdný polyedr obsahuje nějakou minimální stěnu, zejména každý neprázdný bodovaný polyedr obsahuje vrchol. Vrcholy jsou dány jako řešení (některých) systémů  $n$  nezávislých rovnic  $A'x = b'$  jako v důsledku.

**Příklad.** Každý polyedr  $\{Ax = b, x \geq 0\}$  je bodovaný, protože neobsahuje přímku. Vrcholy jsou  $\{Ax = b, z = 0\}$ , kde  $z$  jsou některé souřadnice  $x$ ; ne každá volba určuje vrchol. Pokud má systém  $Ax = b$  nezávislé řádky, můžeme souřadnice brát tak, že systém  $Ax = b, z = 0$  má  $n$  řádků a hodnot  $n$ . Jsou tedy vrcholy popsány (obecně nejednoznačně) některými  $(n - k)$ -prvkovými podmnožinami  $M \subseteq \{1, \dots, n\}$ , kde  $k$  je hodnota matice  $A$ . To nám výrazně zjednoduší počítání s vrcholy.

*Poznámka.* *Polytop* je polyedr tvaru  $P = \text{conv } X$  pro  $X$  konečnou množinu bodů. Platí, že prvky  $X$ , které nejsou nadbytečné, jsou právě vrcholy  $P$ : Díky nenadbytečnosti  $y \notin \text{conv}(X \setminus \{y\})$ . Existuje tedy nějaká nerovnice  $cx \geq \delta$ , která je splněna na  $\text{conv}(X \setminus \{y\})$ , ale nikoliv na  $y$ , tj.  $cy < \delta$ . Potom  $cx \geq cy$  je nerovnice, kterou splňuje  $P$ , a přitom příslušná stěna  $P \cap \{cx = cy\}$  je tvořena právě bodem  $y$ , takže se jedná o vrchol. Naopak pokud by vrchol  $y$ , zadaný nerovnicí  $cx \geq \delta$ , byl kombinací zbylých vrcholů polyedru, musely by tyto také ležet na opěrné nadrovině  $cx = \delta$ , takže by příslušná stěna obsahovala víc bodů a nejednalo by se o vrchol.

Nenadbytečné generující body tedy odpovídají vrcholům, nenadbytečné generující nerovnice odpovídají stěnám – pěkný příklad duality.

## 2.5. Úloha lineárního programování

Jde o úlohu minimalizovat (nebo maximalizovat) lineární funkci  $cx$  na polyedru  $P: Ax \geq b$ . Úlohu budeme zapisovat

$$\min\{cx \mid Ax \geq b\}.$$

Stejný zápis samozřejmě značí minimální hodnotu této funkce, nám však půjde o to najít bod  $x \in P$ , v němž minimum nastává. Poznamenejme, že z vyjádření  $P = \text{conv } X + \text{cone } V$  a z linearity funkce  $cx$  vyplývá, že obraz  $cP \subseteq \mathbb{R}$  je opět polyedr, tedy uzavřený interval. Máme tři možnosti – buď je obraz prázdný, to nastane právě když je  $P$  prázdný, nebo je zdola neomezený nebo má minimum  $\delta$ . V posledním případě je množina všech bodů ve kterých nastává minimum  $\{cx = \delta\} \cap P$  a jedná se tedy o (neprázdnou) stěnu polyedru, neboť  $cx \geq \delta$  na  $P$ . Pokud je polyedr  $P$  bodovaný, nastává minimum nutně v nějakém vrcholu. Toho využívá metoda pro nalezení optima, tzv. simplexová metoda.

Uvedeme dva speciální případy, které jsou ekvivalentní úloze v obecném tvaru, ale zároveň jsou velmi důležité – jednak kvůli dualitě a jednak kvůli simplexové metodě.

Následující typy úloh jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} \min\{cx \mid Ax \geq b\} \\ \min\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \\ \min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\} \end{aligned}$$

Tím je myšleno, že pro každou úlohu prvního typu umíme sestavit úlohu druhého typu, z jejíhož řešení umíme vyrobit řešení v původní úloze, atd. Ukažeme nyní tedy redukce prvního typu na druhý a druhého na třetí. V opačných směrech není potřeba úlohu měnit, protože se jedná o postupně speciálnější tvary. Pro úlohu  $\min\{cx \mid Ax \geq b\}$  nahradíme neznámý vektor  $x$  rozdílem dvou nezáporných vektorů,  $x = x_+ - x_-$ , kde tedy  $x_+, x_- \geq 0$ . Dostaneme tak úlohu

$$\min\{cx \mid Ax \geq b\} \simeq \min\{cx_+ - cx_- \mid Ax_+ - Ax_- \geq b, x_+, x_- \geq 0\}$$

druhého typu, řešení původní úlohy se dostane jako  $x = x_+ - x_-$ . Pro úlohu  $\min\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$  zavedeme substituci  $s = Ax - b \geq 0$ , čímž nerovnici  $Ax \geq b$  nahradíme rovnicí  $Ax - s = b$ , kde tedy  $s \geq 0$  (tzv. přebytek). Dostaneme tak úlohu

$$\min\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \simeq \min\{cx \mid Ax - s = b, x, s \geq 0\}$$

třetího typu, řešení původní úlohy se dostane zapomenutím  $s$ .

## 2.6. Dualita v lineárním programování

Nejjednodušší je:  $\min\{cx \mid Ax \geq b\}$  lze popsat jako největší dolní závora, přičemž  $\delta$  je dolní závora, pokud  $Ax \geq b \Rightarrow cx \geq \delta$ , takže podle Farkasova lemmatu to nastane, právě když je  $cx \geq \delta$  nezápornou lineární kombinací  $Ax \geq b$  (také bychom mohli použít  $0x \geq -1$ , tím bychom ale dostali menší dolní závora, takže ignorování této nerovnice maximum nezmění).

$$\begin{aligned} \min\{cx \mid Ax \geq b\} &= \max\{\delta \mid \exists y \geq 0: c = yA, \delta = yb\} \\ &= \max\{yb \mid c = yA, y \geq 0\} \end{aligned}$$

Duálně samozřejmě

$$\min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\} = \max\{yb \mid c \geq yA\}.$$

Uveďme ještě symetričtější verzi pro prostřední typ úlohy lineárního programování:

$$\begin{aligned} \min\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\} &= \max\{\delta \mid \exists y \geq 0 \exists z \geq 0: c = yA + zE, \delta = yb + z0\} \\ &= \max\{yb \mid \exists z \geq 0: c = yA + z, y \geq 0\} \\ &= \max\{yb \mid c \geq yA, y \geq 0\} \end{aligned}$$

(přitom lze elementárně vidět, že každé  $yb$  je menší nebo rovno každému  $cx$ , takže stejná nerovnost bude platit i pro maximum a minimum:  $yb \leq y(Ax) = (yA)x \leq cx$ ).

## 2.7. Simplexová metoda

Prvně uveďme metody, které sice fungují, ale nejsou příliš efektivní. Zaprvé lze Motzkinovou eliminací popsat obraz  $P$  při zobrazení  $cx$ , tj. popsat množinu

$$\{\delta \mid \exists x: cx = \delta, Ax = b, x \geq 0\}.$$

Bude se jednat o interval a jeho minimum je právě minimum úlohy. K němu pak lze opět Motzkinovou eliminací nalézt nějaké řešení. Druhou metodou je prvně sestavit seznam všech vrcholů a poté porovnat funkční hodnoty v nich. K tomu lze použít popis vrcholů jakožto řešení soustav  $Ax = b, z = 0$ , kde  $z$  je nějaká podmnožina proměnných  $x$ , viz níže.

Budeme předpokládat úlohu ve tvaru  $\min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$ , kde o soustavě rovnic  $Ax = b$  budeme navíc předpokládat, že jsou z ní odstraněny nadbytečné rovnice, takže její hodnot je rovna počtu řádků  $k$ . Položme  $n = k + l$ , tedy  $l$  je dimenze podprostoru  $\{Ax = b\}$ . Vrcholy polyedru  $P: Ax = b, x \geq 0$  budeme popisovat množinou indexů, pro které  $x_i = 0$ . Pišme souhrnně tyto proměnné jako  $z$  a zbylé proměnné jako  $y$ . Protože předpokládáme, že podprostor  $\{Ax = b, z = 0\}$  má dimenzi 0 (jedná se o vrchol) a soustava  $Ax = b$  má lineárně nezávislé řádky, můžeme případným zredukováním proměnných  $z$  dosáhnout toho, že je těchto právě  $l$  a tedy proměnných  $y$  je právě  $k$ . Soustavu  $Ax = b$  pak lze upravit do ekvivalentního tvaru  $y + \bar{A}z = \bar{b}$ , tj. rozřešit ji vzhledem k proměnným  $y$ , konkrétně  $y = \bar{b} - \bar{A}z$ . V takovém případě je vrcholem právě  $(y, z) = (\bar{b}, 0)$ . Pak lze ale také lineární funkci  $cx$  na podprostoru  $Ax = b$  napsat pouze v proměnných  $z$  (dosazením  $y = \bar{b} - \bar{A}z$ ).

**Lemma 2.11.** *Pokud má vyjádření  $cx$  pomocí  $z$  všechny koeficienty nezáporné, je vrchol  $(\bar{b}, 0)$  bodem, ve kterém nastává minimum.*

Předpokládejme tedy dále, že koeficient u  $z_q$  je záporný, označme zbylé proměnné  $z'$ , pak pro  $z_q > 0, z' = 0$  dostaneme bod s menší funkční hodnotou. Uvažme tedy přímku  $\{Ax = b, z' = 0\}$ . Ta protíná polyedr  $P$  v hraně, jejímž jedním vrcholem je bod  $(\bar{b}, 0)$ . Každá nerovnice  $y_i \geq 0$  zadává omezující podmínku na  $z_q$ :

$$y + a_q z_q + \bar{A}' z' = \bar{b}$$

vzhledem k  $z' = 0$  dává  $y_i + \alpha_{iq} z_q = \bar{\beta}_i$ , tedy

$$\alpha_{iq} z_q \leq \bar{\beta}_i.$$

Pokud  $\alpha_{iq} \leq 0$ , nedává tato rovnice na  $z_q$  žádné omezení shora, budeme tedy v dalším uvažovat pouze ty rovnice s  $\alpha_{iq} > 0$ , kdy tato rovnice je ekvivalentní  $z_q \leq \bar{\beta}_i / \alpha_{iq}$ .

**Lemma 2.12.** *Pokud jsou všechna  $\alpha_{iq} \leq 0$ , je hrana neomezená a funkce  $cx$  podél ní klesá, takže nenabývá minima.*

Předpokládáme tedy, že nějaké  $\alpha_{iq} > 0$  a mezi nimi vyberme index  $p$ , pro který je poměr  $\bar{\beta}_p/\alpha_{pq}$  minimální. Pak druhým vrcholem hrany je  $z_q = \bar{\beta}_p/\alpha_{pq}$  a tedy  $y_p = 0$ . Dostaneme tedy nový vrchol tak, že v proměnných  $y$  nahradíme  $y_p$  za  $z_q$ . Obě volby indexů  $p, q$  jsou nejednoznačné.

Pokud bude v každém kroku  $\bar{\beta}_p > 0$ , hodnota se vždy zmenší a vzhledem ke konečnému počtu vrcholů se algoritmus zastaví. Toto nastane pro nedegenerované polyedry, tj. polyedry, ve kterých se v každém vrcholu potkává právě  $l$  stěn, tj. v každém vrcholu je nulových právě  $l$  souřadnic. Tato situace je obecná ve smyslu, že libovolně malou změnou pravé strany  $b$  lze dosáhnout nedegenerovanosti.

V případě degenerovaného polyedru je třeba opatrnosti při výběru proměnných, jinak může dojít k zacyklení – v každém kroku měníme proměnné popisující vrchol, ale vlastní vrchol se nemění, přičemž po nějaké době opět dospějeme k téže množině proměnných. K zacyklení nedojde při použití tzv. Blandova pravidla, které říká, že máme volit  $q$  nejmenší možné a v rámci této volby také  $p$  nejmenší možné. Důkaz nezacyklení zde uvádět nebudeme.

## 2.8. Nalezení vrcholu

Na započítí výpočtu je potřeba nalézt vrchol polyedru  $P: Ax = b, x \geq 0$ . To se nám podaří následující metodou. Případným vynásobením některých rovnic systému koeficientem  $-1$  můžeme předpokládat  $b \geq 0$ . Přidejme umělé proměnné  $t \geq 0$  a uvažme pomocnou úlohu

$$\min\{1t \mid Ax + t = b, x \geq 0, t \geq 0\},$$

ve které  $1t = t_1 + \dots + t_k$  je součet pomocných proměnných (tj. 1 reprezentuje řádek složený ze samých jedniček). Zjevně minimum takové úlohy bude existovat, protože je hodnota funkce zdola omezena nulou a pomocný polyedr obsahuje vrchol  $(x, t) = (0, b)$  zadaný rovnicemi  $x = 0$ . Protože pro pomocnou úlohu máme počáteční vrchol, můžeme na ni aplikovat simplexovou metodu. V případě, že nalezneme minimum větší než nula, dostaneme  $P = \emptyset$ , v případě, že minimum bude nula, dostaneme bod polyedru  $P$ . Případnými dodatečnými kroky můžeme dosáhnout toho, že příslušný pomocný vrchol bude zadán rovnicemi  $z = 0, t = 0$ , kde  $z$  je tvořen některými z proměnných  $x$  jako předtím, takže se jedná také o vrchol polyedru  $P$ .

### 3. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru

#### 3.1. Definice nadkvadriky v reálném afinním prostoru

Uvažujme reálný afinní prostor  $\mathcal{S}$  s bází  $(O, e_1, \dots, e_n)$ , pro jednoduchost můžeme předpokládat  $\mathcal{S} = \mathcal{A}_n$  se standardní bází. *Nadkvadrikou* v  $\mathcal{A}_n$  rozumíme množinu  $Q \subseteq \mathcal{A}_n$  všech bodů, jejichž souřadnice v dané bází splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n a_{i0}x_i + a_{00} = 0,$$

kde  $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$  a aspoň jedno  $a_{ij} \neq 0$  pro  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Nadkvadriky v  $\mathcal{A}_2$  se nazývají *kuželosečky*, nadkvadriky v  $\mathcal{A}_3$  *kvadriky*.

Mnohé rovnice výše uvedeného typu (např.  $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ ) nemají v reálném oboru řešení. Proto je výhodné místo s nadkvadrikami v  $\mathcal{A}_n$  pracovat s nadkvadrikami v komplexním rozšíření  $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$ .

*Poznámka.* Za chvíli uvidíme, že tato definice nezávisí na souřadnicích a ve skutečnosti lze provést ve vektorovém obalu afinního prostoru pomocí symetrické bilineární formy.

#### 3.2. Definice nadkvadriky v komplexním rozšíření afinního prostoru

Uvažujme komplexní rozšíření  $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  reálného afinního prostoru. Necht'  $(O, e_1, \dots, e_n)$  je nějaká báze  $\mathcal{A}_n$ . *Nadkvadrikou* v  $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  rozumíme množinu  $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  všech bodů, jejichž souřadnice v dané bází splňují rovnici

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n a_{i0}x_i + a_{00} = 0,$$

kde  $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$  a aspoň jedno  $a_{ij} \neq 0$  pro  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Pro nadkvadriky v afinním prostoru chceme definovat takové pojmy jako střed, tečná nadrovina, asymptotická nadrovina, a to nejlépe v řeči koeficientů  $a_{ij}$ , aby nalezení těchto objektů bylo početně co nejjednodušší. To se nám podaří celkem snadno, když od afinního prostoru přejdeme k jeho projektivnímu rozšíření a od kvadriky  $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$  k jejímu rozšíření  $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ .

Popišme nyní nadkvadriku  $Q$  v homogenních souřadnicích  $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ . Necht' tedy  $X = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ . Potom tento bod leží na  $Q$ , právě když  $X$  je vlastní, tj.  $x_0 \neq 0$  a pak  $X = (1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0})$ , a navíc platí

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{x_0} \frac{x_j}{x_0} + 2 \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{x_i}{x_0} + a_{00} = 0.$$

Po vynásobení  $x_0 \neq 0$  dostáváme ekvivalentní rovnici

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n a_{i0}x_i x_0 + a_{00}x_0^2 = 0.$$

Množinu všech bodů  $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ , jejichž homogenní souřadnice splňují výše uvedenou rovnici, nazveme *projektivním rozšířením* nadkvadriky  $Q$  a budeme ji označovat  $\overline{Q}$ . Množina  $\overline{Q}$  může obsahovat i nevlastní body z  $\nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$  o souřadnicích  $(0 : x_1 : \dots : x_n)$ .



Položíme-li  $a_{0i} = a_{i0}$  a  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^n$ , je  $A$  nenulová symetrická matice typu  $(n+1) \times (n+1)$ . Výše uvedenou rovnici můžeme psát ve tvaru

$$\sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j = x^T A x = 0.$$

Symetrická matice  $A$  definuje reálnou bilineární formu  $f$  na aritmetickém základu projektivního prostoru  $\overline{\mathcal{A}}_n$  předpisem

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i y_j = x^T A y.$$

Blok matice  $A$  příslušný kladným indexům  $i > 0, j > 0$  budeme označovat  $\tilde{A}$ , odpovídá kvadratické části původní rovnice.

### 3.3. Definice nadkvadriky v projektivním prostoru

Nechť  $\mathcal{P}(V)$  je reálný projektivní prostor dimenze  $n$ . Nechť  $f$  je nenulová reálná symetrická bilineární forma na  $V$ . Nadkvadrika  $Q$  v projektivním prostoru  $\mathcal{P}(V^{\mathbb{C}})$  je množina bodů  $[v] \in \mathcal{P}(V^{\mathbb{C}})$ , pro které

$$f(v, v) = 0.$$

V souřadnicovém vyjádření v nějaké bázi  $V$  jde o řešení rovnice

$$x^T A x = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j = 0,$$

kde  $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$  a  $a_{ij} \neq 0$  pro nějaké  $i, j$ . Důležitým aspektem je homogenost této rovnice, díky níž platnost této rovnice nezávisí na volbě reprezentanta.

*Poznámka.* Nechť  $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  je afinní nadkvadrika. Pak množina  $\overline{Q}$  je nejmenší projektivní nadkvadrika, která obsahuje  $Q$ . Toto tvrzení není zcela triviální a přenecháváme jej čtenáři k věření.

**Lemma 3.1.** *Nadkvadrika  $Q$  v  $\overline{\mathcal{A}}_n^{\mathbb{C}}$  je rozšířením nějaké kvadriky v  $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  právě tehdy, když existuje nějaký nevlastní bod  $X \in \nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$ , který v  $Q$  neleží.*

*Důkaz.* Nechť je projektivní nadkvadrika  $Q \subseteq \overline{\mathcal{A}}_n^{\mathbb{C}}$  zadána symetrickou bilineární formou  $f$  s maticí  $A$ . Potom  $Q$  není rozšířením afinní nadkvadriky, právě když je blok  $\tilde{A}$  nulový, tj. právě když je zúžení  $f$  na nevlastní podprostor nulové. To je ale právě tehdy, když je rovnice  $f(x, x) = 0$  splněna pro všechny nevlastní body  $X = [x] \in \nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$ .  $\square$

### 3.4. Vztah mezi nadkvadrikami a symetrickými bilineárními formami

Nechť  $\mathcal{K}_n$  je množina všech nadkvadrik v  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ , nechť  $\mathcal{B}_n$  je množina všech symetrických bilineárních forem na aritmetickém základu  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Protože se jedná o vektorový prostor, můžeme uvažovat příslušný projektivní prostor  $\mathcal{P}(\mathcal{B}_n) = (\mathcal{B}_n \setminus \{0\})/\sim$ .

Zobrazení  $\varphi: \mathcal{B}_n \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{K}_n$ , definované předpisem  $\varphi(f) = \{[x] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}} \mid f(x, x) = 0\}$ , indukuje zobrazení  $\tilde{\varphi}: \mathcal{P}(\mathcal{B}_n) \rightarrow \mathcal{K}_n$ .

### 3. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru

**Věta 3.2.** Zobrazení  $\tilde{\varphi}: \mathcal{P}(\mathcal{B}_n) \rightarrow \mathcal{K}_n$  je bijekce.

*Důkaz.* Z definice existuje ke každé nadkvadrice příslušná bilineární symetrická forma, tedy  $\tilde{\varphi}$  je surjektivní zobrazení. Chceme dokázat, že je také injektivní, to znamená, že zadávají-li dvě bilineární symetrické formy  $f$  a  $g$  tutéž kvadriku, pak  $g = k \cdot f$  pro nějaké  $k \in \mathbb{R}$ .

Vezměme  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$  takové, že  $f(u, u) \neq 0$ . Protože  $f$  a  $g$  zadávají tutéž kvadriku, je také  $g(u, u) \neq 0$ . Můžeme proto psát  $g(u, u) = kf(u, u)$  pro nějaké  $0 \neq k \in \mathbb{R}$ . Vezměme nyní libovolné  $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Potom výrazy

$$\begin{aligned} f(tu + v, tu + v) &= t^2 f(u, u) + 2tf(u, v) + f(v, v) \\ g(tu + v, tu + v) &= t^2 g(u, u) + 2tg(u, v) + g(v, v), \end{aligned}$$

chápané jako polynomy druhého stupně v proměnné  $t$ , mají podle předpokladů stejné kořeny  $t_1, t_2$ . Z algebry víme, že koeficienty polynomů stejného stupně (v našem případě 2) a se stejnými kořeny musí být úměrné, proto ze vztahu  $g(u, u) = kf(u, u)$  plyne  $g(v, v) = kf(v, v)$ . Protože vektor  $v$  byl volen libovolně, platí  $g = k \cdot f$ .  $\square$

*Poznámka.* Podobné tvrzení platí také pro afinní nadkvadriky, konkrétně dvě kvadratické rovnice  $q(x) = 0$ ,  $r(x) = 0$  zadávají stejnou nadkvadriku, tj. mají stejnou množinu řešení, právě když  $r = k \cdot q$  pro nějaké  $k \in \mathbb{R}^\times$ . Důkaz se provede stejně jako v projektivním případě, jen je potřeba zvolit  $u$  nevlastní; pak se stejně ukáže, že  $g(x, x) = kf(x, x)$  pro  $x = (1, x_1, \dots, x_n)$  vlastní. To je ale přesně rovnice  $r(x) = kq(x)$ .

#### 3.5. Klasifikace nadkvadrik v projektivním prostoru

**Věta 3.3.** Nechť  $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  je nadkvadrika. Potom v  $\mathbb{R}^{n+1}$  existuje báze, v níž je nadkvadrika popsána právě jednou z rovnic

(a) pro  $n = 1$

$$\begin{array}{ll} x_0^2 + x_1^2 = 0 & \text{dva imaginární body} \\ x_0^2 - x_1^2 = 0 & \text{dva reálné body} \\ x_0^2 = 0 & \text{dvojný bod} \end{array}$$

(b) pro  $n = 2$

$$\begin{array}{ll} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 & \text{imaginární regulární kuželosečka} \\ x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 & \text{reálná regulární kuželosečka} \\ x_0^2 + x_1^2 = 0 & \text{dvojice imaginárních přímek} \\ x_0^2 - x_1^2 = 0 & \text{dvojice reálných přímek} \\ x_0^2 = 0 & \text{dvojnásobná přímka} \end{array}$$

(c) pro  $n = 3$

$$\begin{array}{ll} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 & \text{imaginární regulární kvadrika} \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 & \text{nepřímková regulární kvadrika} \\ x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 & \text{přímková regulární kvadrika} \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 & \text{imaginární kuželová plocha} \\ x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 & \text{reálná kuželová plocha} \\ x_0^2 + x_1^2 = 0 & \text{imaginární dvojice rovin} \\ x_0^2 - x_1^2 = 0 & \text{reálná dvojice rovin} \end{array}$$

$$x_0^2 = 0 \qquad \text{dvojnásobná rovina}$$

*Důkaz.* Každá nadkvadrika je určena nějakou reálnou symetrickou bilineární formou  $f$  na aritmetickém základu  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pro tuto formu lze nalézt vhodnou bázi  $\mathbb{R}^{n+1}$ , v níž má  $f$  diagonální tvar s koeficienty  $\pm 1$  nebo  $0$  na diagonále. Případným vynásobením číslem  $-1$  dostaneme rovnici tvaru

$$x_0^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0,$$

kde  $p, q \geq 0$ ,  $p+1 \geq q$  a  $p+q \leq n$ . □

### \* 3.6. Afinní klasifikace nadkvadrik

Podobně lze provést klasifikaci nadkvadrik v afinním prostoru. Stačí při diagonalizaci brát zvláštní zřetel na použité řádkové/sloupkové operace. Víme totiž, že kolineace je afinním zobrazením, právě když zachovává rozklad na vlastní a nevlastní body. Znamená to tedy, že při změnách báze  $(O, e_1, \dots, e_n)$  stačí dbát na to, aby nultý prvek byl vždy bod a zbylé prvky vždy vektory. Jednoduše tak lze aplikovat diagonalizaci na posledních  $n$  prvků báze a dostat matici  $A$  do tvaru

$$\left( \begin{array}{c|ccc} a_{00} & b^T & c^T & d^T \\ \hline b & E_p & 0 & 0 \\ c & 0 & -E_q & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nyní nastávají dvě možnosti: Pokud  $d = 0$ , lze použít matice  $E_p$  a  $-E_q$  k eliminaci  $b$  a  $c$  (výsledek přičítání násobku vektoru k bodu je opět bod) a případným vydělením prvního řádku a sloupce  $\sqrt{|a_{00}|}$  lze opět dosáhnout toho, že  $a_{00}$  je jedno z  $\varepsilon \in \{0, 1, -1\}$ ; dostaneme tedy tvar

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \varepsilon + x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0.$$

V takovémto případě mluvíme o *středové* nadkvadrice; o středu pojednáme podrobněji v následující kapitole.

Druhou možností je  $d \neq 0$ , přičemž lze jednoduše dosáhnout toho, že  $a_{0(p+q+1)} = 1$ . Pak můžeme  $a_{0(p+q+1)}$  použít k eliminaci  $a_{00}$ ,  $b$ ,  $c$  a zbylých prvků  $d$ , čímž dostaneme tvar

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & E_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_q & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad 2x_{p+q+1} + x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0.$$

Takovéto nadkvadriky nazýváme *nestředové*. Dokázali jsme tak následující větu.

**Věta 3.4.** *Nechť  $Q \subseteq \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  je nadkvadrika. Potom v  $\mathcal{A}_n$  existuje báze, v níž je nadkvadrika popsána právě jednou z rovnic*

(a) pro  $n = 1$

$$x_1^2 + 1 = 0 \qquad \text{dva imaginární body}$$

### 3. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru

	$x_1^2 - 1 = 0$	<i>dva reálné body</i>
	$x_1^2 = 0$	<i>dvojný bod</i>
(b) pro $n = 2$		
	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	<i>imaginární elipsa</i>
	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	<i>reálná elipsa</i>
	$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	<i>hyperbola</i>
	$x_1^2 + 2x_2 = 0$	<i>parabola</i>
	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	<i>dvě imaginární různoběžky</i>
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	<i>dvě reálné různoběžky</i>
	$x_1^2 + 1 = 0$	<i>dvě imaginární rovnoběžky</i>
	$x_1^2 - 1 = 0$	<i>dvě reálné rovnoběžky</i>
	$x_1^2 = 0$	<i>dvojnásobná přímka</i>
(c) pro $n = 3$		
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	<i>imaginární elipsoid</i>
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$	<i>reálný elipsoid</i>
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	<i>dvoudílný (nepřímkový) hyperboloid</i>
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	<i>jednodílný (přímkový) hyperboloid</i>
	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$	<i>eliptický paraboloid</i>
	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$	<i>hyperbolický paraboloid</i>
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	<i>imaginární kuželová plocha</i>
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	<i>reálná kuželová plocha</i>
	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	<i>imaginární eliptická válcová plocha</i>
	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	<i>reálná eliptická válcová plocha</i>
	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	<i>hyperbolická válcová plocha</i>
	$x_1^2 + 2x_2 = 0$	<i>parabolická válcová plocha</i>
	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	<i>dvě imaginární různoběžné roviny</i>
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	<i>dvě reálné různoběžné roviny</i>
	$x_1^2 + 1 = 0$	<i>dvě imaginární rovnoběžné roviny</i>
	$x_1^2 - 1 = 0$	<i>dvě reálné rovnoběžné roviny</i>
	$x_1^2 = 0$	<i>dvojnásobná rovina</i>

#### Kontrolní otázky

1. Vysvětlete vzájemný vztah mezi kuželosečkami v komplexním rozšíření projektivního prostoru a reálnými bilineárními formami.
2. Co znamená, že dva body projektivního prostoru jsou polárně sdružené vzhledem k dané kuželosečce? Které geometrické pojmy se definují pomocí pojmu polárně sdružených bodů?
3. Které kvadriky v projektivní klasifikaci jsou regulární a které singulární?
4. Které kuželosečky a které kvadriky jsou v afinní klasifikaci středové?
5. Které kuželosečky v afinní rovině mají asymptoty?

6. Načrtněte podobu všech kvadrik z afinní klasifikace.

### Příklady k procvičení

1. Určete polární nadrovinu k bodu  $X$  vzhledem k nadkvadrice  $Q$

(a)  $Q: 2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 + 2 = 0, \quad X = [3; 1; -1]$

(b)  $Q: 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \quad X = [2; -1; 3]$

(c)  $Q: 2x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 14x_2 - 13 = 0, \quad X = [-3; 2]$

[Řešení: (a)  $7x_1 + 4x_2 = -1$ ; (b)  $3x_2 + 4x_3 = 1$ ; (c) nevlastní přímka.]

2. Určete tečnou nadrovinu nadkvadriky  $Q$  v bodě  $X$

(a)  $Q: 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 6x_1 + 4x_2 - 3 = 0, \quad X = [0; 1]$

(b)  $Q: x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 12x_1 + 24x_2 + 15 = 0, \quad X = [0; -1]$

(c)  $Q: x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + 5x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \quad X = [1; -1; -1]$

[Řešení: (a)  $4x_1 + x_2 = 1$ ; (b)  $3x_1 - x_2 = 1$ ; (c)  $4x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 5$ .]

3. Rozhodněte, zda projektivní rozšíření následujících nadkvadrik jsou regulární nebo singulární a vypočtěte hodnotu příslušné symetrické bilineární formy. Určete dále singulární body nadkvadrik.

(a)  $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 + 20x_2 + 20 = 0$  v  $\mathcal{S}_2$

(b)  $4x_1x_2 + 3x_2^2 + 16x_1 + 12x_2 - 36 = 0$  v  $\mathcal{S}_2$

(c)  $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 1 = 0$  v  $\mathcal{S}_3$

(d)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2 = 0$  v  $\mathcal{S}_3$

[Řešení:

(a) hodnost 2, singulární bod  $[0; -2]$ ;

(b) regulární kuželosečka – hodnost 3;

(c) hodnost 1, singulární body  $[1 + t - 2s; t; s]$ ;

(d) hodnost 3, nevlastní singulární bod  $(1; 0; -1; 0)$ .

4. Určete středy nadkvadrik z příkladu (3).

[Řešení: (a)  $S = [0; -2]$ ; (b)  $S = [3; -4]$ ; (c) každý bod kvadriky je střed;

(d) přímka středů  $S = [t; 0; -t]$ .]

5. Určete typ nadkvadrik z příkladu (3).

[Řešení: (a) bod; (b) hyperbola; (c) dvojnásobná rovina; (d) imaginární eliptická válcová plocha.]

6. Určete asymptoty kuželoseček

(a)  $2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_1 + 3x_2 + 4 = 0$

### 3. Nadkvadriky v afinním a projektivním prostoru

---

$$(b) 2x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 - x_1 - 6x_2 - 15 = 0$$

$$(c) x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 14x_2 + 29 = 0$$

$$(d) 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 16x_1 + 4x_2 - 28 = 0$$

[Řešení: (a)  $a_1: 2x_1 - 3x_2 = -1$ ,  $a_2: x = 1$ ; (b)  $a_1: x_1 + x_2 = -1$ ,  $a_2: 2x_1 - 3x_2 = 3$ ; (c) nevlastní asymptota; (d)  $a_1: 24ix_1 + 6(3+i)x_2 = -24i$ ,  $a_2: 24ix_1 - 6(3-i)x_2 = -24i$ .]

## 4. Metrická klasifikace nadkvadrik

### 4.1. Pojem polárně sdružených bodů

Začneme motivací. Nadkvadrika  $Q$  v  $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  je v souřadnicích  $x \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  určena rovnicí  $x^T Ax = 0$ . Tečný vektor ke  $Q$  spočítáme derivací křivky  $x(t)$  ležící v  $Q$  v bodě  $x = x(0)$ . Derivováním v rovnici  $x(t)^T Ax(t) = 0$  dostáváme  $(x'(0))^T Ax(0) + x(0)^T Ax'(0) = 0$ .

Vzhledem k tomu, že  $A$  je symetrická matice, je tato rovnice ekvivalentní

$$(x(0))^T Ax'(0) = 0.$$

Nechť  $y \in \mathbb{C}^{n+1}$  leží v tečné nadrovině, pak

$$y = x + x'(0)$$

a platí

$$x^T Ay = x^T A(x + x'(0)) = x^T Ax + x^T Ax'(0) = 0 + 0 = 0.$$

Tedy pro  $y \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  v tečné nadrovině ke  $Q$  v bodě  $x \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  platí  $x^T Ay = 0$ .

**Definice 4.1.** Nechť  $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  je nadkvadrika definovaná pomocí bilineární symetrické formy  $f$ . Body  $[x], [y] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  jsou *polárně sdružené* vzhledem ke  $Q$ , jestliže

$$f(x, y) = 0.$$

V dalším budeme občas psát  $[x] \pitchfork [y]$ . Pro projektivní podprostor  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  označme

$$\mathcal{U}^{\pitchfork} = \{Y \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}} \mid \forall X \in \mathcal{U}: X \pitchfork Y\},$$

budeme mu říkat *polární doplněk* podprostoru  $\mathcal{U}$ .

Okamžitým důsledkem definice je následující tvrzení: bod  $X$  leží na  $Q$ , právě když je  $X$  polárně sdružený sám se sebou, tj.  $f(x, x) = 0$ .

**Lemma 4.2.** Množina  $[x]^{\pitchfork}$  polárně sdružených bodů k bodu  $[x]$  vzhledem k nadkvadrice  $Q$  je buď celé  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  nebo nadrovina v  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ .

*Důkaz.* Množina polárně sdružených bodů k  $[x]$  je  $\{[y] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}} \mid y \in \ker f(x, -)\}$ .

Protože  $f(x, -): V^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  je lineární zobrazení, je buď  $\ker f(x, -) = 0$  nebo  $\mathbb{C}$ . Dále

$$\dim \ker f(x, -) = n + 1 - \dim \operatorname{im} f(x, -),$$

což dává tvrzení lemmatu. □

**Příklad (a).** V  $\mathcal{P}_3^{\mathbb{C}}$  uvažujme kvadriku

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Polárně sdružené body k bodu  $[(1, 1, 0, \sqrt{2})]$  mají homogenní souřadnice  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  a tvoří rovinu

$$0 = f((1, 1, 0, \sqrt{2}), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = y_1 + y_2 - \sqrt{2}y_4.$$

**Příklad (b).** V  $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$  uvažujme kuželosečku

$$x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Polárně sdružené body k bodu  $[(0, 0, 1)]$  jsou všechny body  $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$ , neboť pro jejich homogenní souřadnice  $(y_1, y_2, y_3)$  platí

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 0.$$

**Definice 4.3.** Bod  $[x] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  se nazývá *regulárním bodem* vzhledem k nadkvadrice  $Q$ , jestliže množina polárně sdružených bodů k  $[x]$  je nadrovina v  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ . Tato nadrovina se nazývá *polární nadrovina* (v  $\mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$  stručně *polára*).

**Definice 4.4.** Bod  $[x] \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  se nazývá *singulárním bodem* nadkvadriky  $Q$ , jestliže množina polárně sdružených bodů k  $[x]$  je celý prostor  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ . (Speciálně platí  $[x] \in Q$ .)

**Definice 4.5.** Nadkvadrika  $Q$  v  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  se nazývá *regulární*, jsou-li všechny její body regulární. Nadkvadrika se nazývá *singulární*, obsahuje-li nějaký singulární bod.

nd **Lemma 4.6.** Nadkvadrika  $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  je regulární právě tehdy, když hodnost symetrické matice  $A$ , která ji definuje v souřadnicích, je rovna  $n + 1$ .

nd *Důkaz.* Hodnost  $A$  je rovna  $n + 1$  právě tehdy, když  $x^T A \neq 0$  pro každé  $x \neq 0$ . To je ale ekvivalentní tomu, že existuje  $y \neq 0$  takové, že  $x^T A y \neq 0$ , neboli bod  $[x]$  je regulární.  $\square$

**Lemma 4.7.** Jestliže  $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  je regulární nadkvadrika, pak součet dimenzí podprostoru  $\mathcal{U}$  a jeho polárního doplňku  $\mathcal{U}^{\perp}$  je vždy  $n - 1$  a platí  $(\mathcal{U}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{U}$ . Říkáme, že to jsou podprostory komplementární dimenze.

*Důkaz.* Pokud má aritmetický základ  $\mathcal{U}$  bázi  $(u_0, \dots, u_d)$ , pak jeho polární komplement má aritmetický základ popsáný soustavou  $d+1$  rovnic  $f(u_0, -) = \dots = f(u_d, -) = 0$ . Tyto rovnice jsou lineárně nezávislé, protože jejich kombinace  $f(x_0 u_0 + \dots + x_d u_d, -)$  je nulová pouze pro  $x_0 u_0 + \dots + x_d u_d = 0$ , tj.  $x_0 = \dots = x_d = 0$ , díky regularitě  $Q$ . Proto má aritmetický základ  $\mathcal{U}^{\perp}$  dimenzi  $n - d$  a v součtu pak mají  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{U}^{\perp}$  dimenzi  $d + (n - d - 1) = n - 1$ .

Druhé tvrzení plyne z prvního, protože zřejmě platí  $\mathcal{U} \subseteq (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$  a oba podprostory mají stejnou dimenzi.  $\square$

**Lemma 4.8.** Necht  $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  je nadkvadrika se singulárním bodem  $X$ . Jestliže  $Y \neq X$  je dalším bodem nadkvadriky  $Q$ , pak v  $Q$  leží celá přímka  $\overleftrightarrow{XY}$ .

*Důkaz.* Pro aritmetické zástupce  $x, y$  bodů  $X$  a  $Y$  a bilineární formu  $f$ , která definuje nadkvadriku  $Q$ , platí  $f(x, x) = 0$  a  $f(x, y) = 0$ , neboť  $[x] = X$  je singulární bod, a  $f(y, y) = 0$ , neboť  $[y] = Y \in Q$ .

Potom

$$f(ax + by, ax + by) = a^2 f(x, x) + 2abf(x, y) + b^2 f(y, y) = 0.$$

Tedy  $[ax + by] \in Q$ .  $\square$

Speciální případ, kdy singulární bod  $[v] \in \nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$  je nevlastní, má následující geometrickou interpretaci: s každým bodem  $Y \in Q$  obsahuje nadkvadrika  $Q$  i celou přímku procházející  $Y$  se směrovým vektorem  $v$ .



## 4.2. Tečná nadrovina

Na základě předchozí motivace můžeme vyslovit následující definici.

**Definice 4.9.** *Tečná nadrovina* nadkvadriky  $Q \subseteq \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  v regulárním bodě  $X \in Q$  je polární nadrovina k  $X$ .

**Věta 4.10.** *Nadrovina  $\tau$  v  $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$  je tečnou nadrovinou k nadkvadrice  $Q$  v regulárním bodě  $X \in Q$  právě tehdy, když  $\tau \subseteq Q$  nebo  $\tau \cap Q$  je singulární kvadrika v  $\tau$  se singulárním bodem  $X$ .*

*Důkaz.* Nechtě  $\tau$  je tečná nadrovina v bodě  $X = [x]$ ,  $\tau = \{[y] \mid f(x, y) = 0\}$ . Pak  $Q \cap \tau = \{[y] \in \tau \mid f(y, y) = 0\}$  a máme dvě možnosti – buď je zúžení  $f$  na aritmetický základ  $\tau$  nulové, pak je  $\tau \subseteq Q$ , nebo nenulové, pak je  $Q \cap \tau$  opět nadkvadrika a přímo podle definice je  $X$  její singulární bod  $Q$ . Opačný směr je analogický.  $\square$

**Důsledek 4.11.** *Přímka  $p$  je tečnou ke kuželosečce  $Q$  právě tehdy, když  $p \subseteq Q$  nebo  $p \cap Q$  je jednobodová množina (čítaje nevlastní body, viz případ osy paraboly nebo přímky mající směr asymptoty hyperboly).*  $\square$

**Příklad.** Najděte tečnu kuželosečky  $Q$  v bodě  $X \in Q$ .

$$Q: 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 16x_1 + 4x_2 - 28 = 0, \quad X = [0; 2]$$

*Řešení.* Daná kuželosečka je zadána v afinní rovině. Rozšíříme ji prvně na projektivní rovinu. V této rovině je bilineární forma kuželosečky  $\overline{Q}$

$$f(x, y) = 8x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 8x_1y_0 + 8x_0y_1 + 2x_2y_0 + 2x_0y_2 - 28x_0y_0.$$

Bod  $X$  má homogenní souřadnice  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_0 = 1$ . Jeho dosazením do  $f(x, y)$  získáme rovnici tečny v homogenních souřadnicích:

$$12y_1 + 12y_2 - 24y_0 = 0.$$

V afinní rovině je tečnou vedenou bodem  $X$  ke kuželosečce  $Q$  přímka

$$y_1 + y_2 - 2 = 0. \quad \diamond$$

**Příklad.** Bodem  $X \notin Q$  veďte tečnu ke kuželosečce  $Q$ .

$$Q: 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 6x_2 - 3 = 0, \quad X = [3; 4]$$

*Řešení.* Kuželosečku  $Q$  zadanou v afinní rovině rozšíříme na kuželosečku  $\overline{Q}$  v projektivní rovině. Příslušná bilineární forma pro  $\overline{Q}$  je

$$f(x, y) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_0 - x_0y_1 + 3x_2y_0 + 3x_0y_2 - 3x_0y_0.$$

Nechtě  $T = (t_0, t_1, t_2)$  je bodem dotyku hledané tečny. Tedy  $T \in Q$  a  $T$  a  $X$  jsou polárně sdružené. To vede na rovnice

$$\begin{aligned} 2t_1^2 - 4t_1t_2 + t_2^2 - 2t_1t_0 + 6t_2t_0 - 3t_0^2 &= 0 \\ -3t_1 + t_2 + 6t_0 &= 0 \end{aligned}$$

#### 4. Metrická klasifikace nadkvadrik

Dosazením  $t_2 = 3t_1 + 6t_0$  do první rovnice dostaneme

$$-t_1^2 - 3t_0^2 + 4t_1t_0 = 0.$$

Položíme  $t_0 = 1$  a řešíme rovnici

$$-t_1^2 + 4t_1 - 3 = 0.$$

Řešení  $t_1 = 3$  a  $1$  vede k bodům  $T_1 = (1, 3, 3)$  a  $T_2 = (1, 1, -3)$ . Hledané tečny jsou potom

$$x_1 - 3 = 0 \quad \text{a} \quad 7x_1 - 2x_2 - 13 = 0. \quad \diamond$$

### 4.3. Střed nadkvadriky v afinním prostoru

V tomto paragrafu budeme pracovat s nadkvadrikou  $Q$  v afinním prostoru  $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  a s jejím projektivním rozšířením  $\overline{Q}$  v  $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ . Body z  $\overline{Q} \setminus Q$  nazýváme *nevlastní body* nadkvadriky  $Q$ . Obecně pak o bodech z  $\nu(\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}})$  budeme hovořit jako o *směrech*.

**Definice 4.12.** Bod  $S \in \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$  se nazývá *střed* nadkvadriky  $Q$ , jestliže je polárně sdružen se všemi nevlastními body.

*Poznámka.* Střed může být vlastní i nevlastní bod v  $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ .

Následující věta říká, že vlastní střed má právě ty vlastnosti, které po středu v geometrii požadujeme.

**Věta 4.13.** *Bod  $S \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  je středem nadkvadriky  $Q$  právě tehdy, když  $Q$  je středově souměrná podle  $S$ .*

*Důkaz.* Nechť  $s \in \mathbb{C}^{n+1}$  je aritmetický zástupce středu nadkvadriky  $S \in \mathcal{A}_n^{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$ . Potom pro všechny vektory  $v$  ze zaměření afinního prostoru  $\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}$  platí  $f(s, v) = 0$ . Odtud dostáváme

$$f(s + tv, s + tv) = f(s, s) + 2f(s, v)t + f(v, v)t^2 = f(s, s) + f(v, v)t^2.$$

Tato rovnice v proměnné  $t$  má buď nekonečně mnoho řešení (oba koeficienty jsou nulové), žádně řešení (pouze kvadratický je nulový) nebo právě dvě řešení  $t = \pm t_0$ . V každém případě je množina řešení symetrická podle počátku a proto  $Q$  symetrická podle  $S$ .

\*\* V opačném směru je potřeba ještě uvážit jednu možnost symetricky rozložených řešení, konkrétně jediné řešení  $t = 0$ , kdy lineární člen nemusí být nulový. Potom bude nulový kvadratický člen, tj.  $f(v, v) = 0$ . Protože je ale zúžení bilineární formy  $f$  na nevlastní podprostor  $\text{Dir } \mathcal{A}_n$  nenulové, existuje báze  $(e_1, \dots, e_n)$  taková, že  $f(e_i, e_i) \neq 0$ , jak se snadno ukáže. Podle předchozího tak musí platit  $f(s, e_i) = 0$  a proto je  $S$  polárně sdružený s  $[e_i]$  a tím pádem se všemi nevlastními body.  $\square$

*Poznámka.* Alternativní důkaz: zvolme  $S$  za počátek. Pak  $S$  je střed, právě když rovnice  $q(X) = 0$  zadávající  $Q$  neobsahuje lineární členy. Na druhou stranu je  $Q$  středově symetrická podle  $S$ , právě když  $q(-X)$  také zadává  $Q$ . Ukázali jsme, že to je možné pouze pokud  $q(-X) = kq(X)$ , díky nenulovému kvadratickému členu to je ale možné pouze pro  $k = 1$  a  $q(-X) = q(X)$  nastane pouze, právě když  $q$  neobsahuje lineární členy.

**Výpočet středu.** Chceme-li najít středy  $S$  nadkvadriky  $Q$  zadané v homogenních souřadnicích  $\overline{\mathcal{A}_n^{\mathbb{C}}}$  bilineární symetrickou formou  $f(x, x) = x^T Ax$ , řešíme soustavu

$$\begin{array}{cccccc} a_{10}s_0 & + & a_{11}s_1 & + & \dots & + & a_{1n}s_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n0}s_0 & + & a_{n1}s_1 & + & \dots & + & a_{nn}s_n & = & 0 \end{array}$$

Ta vznikne ze vztahu  $0 = f(x, s) = x^T A s$  postupným dosazením  $e_1, \dots, e_n$  za  $x$ . Chceme-li najít vlastní střed, pokládáme  $s_0 = 1$ , ideálně pak převedeme členy  $a_{i0}s_0$  na pravou stranu. (Pro výpočet nevlastního středu bychom položili  $s_0 = 0$ .)

**Lemma 4.14.** *Regulární nadkvadrika má právě jeden (vlastní nebo nevlastní) střed.*

*Důkaz.* To plyne buď z lemmatu o dimenzích polárních duálů (střed je polární duál nevlastní nadroviny, která má dimenzi  $n - 1$ ) nebo z předchozího popisu výpočtu.  $\square$

**Příklad.** Najděte středy kuželosečky  $Q$  (vlastní i nevlastní).

$$Q: 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 + 12x_2 - 36 = 0$$

*Řešení.* Bilineární forma pro kuželosečku  $Q$  je

$$f(x, y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_1y_0 + 3x_0y_1 + 6x_2y_0 + 6x_0y_2 - 36x_0y_0.$$

Rovnice pro střed  $S = (y_0, y_1, y_2)$  jsou

$$\begin{aligned} 2y_2 + 3y_0 &= 0 \\ 2y_1 + 3y_2 + 6y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Pro  $y_0 = 1$  dostaneme jediné řešení  $S = (-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 1)$ . Pro  $y_0 = 0$  dostáme  $y_1 = y_2 = 0$ , což nedává v projektivní rovině žádný bod. Daná kuželosečka má tedy vlastní střed  $S = [-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}]$  a nemá žádný nevlastní střed.  $\diamond$

**Příklad.** Najděte středy kvadriky  $Q$  (vlastní i nevlastní).

$$Q: x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3 - 2 = 0$$

*Řešení.* Bilineární forma pro kvadriku  $Q$  je

$$2f(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 - x_3y_0 - x_0y_3 - 4x_0y_0.$$

Soustava rovnic pro střed  $S = (y_0, y_1, y_2, y_3)$  je

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &= 0 \\ y_1 + 4y_2 &= 0 \\ -y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava nemá řešení pro  $y_0 \neq 0$ . Pro  $y_0 = 0$  má řešení  $(0, 0, 0, t)$ . Tedy daná kvadrika nemá vlastní střed a má jeden nevlastní střed o homogenních souřadnicích  $(0, 0, 0, 1)$ .  $\diamond$

#### 4.4. Eukleidovský afinní prostor

Řekneme, že afinní prostor  $\mathcal{S}$  je *Eukleidovský*, jestliže je na  $\text{Dir } \mathcal{S}$  zadán skalární součin. Standardní Eukleidovský prostor  $\mathcal{E}_n$  dimenze  $n$  je standardní afinní prostor  $\mathcal{A}_n$  vybavený standardním skalárním součinem

$$\langle (0, x_1, \dots, x_n), (0, y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

Skalární součin bodů nebudeme uvažovat, protože geometricky nedává smysl.

#### 4. Metrická klasifikace nadkvadrik

*Poznámka.* Tady by se hodilo něco říct o komplexifikaci skalárního součinu.

V této části budeme nadkvadriky uvažovat v komplexním rozšíření  $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$  a v jeho projektivním rozšíření  $\overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$ . Tyto nadkvadriky budeme popisovat nyní pouze v souřadnicích reálných ortonormálních bází  $(O, e_1, \dots, e_n)$  v  $\mathcal{E}_n$ . To znamená, že  $O \in \mathcal{E}_n$  a  $(e_1, \dots, e_n)$  tvoří ortonormální bázi  $\text{Dir } \mathcal{E}_n$ .

Říkáme, že směry  $[u]$  a  $[v]$  jsou *kolmé*, jestliže  $u \perp v$ . Jak již bylo řečeno, kolmost vlastních bodů nedává geometricky smysl.

#### 4.5. Hlavní směry

Směr  $[u]$  zadaný reálným vektorem  $u \in \text{Dir } \mathcal{E}_n$  se nazývá *hlavní směr* nadkvadriky  $Q$ , jestliže všechny k němu kolmé směry v  $\text{Dir } \mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$  jsou s ním polárně sdružené.

Jinými slovy: Je-li nadkvadrika  $Q$  popsána bilineární formou  $f$ , pak pro všechny  $v \in \text{Dir } \mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ ,  $u \perp v$  platí

$$f(u, v) = 0.$$

Nechť  $(O, e_1, \dots, e_n)$  je nějaká ortonormální báze v  $\mathcal{E}_n$ . Nechť  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^n$  je matice bilineární formy  $f$  na  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Nechť  $\tilde{A}$  je matice bilineární formy  $f$  zúžené na  $\text{Dir } \mathcal{E}_n$  v bázi  $(e_1, \dots, e_n)$ , tj.  $\tilde{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ .

*Poznámka.* Tady by bylo vhodné rozlišovat mezi blokem matice  $A$  a zúžením na podprostor.

**Věta 4.15.** *Nenulový vektor  $u \in \text{Dir } \mathcal{E}_n$  určuje hlavní směr nadkvadriky  $Q$  právě tehdy, když je vlastním vektorem lineárního zobrazení zadaného maticí  $\tilde{A}$ .*

*Důkaz.* Lineární zobrazení  $\text{Dir } \mathcal{E}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Dir } \mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$  zadané maticí  $\tilde{A}$  označme opět  $\tilde{A}$ . Nechť  $u \neq 0$  určuje hlavní směr. Potom

$$0 = f(u, v) = \langle \tilde{A}u, v \rangle$$

pro všechna  $u \perp v$ . Proto  $\tilde{A}u \in (u^\perp)^\perp = [u]$ , tj.  $\tilde{A}u = \lambda u$ .

Nechť obráceně  $u \neq 0$  je vlastním vektorem zobrazení  $\tilde{A}$ , tj.  $\tilde{A}u = \lambda u$ . Pro všechna  $u \perp v$  pak platí

$$f(u, v) = \langle \tilde{A}u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = 0.$$

Tedy  $u$  určuje hlavní směr. □

Z důkazu je zároveň vidět, že pro normovaný vektor  $u$  zadávající hlavní směr platí  $f(u, u) = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda$ . V ortonormální bázi složené z vlastních vektorů tedy bude  $\tilde{A}$  diagonální s vlastními čísly na diagonále (to by nebyla pravda bez normovanosti!).

**Důsledek 4.16.** *Ke každé nadkvadrice  $Q$  v  $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$  existuje ortonormální báze v  $\text{Dir } \mathcal{E}_n$ , jejíž vektory určují hlavní směry nadkvadriky  $Q$ .*

*Důkaz.* K symetrické reálné matici  $\tilde{A}$  existuje ortonormální báze tvořená reálnými vlastními vektory. □

**Definice 4.17.** *Vlastní čísla matice  $\tilde{A}$  se nazývají hlavní čísla nadkvadriky  $Q$ . Tato čísla nejsou určena jednoznačně, ale pouze až na společný násobek, je tedy jednoznačný jejich poměr  $(\lambda_1 : \dots : \lambda_n)$ , který lze chápat jako prvek projektivního prostoru  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  (protože vlastní čísla symetrických matic jsou reálná).*

#### 4.6. Nadkvadriky a symetrie

Již dříve jsme podali definici středu nadkvadriky v afinním prostoru. K této definici jsme nepotřebovali skalární součin. O symetrii nadkvadriky vzhledem k nadrovině však můžeme mluvit pouze tehdy, když máme na zaměření afinního prostoru zadán skalární součin.

**Definice 4.18.** Nadrovina  $\tau$  v  $\mathcal{E}_n$  se nazývá *hlavní nadrovinou* nadkvadriky  $Q$ , jestliže je buď

- polární nadrovinou k regulárnímu hlavnímu směru nadkvadriky  $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$  nebo
- kolmou nadrovinou k singulárnímu hlavnímu směru nadkvadriky  $\overline{Q} \subseteq \overline{\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}}$ .

Osová nadrovina pro  $n = 2$  se nazývá *osová přímka* nebo *osa*.

Poznamenejme, že i v prvním případě je hlavní nadrovina kolmá k danému hlavnímu směru  $[u]$  – ten je totiž polárně sdružen s  $[u]^\perp$  a to je tedy zaměření této hlavní nadroviny.

*Poznámka.* V dalším ukážeme, že hlavní nadroviny  $Q$  jsou *osovými nadrovinami*  $Q$ ; obrácené tvrzení platí až na drobnou výjimku také a nebudeme proto mezi těmito pojmy rozlišovat.

**Příklad.** Uvažujme parabolu  $x_1^2 + 2x_2 = 0$  ve standardní ortonormální bázi v  $\mathbb{R}^2 = \mathcal{E}_2$ . Matice  $A$  je

$$A = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Matice  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  má vlastní čísla 1 a 0 s vlastními vektory  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$ . Ty určují hlavní směry a jsou regulárními nevlastními body o homogenních souřadnicích  $(0 : 1 : 0)$  a  $(0 : 0 : 1)$ . Polára k  $(0 : 1 : 0)$  v  $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$  je dána rovnicí

$$x_1 = 0.$$

Polára k  $(0 : 0 : 1)$  v  $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$  je dána rovnicí

$$x_0 = 0.$$

Tedy v  $\overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}}$  má parabola pouze jedinou osovou přímku

$$x_1 = 0.$$

**Příklad.** Uvažujme dvojici reálných rovnoběžek

$$x_1^2 - 1 = 0$$

ve standardní ortonormální bázi  $\mathbb{R} = \mathcal{E}_2$ . Matice

$$A = \left( \begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla matice  $\tilde{A}$  jsou 1 a 0 s vlastními vektory  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$ . Ty určují 2 hlavní směry o homogenních souřadnicích  $(0 : 1 : 0)$  a  $(0 : 0 : 1)$ .  $(0 : 1 : 0)$  je regulární nevlastní bod. Polára k němu je

$$x_1 = 0.$$

$(0 : 0 : 1)$  je singulární nevlastní bod. Všechny přímky kolmé na  $(0, 1)$  v  $\mathcal{E}_2$  jsou  $x_2 = c$ , kde  $c$  je nějaká konstanta. Daná kuželosečka má tedy osové přímky  $x_1 = 0$  a  $x_2 = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Věta 4.19.** *Nechť  $\tau$  je hlavní nadrovina  $Q$  v  $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$ . Pak je  $Q$  symetrická podle  $\tau$ .*

*Důkaz.* Nechť  $\tau$  je osová nadrovina v  $\mathcal{E}_n$  k hlavnímu směru  $[u]$  a nechť  $S \in \tau$ . Potom  $[s + tu] \in Q$ , právě když

$$0 = f(s + tu, s + tu) = f(s, s) + 2f(s, u)t + f(u, u)t^2 = f(s, s) + f(u, u)t^2$$

a opět kořeny tohoto polynomu v proměnné  $t$  jsou symetricky rozložené okolo 0, tedy  $Q$  je symetrická podle  $\tau$ .  $\square$

*Poznámka.* Opačné tvrzení obecně neplatí, jak lze ověřit jednoduchým výpočtem. Zvolíme-li  $\tau$  jako rovinu  $x_n = 0$ , dostáváme opět symetričnost podle  $\tau$  jako podmínku  $q(x_1, \dots, x_n) = \pm q(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ . Varianta se znaménkem plus je ekvivalentní tomu, že  $\tau$  je osová nadrovina. Varianta se znaménkem mínus nastane, právě když  $Q$  je dvojice na sebe kolmých rovin, jedna z nichž je  $\tau$ .

**Definice 4.20.** Průsečnice dvou osových rovin kvadriky  $Q$  se nazývá *osová přímka* nebo *osa* kvadriky  $Q$ . Body průniku osové přímky s kvadrikou se nazývají *vrcholy*.

#### 4.7. Metrická klasifikace kuželoseček a kvadrik

Klasifikaci provedeme indukcí. Předpokládejme prvně, že existuje singulární směr a označme jej  $[e_n]$ , kde  $e_n$  je normovaný. Zvolme libovolnou vlastní nadrovinu  $\tau$  kolmou na  $e_n$ ; podle klasifikace v dimenzi  $n - 1$  existuje ortonormální afinní báze  $(V, e_1, \dots, e_{n-1})$ , v níž má  $Q \cap \tau$  kanonický tvar. Doplňme tuto bázi vektorem  $e_n$  do ortonormální afinní báze  $\mathcal{A}_n$  a zkoumejme matici nadkvadriky v této bázi. Protože byl  $[e_n]$  singulární, je tato stejná jako pro  $Q \cap \tau$ , pouze doplněná nulovým řádkem a nulovým sloupcem. Zejména, rovnice  $Q$  je totožná s rovnicí  $Q \cap \tau$ . Budeme tedy v dalším předpokládat, že žádný singulární směr neexistuje.

Poznamenejme ještě krátce, že v případě singulárního vlastního bodu je celá nadkvadrika kuzelem a klasifikace se redukuje na (metrickou) projektivní klasifikaci nadkvadrik.

Nechť je nejdříve  $Q$  středová a zvolme střed  $S$  za počátek. Dále zvolme ortonormální bázi  $(e_1, \dots, e_n)$  zaměřenou Dir  $\mathcal{E}_n$  složenou z vektorů reprezentujících hlavní směry. To je možné díky ortonormální diagonalizovatelnosti symetrických bilineárních forem. V bázi  $(S, e_1, \dots, e_n)$  má  $Q$  matici

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{array} \right),$$

jelikož platí:  $f(e_i, e_j) = 0$ ,  $i \neq j$ , protože jsou  $[e_i]$  hlavní směry;  $f(S, e_i) = 0$ , protože je  $S$  střed. Ve skutečnosti je  $a_{ii} = f(e_i, e_i) = \langle \tilde{A}e_i, e_i \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_i \rangle = \lambda_i$ , protože  $|e_i| = 1$ , a  $a_{00} = f(S, S)$ .

V nestředovém případě se stačí omezit na regulární nadkvadriky, protože vlastní singulární bod by byl tím spíše vlastním středem. Díky regularitě je  $(\nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}))^{\text{h}}$  nularozměrný, označme jeho jediný bod  $[e_n]$  a předpokládejme opět  $e_n$  normovaný. Zkoumejme nyní kolmý doplněk  $[e_n]^{\perp} \subseteq \nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$ . To je projektivní podprostor dimenze  $n - 2$  a proto má jeho polární doplněk dimenzi 1, přičemž průnik tohoto doplněku s  $[e_n]^{\text{h}} = \nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$  je  $([e_n]^{\perp} + [e_n])^{\text{h}} = (\nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}))^{\text{h}} = [e_n]$ , takže doplněk obsahuje krom  $[e_n]$  ještě vlastní přímku  $o$ , tzv. *osu* nadkvadriky  $Q$ . Protože není  $o$  tečná k  $[e_n]$  (neleží v  $[e_n]^{\text{h}} = \nu(\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}})$ ), je průnik  $Q \cap o$  regulární a obsahuje tedy krom  $[e_n]$  i druhý bod  $V$ , nutně vlastní, který zvolíme za počátek. Zvolíme libovolnou ortonormální bázi

zaměření složenou z vektorů zadávajících hlavní směry, přičemž  $e_n$  bude aritmetický zástupce středu (hlavního směru příslušného hlavnímu číslu 0). Nadkvadrika  $Q$  pak bude mít matici

$$\left( \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ p & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Z výpočetního hlediska je dobré si zapamatovat, že i v singulárním případě se regulární střed dostane jako střed kolmý na všechny singulární směry. Osa je pak přímka mající směr tohoto regulárního středu polárně sdružená se všemi hlavními směry odpovídajícími nenulovým hlavním číslům (stačí spočítat jediný takový bod, protože směr již známe).

Dostáváme tak následující klasifikační větu.

**Věta 4.21.** Pro každou nadkvadriku  $Q$  v  $\mathcal{E}_n^{\mathbb{C}}$  lze najít takovou ortonormální bázi  $(O, e_1, \dots, e_n)$ , že v jejích souřadnicích má  $Q$  právě jednu z rovnic

(a) pro  $n = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + 1 = 0 & \quad \text{dvojice imaginárních bodů/přímek/rovin} \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - 1 = 0 & \quad \text{dvojice reálných bodů/přímek/rovin} \end{aligned}$$

a následující kužel

$$x_1^2 = 0 \quad \text{dvojnásobný bod/přímka/rovina}$$

(b) pro  $n = 2, 3$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 1 = 0 & \quad \text{imaginární elipsa/imaginární eliptický válec} \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 = 0 & \quad \text{reálná elipsa/reálný eliptický válec} \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 = 0 & \quad \text{hyperbola/hyperbolický válec} \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + 2x_2 = 0 & \quad \text{parabola/parabolický válec} \end{aligned}$$

a následující kužele

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 = 0 & \quad \text{imaginární různoběžné přímky/roviny} \\ \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 = 0 & \quad \text{reálné různoběžné přímky/roviny} \end{aligned}$$

(c) pro  $n = 3$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 + 1 = 0 & \quad \text{imaginární elipsoid} \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 - 1 = 0 & \quad \text{reálný elipsoid} \end{aligned}$$

#### 4. Metrická klasifikace nadkvadrik

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 + 1 &= 0 && \text{dvoudílný (nepřímkový) hyperboloid} \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2 - 1 &= 0 && \text{jednodílný (přímkový) hyperboloid} \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 2x_3 &= 0 && \text{eliptický paraboloid} \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + 2x_3 &= 0 && \text{hyperbolický paraboloid} \end{aligned}$$

a následující kužele

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 &= 0 && \text{imaginární kuželová plocha} \\ \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^2 &= 0 && \text{reálná kuželová plocha} \end{aligned}$$

Pro koeficienty platí  $a_i > 0$ ,  $\alpha_i > 0$ , přičemž koeficienty  $\alpha_i$  jsou určeny až na násobek; jinými slovy, hraje roli pouze poměr  $(\alpha_1 : \dots : \alpha_n)$ .

**Příklad.** Najděte hlavní směry, osově rovin, osově přímky, vrcholy a kanonickou rovnici ve vhodné bázi kvadriky

$$x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 + 4x_1 + 16x_2 - 4x_3 - 16 = 0.$$

*Řešení.* Matice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  matice  $\tilde{A}$  jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\tilde{A} - \lambda E) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 16\lambda + 32.$$

Tyto kořeny, pokud jsou celočíselné, musí dělit absolutní člen 32. Tak zjistíme, že

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -4.$$

Odpovídající vlastní vektory  $u_i$  jsou řešeními soustavy  $(\tilde{A} - \lambda_i E)u_i = 0$ . Dostáváme  $u_1 = (1, 0, -1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$  a  $u_3 = (0, 1, 0)$ . Osově roviny má kvadrika 3 a jsou to roviny polární k  $u_1$ ,  $u_2$  a  $u_3$ .

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Osově přímky jsou opět tři a jejich popis je dán výběrem 2 z předchozích 3 rovnic. Průnik všech tří osových rovin je jediný bod  $S = (1, 2, -1)$ . Ten je středem kvadriky. Parametrické vyjádření os je potom následující:

$$\begin{aligned} o_1: & (1, 2, -1) + t(0, 1, 0) \\ o_2: & (1, 2, -1) + t(1, 0, 1) \\ o_3: & (1, 2, -1) + t(1, 0, -1) \end{aligned}$$



Z parametrického vyjádření osy  $o_1$  dosadíme do rovnice kvadriky a pro parametr  $t$  dostaneme kvadratickou rovnici  $t^2 - 1 = 0$ . Vrcholy na ose  $t_1$  jsou tedy  $A = (1, 3, -1)$  a  $B = (1, 1, -1)$ .

Z parametrického vyjádření osy  $o_2$  dostaneme kvadratickou rovnici  $2t^2 + 1 = 0$ . Na  $o_2$  tedy leží dva komplexně sdružené vrcholy  $E = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i, 2, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$ ,  $\bar{E} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i, 2, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$ .

Konečně pro osu  $o_3$  dostaneme opět rovnici  $t^2 - 1 = 0$ , která dává vrcholy  $C = (2, 2, -2)$  a  $D = (0, 2, 0)$ .

Z popisu os a reálných vrcholů vyplývá, že daná kvadrika je jednodílný hyperboloid. V bázi  $S$ ,  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ ,  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ ,  $v_3 = u_3$  budeme mít souřadnice  $y_1, y_2, y_3$ , pro které platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tedy v homogenních souřadnicích

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Tedy rovnice kvadriky v souřadnicích  $y$  je

$$yP^TAPy = 0,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Rovnice v nových souřadnicích je

$$-2y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2 + 4 = 0. \quad \diamond$$

### Kontrolní otázky

1. Podejte definici hlavních směrů a vysvětlete, kterou větu použijete k jejich výpočtu.
2. Jak se liší hlavní čísla regulárních kvadrik?
3. Kolik osových (hlavních) rovin mají jednotlivé kvadriky? (Použijte jejich metrickou klasifikaci.)
4. Napište kanonické rovnice kvadrik s 1, 2, 4, 6 a nekonečně mnoha reálnými vrcholy.
5. Zvolte si nějakou kvadriku a popište všechny její symetrie.

## Příklady k procvičení

1. Určete hlavní čísla a hlavní směry nadkvadriky, její střed a její kanonickou rovnici v příslušné ortonormální bázi.

(a)  $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0$  v  $\mathcal{E}_2$

[Řešení:  $\lambda_1 = 8$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $S = [2; -1]$ , hyperbola  $x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = 1$ ]

(b)  $7x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 + 28x_1 + 12x_2 + 28 = 0$  v  $\mathcal{E}_2$

[Řešení:  $\lambda_1 = 8$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $u_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ ,  $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$ ,  $S = [-2; 0]$ , různoběžky  $x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} = 0$ ]

(c)  $9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 24x_1 - 16x_2 + 3 = 0$  v  $\mathcal{E}_2$

[Řešení:  $\lambda_1 = 13$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $u_1 = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ ,  $u_2 = (\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$ ,  $S = [2t; 3 - 2t]$ , rovnoběžky  $x_1^2 = 1$ ]

(d)  $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 9 = 0$  v  $\mathcal{E}_3$

[Řešení:  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = -2$ ,  $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$ ,  $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ,  $S = [1; -1; 1]$ , reálná kuželová plocha  $\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - \frac{x_3^2}{3} = 0$ ]

(e)  $5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 - 27 = 0$  v  $\mathcal{E}_3$

[Řešení:  $\lambda_{1,2} = 9$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $u_2 = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$ ,  $u_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ ,  $S = [0; 0; 0]$ , reálná eliptická válcová plocha  $\frac{x_1^2}{3} + \frac{x_2^2}{3} = 1$ ]

(f)  $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0$  v  $\mathcal{E}_3$

[Řešení:  $\lambda_{1,2} = -3$ ,  $\lambda_3 = 6$ ,  $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ ,  $u_2 = (\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})$ ,  $u_3 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ ,  $S = [1; 1; -1]$ , reálná kuželová plocha  $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - x_3^2 = 0$ ]

(g)  $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0$  v  $\mathcal{E}_3$

[Řešení:  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ ,  $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $S = [t; 2; t]$ , reálná eliptická válcová plocha  $x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} = 1$ ]

(h)  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 2\sqrt{2}x_3 - 8 = 0$  v  $\mathcal{E}_3$

[Řešení:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_{2,3} = 0$ ,  $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ,  $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ,  $u_3 = (0, 0, 1)$ , nestředová, parabolická válcová plocha  $x_1^2 + 2x_3 = 0$ ]

2. Určete osové nadroviny a vrcholy nadkvadrik z příkladu (1).

[Řešení:

- (a) Osy  $o_1: x_1 + x_2 = 1$ ,  $o_2: x_1 - x_2 = 3$ , vrcholy  $V_{1,2} = [2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}; -1 \mp \frac{3}{\sqrt{2}}]$  příslušné k  $o_1$ ,  $V_{3,4} = [2 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}; -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}]$  příslušné k  $o_2$ ;

- 
- (b) Osy  $x_1 + x_2 = -6$ ,  $x_1 - 3x_2 = -2$ , vrcholy  $V_1 = [-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}]$  k  $o_1$ ,  $V_2 = [-2; 0]$  k  $o_2$ ;
- (c) Osa  $3x_1 + 2x_2 = 4$ , nevlastní vrchol určený zaměřením osy  $(-2, 3, 0)$ ;
- (d) Osové roviny  $\sigma_1: x_1 - x_2 + x_3 = 3$ ,  $\sigma_2: x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ ,  $\sigma_3: x_1 + x_2 = 0$ , 6 os zadaných průniky vždy dvou rovin, vrchol  $V = [1; -1; 1]$ ;
- (e) Osové roviny  $2x_1 - x_2 - 2x_3 = p$  pro  $\forall p \in \mathbb{R}$ , dále všechny roviny obsahující osu  $o: x_1 + 2x_2 = 0, 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0$ , další osy jsou přímky na tuto osu kolmé, vrcholy jsou všechny body kvadriky;
- (f) Osové roviny  $\sigma: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$ , dále všechny roviny procházející osou  $o: x_1 - x_2 = -3, 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1$ , vrchol  $V = [1; -1; 1]$ ;
- (g) Osové roviny  $\sigma_1: x_1 - 2x_2 - x_3 = -2$ ,  $\sigma_2: x_1 + x_2 - x_3 = 1$ , osa daná průnikem rovin a nevlastní vrchol určený jejím zaměřením  $(1, 0, 1, 0)$ ;
- (h) Osová rovina  $x_1 = x_2$ .]

## 5. Mooreova–Penroseova pseudoinverze

### 5.1. Pseudoinverze

Nechť  $\varphi: U \rightarrow V$  je lineární zobrazení mezi Eukleidovskými prostory. Zabývejme se otázkou, zda existuje inverzní zobrazení a v případě, že neexistuje, otázkou, jak blízko se k inverzi můžeme přiblížit. Nechť tedy  $\psi: V \rightarrow U$  je libovolné zobrazení a zkoumejme složení  $\psi\varphi$  a  $\varphi\psi$ . Zřejmě je  $\psi\varphi = 0$  na  $\ker \varphi$  a nejlepší, co můžeme očekávat, je, že bude toto složení rovno identitě na nějakém doplňku  $\ker \varphi$ . Symetricky můžeme očekávat  $\varphi\psi = \text{id}$  pouze na nějakém doplňku  $\ker \psi$ .

**Definice 5.1.** Lineární zobrazení  $\psi: V \rightarrow U$  se nazývá *Mooreova–Penroseova pseudoinverze* lineárního zobrazení  $\varphi: U \rightarrow V$ , jestliže

- $\psi\varphi = \text{id}$  na  $(\ker \varphi)^\perp$  a
- $\varphi\psi = \text{id}$  na  $(\ker \psi)^\perp$ .

Protože na  $\ker \varphi$  je vždy  $\psi\varphi = 0$ , je první podmínka ekvivalentní tomu, že  $\psi\varphi$  je kolmá projekce na  $(\ker \varphi)^\perp$ .

**Lemma 5.2.** *Pro Mooreovu–Penroseovu pseudoinverzi platí  $\text{im } \varphi = (\ker \psi)^\perp$ .*

*Důkaz.* Podle druhé podmínky z definice platí  $(\ker \psi)^\perp \subseteq \text{im } \varphi$ , ukážeme nyní opačnou inkluzi. Prvně si uvědomme, že platí  $\varphi\psi\varphi = \varphi$  – na  $\ker \varphi$  jsou obě strany nulové a na  $(\ker \varphi)^\perp$  to plyne z první podmínky. Jinými slovy tato rovnost znamená, že  $\varphi\psi = \text{id}$  na  $\text{im } \varphi$ . Zároveň je však kompozice  $\varphi\psi$  projekce, musí tedy nutně  $\text{im } \varphi$  ležet v jejím obraze  $(\ker \psi)^\perp$ .  $\square$

Symbolicky budeme situaci z předchozí definice/lemmatu znázorňovat diagramem

$$\begin{array}{ccc} (\ker \varphi)^\perp & \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} & \text{im } \varphi \\ \oplus & & \oplus \\ \ker \varphi & & (\text{im } \varphi)^\perp \end{array}$$

kde fakt, že  $\psi$  je naznačené jako zobrazení  $\text{im } \varphi \rightarrow (\ker \varphi)^\perp$  značí, že je nulové na komplementu  $(\text{im } \varphi)^\perp$  a jeho komponenta v  $\ker \varphi$  je taktéž nulová. Značka  $\cong$  uprostřed značí, že jakožto zobrazení mezi  $(\ker \varphi)^\perp$  a  $\text{im } \varphi$  jsou  $\varphi$  a  $\psi$  vzájemně inverzní izomorfismy.

S výhodou lze předchozí situaci vyjádřit pomocí blokových matic. Pokud zvolíme v  $U$  bázi tak, že vektory ze začátku tvoří bázi  $(\ker \varphi)^\perp$ , zatímco vektory z konce tvoří bázi  $\ker \varphi$  a analogicky pro  $V$  a podprostory  $\text{im } \varphi$ ,  $(\text{im } \varphi)^\perp$ , lze matice  $\varphi$  a  $\psi$  psát v blokovém tvaru

$$\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

U první matice dva nulové bloky napravo značí, že  $\varphi|_{\ker \varphi} = 0$ , zatímco dva nulové bloky dole značí, že komponenta  $\varphi$  v  $(\text{im } \varphi)^\perp$  je nulová.

Zřejmě také naopak v situaci z předchozího diagramu je  $(\text{im } \varphi)^\perp = \ker \psi$  a  $\psi$  je Mooreovou–Penroseovou pseudoinverzí  $\varphi$ . Protože inverze izomorfismu  $\varphi: (\ker \varphi)^\perp \rightarrow \text{im } \varphi$  existuje jediná, dostáváme jednoduše následující tvrzení.

**Tvrzení 5.3.** *Nechť  $\varphi: U \rightarrow V$  je lineární zobrazení mezi Eukleidovskými prostory (konečné dimenze). Potom Mooreova–Penroseova pseudoinverze existuje a je jediná. Značíme ji  $\varphi^+$ .*  $\square$

Tradičně se Mooreova–Penroseova pseudoinverze definuje pomocí singulárního rozkladu (singular value decomposition). Tento přístup je výhodný i z dalších důvodů. Uvažujme proto adjungované zobrazení  $\varphi^* : V \rightarrow U$ .

**Lemma 5.4.** *Zobrazení  $\varphi^*\varphi$  je samoadjungované a platí  $\langle \varphi^*\varphi(u), u \rangle \geq 0$  (říkáme, že  $\varphi^*\varphi$  je pozitivně semidefinitní). Navíc  $\ker(\varphi^*\varphi) = \ker \varphi$ .*

*Důkaz.* Z definice adjungovaného zobrazení platí

$$\langle \varphi^*\varphi(u), v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, \varphi^*\varphi(v) \rangle$$

a navíc prostřední člen je pro  $u = v$  nezáporný.

Inkluze  $\ker(\varphi^*\varphi) \supseteq \ker \varphi$  je zřejmá. Je-li naopak  $\varphi^*\varphi(u) = 0$ , pak také  $0 = \langle \varphi^*\varphi(u), u \rangle = |\varphi(u)|^2$  a proto  $\varphi(u) = 0$ , tedy  $u \in \ker \varphi$ .  $\square$

Podle tohoto lemmatu existuje na  $U$  ortonormální báze  $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$  složená z vlastních vektorů  $\varphi^*\varphi$  a můžeme ji zvolit tak, že

$$[u_{r+1}, \dots, u_m] = \ker(\varphi^*\varphi) = \ker \varphi$$

a tím pádem

$$[u_1, \dots, u_r] = (\ker \varphi)^\perp.$$

Nechť vlastní čísla příslušná  $u_1, \dots, u_m$  jsou  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Podle naší volby  $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_m = 0$  a zbylá  $\lambda_i$  jsou nenulová. Stále podle předchozího lemmatu platí

$$\lambda_i = \langle \lambda_i u_i, u_i \rangle = \langle \varphi^*\varphi(u_i), u_i \rangle \geq 0$$

Zkonstruujme nyní vhodnou ortonormální bázi  $V$ , vzhledem k níž bude mít  $\varphi$  co nejjednodušší tvar. Prvně se zabývejme obrazem  $\varphi$ , který je generován  $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_r)$ :

$$\langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \langle \varphi^*\varphi(u_i), u_j \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Jsou tedy vektory  $\varphi(u_i)$  navzájem kolmé o velikostech

$$|\varphi(u_i)| = \sqrt{\lambda_i} = s_i.$$

Tato čísla nazýváme *singulární hodnoty* zobrazení  $\varphi$ . Položíme

$$v_i = \frac{1}{s_i} \varphi(u_i)$$

pro  $i = 1, \dots, r$  a doplníme  $v_1, \dots, v_r$  do ortonormální báze  $\beta = (v_1, \dots, v_n)$  prostoru  $V$ .

Vzhledem k těmto bázím má  $\varphi$  matici

$$(\varphi)_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & s_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

## 5. Mooreova–Penroseova pseudoinverze

(tato matice má rozměry  $m \times n$ ). Poznamenejme, že matice adjungovaného zobrazení  $\varphi^*$  je „stejná“, akorát má rozměry  $n \times m$ . V těchto bázích je také extrémně jednoduché napsat Mooreovu–Penroseovu pseudoinverzi

$$(\varphi^+)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (s_1)^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & (s_r)^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Tímto souřadnicovým zápisem se často Mooreova–Penroseova pseudoinverze definuje. Elegantně to lze provést následující úvahou. Pracujme pro jednoduchost ve standardních Eukleidovských prostorech a místo  $\varphi$  pracujme s maticí  $M$ . Ve výše popsáných bázích  $\alpha, \beta$  má  $M$  diagonální matici, označme ji  $\Sigma$ . To znamená, že lze psát

$$M = P\Sigma Q^*,$$

kde  $P, Q$  jsou ortogonální matice. Tomuto rozkladu matice  $M$  se říká *singulární rozklad*. Mooreovu–Penroseovu pseudoinverzi potom můžeme spočítat jako  $M^+ = Q\Sigma^+P^*$ , kde  $\Sigma^+$  vznikne (tak jako výše) z diagonální matice  $\Sigma$  inverzí všech nenulových prvků.

Poznamenejme ještě, že z matice  $(\varphi)_{\beta\alpha}$  lze také odvodit geometrický význam singulárních hodnot. Uvažíme-li v  $U$  jednotkovou sféru, pak její obraz při zobrazení  $\varphi$  je (v některých směrech možná zdegenerovaný) elipsoid, jehož délky poloos jsou právě singulární hodnoty.

**Tvrzení 5.5.** *Platí následující vztahy*

- Je-li  $\varphi$  injektivní, potom  $\varphi^+ = (\varphi^*\varphi)^{-1}\varphi^*$ .
- Je-li  $\varphi$  surjektivní, potom  $\varphi^+ = \varphi^*(\varphi\varphi^*)^{-1}$ .

*Důkaz.* V bázích  $\alpha, \beta$  jsou všechny uvažované matice diagonální. V případě injektivního  $\varphi$  má  $\varphi^*\varphi$  na diagonále pouze čísla  $s_i^2$ . Proto  $(\varphi^*\varphi)^{-1}$  existuje a má na diagonále čísla  $s_i^{-2}$  a tím pádem pravá strana má na diagonále prvky  $s_i^{-1}$ . Týmž diagonální tvar levé strany jsme odvodili před tvrzením. Podobná analýza funguje v případě surjektivního  $\varphi$ .  $\square$

cv *Poznámka.* Je-li  $U = V \oplus W$ , má každý vektor  $u \in U$  jednoznačné vyjádření  $u = v + w$ , kde  $v \in V$  a  $w \in W$ . Označme  $v = p(u)$  a dostáváme tak lineární zobrazení  $p: U \rightarrow U$  (s hodnotami ve  $V$ ), kterému říkáme *projekce* na  $V$  ve směru  $W$ .

Uveďme nyní ještě dvě alternativní charakterizace. Lineární zobrazení  $p: U \rightarrow U$  je projekce na  $V$  ve směru  $W$ , právě když  $p|_V = \text{id}$  a  $p|_W = 0$ . Lineární zobrazení  $p: U \rightarrow U$  je projekce, právě když  $p \circ p = p$ ; v takovém případě se jedná o projekci na  $\text{im } p$  ve směru  $\text{ker } p$ .

Ukažte, že projekce je samoadjungovaná, právě když je kolmá<sup>4</sup>.

**Věta 5.6.** *Platí*

1.  $\varphi\varphi^+\varphi = \varphi$
2.  $\varphi^+\varphi\varphi^+ = \varphi^+$

<sup>4</sup>Podle definice je projekce  $p$  samoadjungovaná, právě když  $\langle u, p(v) \rangle = \langle p(u), v \rangle$ . Tato podmínka je triviálně splněná pro  $u, v \in \text{ker } p$  a  $u, v \in \text{im } p$ . Pro  $u \in \text{ker } p, v \in \text{im } p$  tato podmínka je  $\langle u, v \rangle = 0$ , tedy právě  $\text{ker } p \perp \text{im } p$ . Zbýlý případ  $u \in \text{im } p, v \in \text{ker } p$  je symetrický.

3.  $\varphi^+\varphi$  je samoadjungované

4.  $\varphi\varphi^+$  je samoadjungované

Naopak každé zobrazení  $\psi$  splňující tyto čtyři vztahy s  $\varphi^+$  nahrazeným  $\psi$  je Mooreovou–Penroseovou pseudoinverzí k  $\varphi$ , tj.  $\psi = \varphi^+$ .

*Důkaz.* Je jednoduché ověřit vztahy z tvrzení pro Mooreovu–Penroseovu pseudoinverzi; vlastnosti (3) a (4) platí proto, že příslušné kompozice jsou kolmé projekce na podprostory  $\text{im } \varphi$  a  $(\ker \varphi)^\perp$ . V tomto i opačném směru je podstatné si uvědomit, že projekce je samoadjungovaná, právě když je kolmá.

Podle (1) a (3) je  $\varphi^+\varphi$  samoadjungovaná projekce (neboť  $(\varphi^+\varphi)^2 = \varphi^+\varphi$ ) ve směru  $\ker(\varphi^+\varphi) = \ker \varphi$  (neboť  $\ker \varphi \subseteq \ker(\varphi^+\varphi) \subseteq \ker(\varphi\varphi^+\varphi) = \ker \varphi$ ), nutně tedy kolmá. Proto je jejím obrazem  $(\ker \varphi)^\perp$  a  $\varphi^+$  tedy splňuje první definiční vztah. Druhý se dokáže symetricky.

Téměř v jakékoliv knize pojednávající o Mooreově–Penroseově pseudoinverzi lze najít alternativní důkaz hrubou silou.  $\square$

## 5.2. Aproximace řešení soustavy lineárních rovnic

Zabývejme se soustavou lineárních rovnic  $Ax = v$ . Pokud je matice  $A$  čtvercová a invertibilní, lze formálně tuto soustavu vyřešit vynásobením inverzí  $A^{-1}$ ,

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}v.$$

V případě, že  $A$  nemá inverzi nebo dokonce není ani čtvercová, lze stále něco říct o řešeních pomocí Mooreovy–Penroseovy pseudoinverze.

**Tvrzení 5.7.** *Soustava  $Ax = v$  má řešení, právě když*

$$AA^+v = v$$

*Důkaz.* Pokud platí  $AA^+v = v$ , pak zřejmě  $A^+v$  je řešením. Naopak, pokud  $Ax = v$  pro nějaké  $x$ , potom

$$AA^+v = AA^+Ax = Ax = v.$$

Jiný důkaz spočívá v tom, že  $AA^+$  je projekce na  $\text{im } A$ , a proto rovnost  $AA^+v = v$  je ekvivalentní tomu, že  $v \in \text{im } A$ , což je zřejmě to samé, že soustava má řešení.  $\square$

Vidíme tedy, že i v případě, že  $A$  nemá inverzi, nebo dokonce není ani čtvercová, můžeme nějaké její řešení (v případě, že existuje) najít jako  $A^+v$ . V následujícím ukážeme, jaký geometrický význam toto řešení má. Obecněji se budeme zabývat otázkou geometrického významu  $A^+v$  i v případě, kdy soustava  $Ax = v$  nemá řešení.

Řekneme, že  $x$  je *nejlepší aproximací řešení*, jestliže minimalizuje výraz  $|Ax - v|$ , tj. pokud pro libovolné  $y$  platí

$$|Ax - v| \leq |Ay - v|$$

Zřejmě je tedy  $Ax$  bod  $\text{im } A$ , který je nejbliž  $v$ , je to tedy kolmá projekce vektoru  $v$  do podprostoru  $\text{im } A$ . Tu umíme podle předchozího napsat pomocí pseudoinverze jako  $AA^+v$ . Platí tedy

**Lemma 5.8.** *Vektor  $x$  je nejlepší aproximací řešení soustavy  $Ax = v$ , právě když platí*

$$Ax = AA^+v.$$

Zejména tedy  $A^+v$  je nejlepší aproximace řešení. Obecně je takových nejlepších aproximací víc. Mezi nimi lze  $A^+v$  charakterizovat pomocí následující věty

**Věta 5.9.** *Vektor  $A^+v$  je nejlepší aproximace řešení soustavy  $Ax = v$  s nejmenší normou, „zkráceně“ nejmenší nejlepší aproximace řešení.*

*Důkaz.* Množina nejlepších aproximací je právě množinou řešení soustavy

$$Ax = AA^+v$$

a jedná se tedy o afinní podprostor se zaměřením  $\ker A$ . Vektor z tohoto afinního podprostoru s nejmenší normou je tedy jediný a to právě ten, který je kolmý na zaměření  $\ker A$ . Přitom ale  $A^+v \in \operatorname{im} A^+ = (\ker A)^\perp$ .  $\square$

**Příklad** (Aproximace přímkou). Necht' jsou v rovině dány body  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Úkolem je vést těmito body přímkou. Pokud by to bylo možné přesně, existovaly by  $a, b$  (koeficienty v rovnici přímky  $a + bx = y$ ) takové, že

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot x_1 &= y_1 \\ &\vdots \\ a \cdot 1 + b \cdot x_n &= y_n \end{aligned}$$

Naším úkolem je tedy vyřešit soustavu (vzhledem k neznámým  $a, b$ ) s rozšířenou maticí

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{array} \right)$$

Její nejmenší nejlepší aproximace řešení je

$$(a, b)^T = \left( \begin{array}{cc} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{array} \right)^+ \cdot \left( \begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right)$$

Přímka s rovnicí  $y = a + bx$  se nazývá aproximací přímkou zadané  $n$ -tice bodů. Je potřeba však vysvětlit, v jakém smyslu je to neoptimalnější odpověď na naši otázku proložení přímky zadanými body. Tato přímka minimalizuje

$$\sum_{i=1}^n ((a + bx_i) - y_i)^2,$$

tedy součet čtverců odchylek funkčních hodnot  $a + bx_i$  od zadaných  $y_i$ . Tato aproximace se používá, pokud víme, že zadané hodnoty  $y_i$  mohou být zatíženy chybou, ale  $x_i$  jsou naměřeny přesně.



### 5.3. Kolmá projekce do podprostoru

Nechť  $V = [v_1, \dots, v_k] \subseteq U$  je podprostor. Kolmá projekce vektoru  $u$  do  $V$  je takový vektor  $P(u) = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$ , který je nejbliž k  $u$ . Jedná se tedy o nejlepší aproximaci řešení soustavy  $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = u$ . Označíme-li  $A = (v_1 \cdots v_k)$  matici na levé straně, dostáváme z předchozího formulku  $(x_1 \cdots x_k)^T = A^+ u$  a tedy

$$P(u) = (v_1 \cdots v_k)(x_1 \cdots x_k)^T = AA^+ u.$$

Předpokládáme-li nyní, že vektory  $v_1, \dots, v_k$  jsou lineárně nezávislé, je  $A$  maticí injektivního zobrazení a dostáváme tak formulku

$$P = A(A^* A)^{-1} A^*.$$

V případě, že byl systém vektorů dokonce ortonormální, je matice uprostřed jednotková a tedy  $P = AA^*$ .

## 6. Multilineární algebra

V celé této kapitole budeme pracovat s vektorovými prostory nad pevným tělesem  $\mathbb{K}$ .

### 6.1. Báze a souřadnice

Prvně připomeňme důležité vlastnosti bází a souřadnic. Lineární zobrazení  $\alpha: \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} U$  je jednoznačně určené obrazy  $u_i = \alpha(e_i)$  a lze jej tedy chápat jako  $n$ -tici vektorů  $(u_1, \dots, u_n)$ . Přitom se jedná o bázi, tj.  $\alpha$  posílá bázi na bázi, právě když je  $\alpha$  izomorfismus. Inverzní zobrazení  $\varphi = \alpha^{-1}: U \rightarrow \mathbb{K}^n$  pak posílá každý vektor  $u$  na jeho souřadnice  $(u)_\alpha$  a budeme mu tedy říkat souřadnicové zobrazení (nebo prostě souřadnice na  $U$ ).

**Lemma 6.1.** *Vektory  $u_1, \dots, u_n$  tvoří bázi  $U$ , právě když se každé zobrazení  $\{u_i\} \rightarrow V$  jednoznačně rozšiřuje na lineární zobrazení  $U \rightarrow V$ .*

*Poznámka.* V řeči univerzální algebry to znamená, že báze vektorového prostoru je koncept totožný s volnou algebrou. Následující důkaz je vhodné v tomto směru chápat.

*Důkaz.* To, že báze má vlastnost z tvrzení, známe z dřívějších. Nechť tedy naopak  $u_1, \dots, u_n$  mají vlastnost z tvrzení. Zejména tedy existuje zobrazení  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{K}^n$ , posílající  $u_i \mapsto e_i$ . Ze stejné vlastnosti standardní báze dostáváme zobrazení  $\alpha: \mathbb{K}^n \rightarrow U$  posílající  $e_i \mapsto u_i$ . Protože složené zobrazení  $\alpha\varphi$  posílá  $u_i \mapsto u_i$ , stejně jako identické zobrazení, plyne z jednoznačnosti rozšíření  $\alpha\varphi = \text{id}$  a symetricky také  $\varphi\alpha = \text{id}$ ; tím pádem je  $\alpha$  skutečně báze.  $\square$

### 6.2. Faktorový prostor

Nechť  $U$  je vektorový prostor,  $V$  jeho podprostor. Tento podprostor definuje na  $U$  ekvivalenci  $u_1 \sim u_2$  právě tehdy, když  $u_1 - u_2 \in V$ . Třidu ekvivalence obsahující vektor  $u$  budeme značit  $[u]$ . Je to množina

$$[u] = u + V = \{u + v \mid v \in V\}.$$

Množinu všech tříd ekvivalence označujeme  $U/V$ . Jakožto kvocient komutativní grupy podle její podgrupy je to opět komutativní grupa, navíc můžeme na této množině definovat násobení skalárem z  $\mathbb{K}$  takto:

$$\begin{aligned} [u] + [v] &= [u + v] \\ k[u] &= [ku] \end{aligned}$$

Tyto operace jsou nezávislé na výběru reprezentantů a není obtížné se přesvědčit, že z  $U/V$  vytvářejí vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$ .

Je-li  $W$  komplementární podprostor k  $V$ , tj.  $U = W \oplus V$ , pak projekce  $U \rightarrow U/V$  se zužuje na izomorfismus  $W \rightarrow U/V$ : ke každému  $u + V \in U/V$  hledejme vzor  $w \in W$  tak, že  $u + V = w + V$ , tj.  $u = w + v$  pro nějaký vektor  $v \in V$ ; podle definice přímého součtu lze toto jediným způsobem.

Je-li  $U$  konečněrozměrný prostor, pak

$$\dim U/V = \dim U - \dim V.$$

Důkaz je jednoduchý: Zvolme bázi  $v_1, \dots, v_k$  prostoru  $V$  a doplňme ji na bázi  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$  prostoru  $U$ . Stačí ukázat, že  $[v_{k+1}], \dots, [v_n]$  je báze prostoru  $U/V$ .

**Cvičení.** Dokažte předchozí tvrzení.

Označme  $p: U \rightarrow U/V$  surjektivní lineární zobrazení definované předpisem

$$p(u) = [u].$$

Toto zobrazení se nazývá projekce.

Nechť  $\varphi: U \rightarrow W$  je lineární zobrazení a nechť  $V \subseteq \ker \varphi$ . Potom existuje právě jedno lineární zobrazení  $\bar{\varphi}: U/V \rightarrow W$  takové, že

$$\varphi = \bar{\varphi} \circ p,$$

tedy že následující diagram komutuje

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & W \\ p \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ U/V & & \end{array}$$

$\bar{\varphi}$  musí být definováno předpisem

$$\bar{\varphi}([u]) = \varphi(u).$$

Díky tomu, že pro  $v \in V$  je  $\varphi(v) = 0$ , je pro  $u_1 \sim u_2$

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_1) + \varphi(u_1 - u_2) = \varphi(u_2)$$

a definice  $\bar{\varphi}$  nezávisí na výběru reprezentanta.

Nechť  $\varphi: U \rightarrow W$  je lineární zobrazení. Pak známá věta z algebry říká  $U/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi$ , což pro dimenze znamená  $\dim U - \dim \ker \varphi = \dim \text{im } \varphi$  (známe z dřívějšíka).

### 6.3. Prostory lineárních a multilineárních zobrazení

Lineární zobrazení z vektorového prostoru  $U$  do vektorového prostoru  $V$  vytvářejí vektorový prostor, který budeme označovat

$$\text{Hom}(U, V).$$

Důvodem pro toto označení je skutečnost, že lineární zobrazení se často nazývají homomorfismy vektorových prostorů.

Nechť  $U_1, \dots, U_q, V$  jsou vektorové prostory. Zobrazení

$$\varphi: U_1 \times \dots \times U_q \rightarrow V$$

se nazývá multilineární (nebo  $q$ -lineární), jestliže je lineární v každé své složce, tj.

$$\varphi(u_1, \dots, au_i + bv_i, \dots, u_n) = a\varphi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_q) + b\varphi(u_1, \dots, v_i, \dots, u_q)$$

Množina všech  $q$ -lineárních zobrazení z  $U_1 \times \dots \times U_q$  do  $V$  tvoří opět vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$ , který budeme označovat

$$\text{Lin}_q(U_1, \dots, U_q; V).$$

Sčítání a násobení skalárem se děje ve  $V$ , tj.

$$(a\varphi + b\psi)(u_1, \dots, u_q) = a\varphi(u_1, \dots, u_n) + b\psi(u_1, \dots, u_q).$$

Speciálně platí

$$\text{Lin}_1(U; V) = \text{Hom}(U, V).$$

**Příklad.** Na  $\mathbb{R}^3$  uvažujme lineární zobrazení  $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  zadaná předpisem

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3, \quad g(y_1, y_2, y_3) = y_1.$$

Ukážeme, že zobrazení

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y) = x_3 y_1$$

je bilineární. Platí

$$\varphi(ax + bz, y) = f(ax + bz) \cdot g(y) = (ax_3 + bz_3)y_1 = ax_3 y_1 + bz_3 y_1 = a\varphi(x, y) + b\varphi(z, y).$$

Důkaz pro linearitu ve druhé složce se provede obdobně.

cv **Cvičení.** Ukažte, že multilineární zobrazení jsou uzavřena na skládání.

#### 6.4. Duální prostor

Lineární zobrazení z  $U$  do  $\mathbb{K}$  se nazývají *lineární formy* na  $U$ , vektorový prostor všech lineárních forem se nazývá *duální vektorový prostor* k prostoru  $U$  a označuje se

$$U^* = \text{Hom}(U, \mathbb{K}).$$

**Věta 6.2** (o duální bázi). *Nechť  $U$  je vektorový prostor s bází  $(e_1, \dots, e_n)$ . Potom v duálním prostoru  $U^*$  existuje báze  $(f^1, \dots, f^n)$  taková, že*

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

*Tato báze se nazývá duální bázi k bázi  $(e_1, \dots, e_n)$ .*

*Důkaz.* Každý vektor  $u$  lze psát jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů báze

$$u = \sum_{i=1}^n a^i e_i.$$

Jelikož je  $f^j$  jednoznačně určena tím, že posílá  $e_j$  na 1 a zbylé bázové vektory na 0, dostáváme vztah  $f^j(u) = a^j$  jako  $j$ -tou souřadnici vektoru.

Nechť  $\eta \in U^*$  je libovolná lineární forma a hledejme  $b_j \in \mathbb{K}$  tak, aby  $\eta = \sum_{j=1}^n b_j f^j$ . Tato rovnost forem bude platit, právě když tomu tak bude po dosazení všech bázových vektorů  $e_i$ , tj. právě když pro každé  $i$  bude platit

$$\eta(e_i) = \sum_{j=1}^n b_j f^j(e_i) = b_i.$$

Tím jsme dokázali, že  $(f^1, \dots, f^n)$  je báze  $U^*$ . □

- \* *Poznámka.* Zabývejme se nyní krátce tím, co se stane pro  $U$  nekonečné dimenze. Zjevně formy  $f^j$  existovat budou a opět  $\eta = \sum_j b_j f^j$ , právě když  $b_i = \eta(e_i)$ . Přitom ale výraz napravo dává smysl pouze, pokud z těchto čísel bude pouze konečně mnoho nenulových. Ve výsledku tak každá forma má maximálně jedno vyjádření jako lineární kombinace  $f^j$ , a proto jsou  $f^j$  lineárně nezávislé a generují jistý podprostor  $U^*$ . Navíc k tomuto závěru stačí, aby byl  $e_i$  libovolný lineárně nezávislý systém vektorů (to je potřeba k tomu, aby formy  $f^j$  existovaly, nebudou však již jednoznačně určeny).

Z důkazu je dobré si zapamatovat, že souřadnice vektoru  $u$  v bázi  $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$  lze spočítat pomocí duální báze  $\alpha^* = (f^1, \dots, f^n)$ :

$$(u)_\alpha = (f^1(u), \dots, f^n(u))^T$$

a naopak souřadnice formy  $\eta$  v duální bázi  $\alpha^*$  lze spočítat pomocí báze  $\alpha$ :

$$(\eta)_{\alpha^*} = (\eta(e_1), \dots, \eta(e_n))$$

(v dalším je budeme zapisovat do řádků).

**Příklad.** Vektory v  $\mathbb{R}^n$  považujeme za  $n$ -tice reálných čísel ve formě sloupců. Prvky duálního prostoru  $(\mathbb{R}^n)^*$  budeme značit jako  $n$ -tice reálných čísel ve formě řádků (nakonec to jsou lineární zobrazení  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ). Tedy

$$u \in \mathbb{R}^3, \quad u = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \eta \in (\mathbb{R}^3)^*, \quad \eta = (y_1, y_2, y_3).$$

Vyčíslení formy  $\eta$  na vektoru  $u$  je potom maticové násobení

$$\eta(u) = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = y_1 x^1 + y_2 x^2 + y_3 x^3.$$

Nechť  $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$  je báze  $\mathbb{R}^n$ . Matice přechodu od  $\alpha$  ke standardní bázi  $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$  je  $(\text{id})_{\varepsilon, \alpha} = A$

$$(u_1, \dots, u_n) = (e_1, \dots, e_n)(\text{id})_{\varepsilon, \alpha}.$$

Duální báze k  $(e_1, \dots, e_n)$  je  $f^1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, f^n = (0, \dots, 0, 1)$  a duální báze  $(\eta^1, \dots, \eta^n)$  k  $(u_1, \dots, u_n)$  je určena řádky matice  $A^{-1}$ , neboť musí platit

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} \cdot (u_1, \dots, u_n) = (\eta^i(u_j)) = (\delta_j^i) = E.$$

*Poznámka.* Abstraktně lze předchozí úvahu provést pomocí duálních zobrazení takto: chápeme bázi jako zobrazení  $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , potom dualizací  $\beta(\text{id})_{\beta\alpha} = \alpha$  dostaneme vztah  $(\text{id})_{\beta\alpha}^* \beta^* = \alpha^*$ . Duální bázi  $\alpha'$  chápeme jako zobrazení  $\alpha' = (\alpha^*)^{-1}: (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow U^*$  a proto platí vztah  $\beta' = (\text{id})_{\beta\alpha} \alpha'$  (matice duálních zobrazení se skládají naopak).

**Důsledek 6.3** (o druhém duálu). *Nechť  $U$  je vektorový prostor konečné dimenze. Pro vektor  $u \in U$  efinojme lineární formu  $\text{ev}_u \in (U^*)^*$  na duálním prostoru  $U^*$  pomocí předpisu  $\text{ev}_u(\eta) = \eta(u)$ . Potom vzniklé zobrazení  $\text{ev}: U \rightarrow (U^*)^*$  je lineární izomorfismus.*

*Důkaz.* Podle předchozí věty k bázi  $(e_1, \dots, e_n)$  prostoru  $U$  lze najít duální bázi  $(f^1, \dots, f^n)$  prostoru  $U^*$ . Ukážeme, že  $(\text{ev}_{e_1}, \dots, \text{ev}_{e_n})$  tvoří duální bázi k  $(f^1, \dots, f^n)$ . Platí totiž

$$\text{ev}_{e_i}(f^j) = f^j(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Protože je zjevně  $\text{ev}$  lineární a převádí bázi na bázi, jedná se o izomorfismus. □

- \* *Poznámka.* Zabýváme se nyní krátce tím, co se stane pro  $U$  nekonečné dimenze. Jak jsme viděli, formy  $f^j$  jsou bází jistého podprostoru  $U^*$  a  $ev_{e_i}$  jsou k nim opět duální, takže jsou lineárně nezávislé. Zobrazení  $ev$  je tedy injektivní a  $U$  je izomorfní podprostoru  $U$  daného právě prvky tvaru  $ev_u$ .

Od tohoto okamžiku budeme považovat prostory  $U$  a  $(U^*)^*$  za totožné. Zobrazení  $(-, -): U^* \times U \rightarrow \mathbb{K}$  definované

$$(\eta, u) = \eta(u)$$

je bilineární a někdy se nazývá *dualita* nebo párování. Pomocí duality se dají vyjádřit podmínky pro duální bázi jako  $(f^j, e_i) = \delta_i^j$  a pro souřadnice platí symetrické vztahy  $(f^j, u) = u^j$ ,  $(\eta, e_i) = \eta_i$ .

### 6.5. Duální lineární zobrazení

Nechť  $\varphi: U \rightarrow V$  je lineární zobrazení. Zobrazení  $\varphi^*: V^* \rightarrow U^*$  definované pro  $\theta \in V^*$  předpisem  $\varphi^*(\theta) = \theta \circ \varphi$ , tj.

$$\varphi^*(\theta)(u) = \theta(\varphi(u))$$

se nazývá *duální lineární zobrazení* k zobrazení  $\varphi$ .

*Poznámka.* Pomocí dualit  $(-, -)_U: U^* \times U \rightarrow \mathbb{K}$  a  $(-, -)_V: V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$  lze definici psát

$$(\varphi^*(\theta), u)_U = (\theta, \varphi(u))_V,$$

což formálně připomíná definici adjungovaného zobrazení, kde skalární součiny jsou nahrazeny dualitami. Výhodou tohoto zápisu je jeho symetrie a lepší přehlednost.

Podobnost s definicí adjungovaného zobrazení není náhodná. Je-li totiž  $U$  reálný Eukleidovský vektorový prostor, je zobrazení

$$R: U \rightarrow U^*, \quad u \mapsto \langle u, - \rangle$$

izomorfismus – prostory mají stejnou dimenzi a injektivita plyne z toho, že  $\langle u, - \rangle = 0$  znamená zejména  $|u|^2 = \langle u, u \rangle = 0$ , tj.  $u = 0$ . Při této identifikaci  $R$  pak dualita vypadá

$$(Ru, v) = (\langle u, - \rangle, v) = \langle u, v \rangle,$$

tj. dualita je přesně skalární součin. Pro komplexní skalární součin je  $R$  izomorfismus  $\bar{U} \cong U^*$  a situace je o něco komplikovanější.

**Příklad.** Nechť  $\varphi: U \rightarrow U$  je zobrazení  $\varphi(u) = 3u$ . Vypočtěte  $\varphi^*: U^* \rightarrow U^*$  z definice. Platí

$$(\varphi^*(\theta))(u) = \theta(\varphi(u)) = \theta(3u) = 3\theta(u).$$

Tedy  $\varphi^*(\theta) = 3\theta$ .

Zabýváme se nyní souřadnicovým zápisem duálního zobrazení. Připomeňme, že vektory zapisujeme do sloupce, zatímco lineární formy do řádku a dualita je násobení matic. Definice duálního zobrazení  $\varphi^*(\eta) = \eta\varphi$  pak v souřadnicích dává  $(\varphi^*(\eta))_\alpha = (\eta)_\beta(\varphi)_{\beta\alpha}$  a je tedy dáno násobením maticí  $(\varphi)_{\beta\alpha}$  zprava.

### 6.6. Dualita a podprostory

Nechť  $U \subseteq V$  je vektorový podprostor a uvažujme vložení

$$\iota: U \hookrightarrow V$$

a k němu duální surjektivní zobrazení

$$\iota^*: V^* \rightarrow U^*,$$

kteřé je zřejmě dáno předpisem  $\eta \mapsto \eta|_U$ . Definujme

$$U^\perp = \ker \iota^* = \{\eta \in V^* \mid \forall u \in U: (\eta, u) = 0\},$$

kde podmínku  $(\eta, u) = 0$  si lze představovat jako „ $\eta \perp U$  neboli  $\eta \in U^\perp$ “; proto také tento podprostor duálního prostoru značíme tímto symbolem.

Přiřazení  $U \mapsto U^\perp$  zadává zobrazení

$$D_V: \{\text{podprostory } V\} \longrightarrow \{\text{podprostory } V^*\},$$

kteřé zjevně obrací uspořádání, tj. pokud  $U_0 \subseteq U_1$ , pak  $U_0^\perp \supseteq U_1^\perp$ . Navíc, pokud  $U$  má dimenzi  $d$ , pak  $U^\perp$  má dimenzi  $n - d$  (také říkáme, že má kodimenzi  $d$ ); to je proto, že je jádrem surjektivního zobrazení  $V^* \rightarrow U^*$  z  $n$ -rozměrného do  $d$ -rozměrného prostoru.

Naším dalším krokem bude ukázat, že zobrazení  $D_V$  je bijekce (a tedy antiizomorfismus uspořádaných množin – ve skutečnosti svazů). Zabývejme se proto tím, co se stane při druhé aplikaci „kolmého doplňku“. Geometrická intuice z Eukleidovských prostorů říká, že druhý kolmý doplněk musí nutně obsahovat původní prostor a ve skutečnosti se musí rovnat, protože mají stejné dimenze. Stejný argument funguje i obecně,

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V \mid \forall \eta \in U^\perp: (\eta, v) = 0\},$$

Protože se však všechny formy z  $U^\perp$  podle definice nulují na  $U$ , platí  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ . Zároveň mají oba prostory stejnou dimenzi, musí být tedy totožné,  $(U^\perp)^\perp = U$ .

**Věta 6.4.** *Přiřazení  $U \mapsto U^\perp$  určuje bijektivní zobrazení*

$$D_V: \{\text{podprostory } V\} \longrightarrow \{\text{podprostory } V^*\}, \quad U \mapsto U^\perp$$

s následujícími vlastnostmi

- $D_V$  převrací uspořádání,
- je-li  $U$  dimenze  $d$ , pak  $U^\perp$  je dimenze  $n - d$ ,
- $(U_0 \cap U_1)^\perp = U_0^\perp + U_1^\perp$ ,
- $(U_0 + U_1)^\perp = U_0^\perp \cap U_1^\perp$

□

*Poznámka.* Vše je důsledkem prvního bodu, dokonce i vztah mezi dimenzemi. Můžeme totiž vyčíslit dimenzi  $U$  jako délku  $d$  nejdelšího striktně rostoucího řetězce podprostorů  $0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_d = U$ .

Pěknou aplikací je popsání svazku všech rovin v prostoru procházejících danou přímkou  $p$ . Přejdem ke kolmým doplňkům to znamená popsat všechny přímky obsažené v rovině  $p^\perp$ . To je ale jednoduché – jejich směrové vektory jsou právě všechny nenulové prvky  $p^\perp$ . Pokud je  $p$  zadána implicitně jako řešení soustavy  $\alpha(v) = \beta(v) = 0$  dvou rovnic, je  $p^\perp = [\alpha, \beta]$  a přímka ležící v  $p^\perp$  je proto generovaná libovolnou jejich nenulovou lineární kombinací  $a\alpha + b\beta$ . Přejdem zpátky vidíme, že rovnice odpovídající roviny obsahující  $p$  je  $(a\alpha + b\beta)(v) = 0$ , ve výsledku tedy libovolná nenulová lineární kombinace definujících rovin přímky  $p$ .

Zabývejme se dále vztahem mezi podprostory zadanými implicitním a parametrickým popisem. Nechť je podprostor  $W \subseteq V^*$  zadán parametricky jako  $W = [\eta^1, \dots, \eta^k]$ . Potom

$$W^\perp = \{v \in V \mid \forall \eta \in W: (\eta, v) = 0\} = \{v \in V \mid (\eta^1, v) = \dots = (\eta^k, v) = 0\}.$$

To je ale popis  $W^\perp$  jako prostoru řešení soustavy lineárních rovnic  $\eta^1(v) = 0, \dots, \eta^k(v) = 0$ , tedy implicitní popis. Stejný princip funguje naopak. Je-li  $U = [v_1, \dots, v_d]$ , pak

$$U^\perp = \{\eta \in V^* \mid (\eta, v_1) = \dots = (\eta, v_d) = 0\}$$

Formálně tak převod parametrického popisu na implicitní je elementární. Parametrický popis  $U$  je ekvivalentní implicitnímu popisu  $U^\perp$ , ten lze pomocí vyřešení soustavy s parametry převést na parametrický popis, který je zpětně ekvivalentní implicitnímu popisu  $U$ .

**Tvrzení 6.5.** *Nechť jsou na  $V$  zadány formy  $\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^k$ . Jestliže libovolné  $v \in V$  splňující*

$$\eta^1(v) = \dots = \eta^k(v) = 0$$

*splňuje zároveň  $\eta^0(v) = 0$ , pak  $\eta^0 \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$ .*

*Poznámka.* Opačná implikace je triviální: je-li  $\eta^0 \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$ , pak z  $\eta^1(v) = \dots = \eta^k(v) = 0$  plyne jednoduše  $\eta^0(v) = 0$ .

V případě implikace ( $\eta^1(v) = \dots = \eta^k(v) = 0$ )  $\Rightarrow$  ( $\eta^0(v) = 0$ ) můžeme mluvit o tom, že rovnice  $\eta^0(v) = 0$  je logickým důsledkem zmíněné soustavy. Věta tedy říká, že pokud je  $\eta^0(v) = 0$  logickým důsledkem, je ve skutečnosti „algebraickým“ důsledkem; lze odvodit ze soustavy tím nejtriviálnějším možným způsobem – je kombinací rovnic soustavy. V jistém smyslu se jedná o úplnost jistého logického systému: implikace, které platí, jsou právě ty, které lze dokázat (pomocí zmíněného jednoduchého pravidla).

*Důkaz.* Implikaci lze vyjádřit jako

$$[\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^k]^\perp = [\eta^1, \dots, \eta^k]^\perp.$$

Druhou aplikací  $D_V$  dostáváme  $[\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^k] = [\eta^1, \dots, \eta^k]$  a zejména  $\eta^0 \in [\eta^1, \dots, \eta^k]$ .  $\square$

Následující tvrzení je dobře známe z teorie řešení soustavy lineárních rovnic a lze jej vyvodit z Gaussovy eliminační metody. Uvádíme zde alternativní důkaz pomocí duality.

**Tvrzení 6.6.** *Soustava rovnic  $Ax + b = 0$  nemá řešení, právě když existuje lineární kombinace jejích řádků (tedy rovnic) tvaru  $1 = 0$ .*

*Důkaz.* Trik spočívá v „projektivizaci“ soustavy. Původní soustava nemá řešení, právě když každé řešení soustavy  $Ax + bt = 0$  splňuje také  $t = 0$ . Podle předchozího tvrzení to nastane právě tehdy, když forma zadaná řádkem  $(0, \dots, 0, 1)$ , tj.  $(0 \mid 1)$  je lineární kombinací řádků rozšířené matice  $(A \mid b)$ .  $\square$

*Poznámka.* Obecné vyjádření duality:  $(-, -): U \times V \rightarrow \mathbb{K}$  bilineární zobrazení takové, že  $U \rightarrow V^*$ ,  $u \mapsto (u, -)$  a  $V \rightarrow U^*$ ,  $v \mapsto (-, v)$  jsou izomorfismy. Tenzorový přístup: existují  $\varepsilon: U \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$  a  $\delta: \mathbb{K} \rightarrow V \otimes U$  takové, že  $V \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}} V \otimes U \otimes V \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} V$  a  $U \xrightarrow{\text{id} \otimes \delta} U \otimes V \otimes U \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} U$  jsou identická zobrazení.



### 6.7. Prostory multilineárních forem

Zabývejme se nyní multilineárními formami. Pro jednoduchost zápisu se omezíme pouze na případ  $\text{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})$ . Necht'  $\eta \in U^*$ ,  $\theta \in V^*$  jsou lineární formy. Definujme bilineární formu

$$\theta \odot \eta: U \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad (\theta \odot \eta)(u, v) = \eta(u) \cdot \theta(v)$$

(součin funkčních hodnot – prvků tělesa  $\mathbb{K}$ ); všimněte si, že argumenty se dosazují do lineárních forem v opačném pořadí než je pořadí jejich zápisu – toto bude naše konvence, která není úplně běžná.

*Poznámka.* Při práci s bilineárními formami a později s tenzorovým součinem je výhodnější se vzdát uspořádání prvků báze a pracovat s neuspořádanými bázemi. V dalším budeme zkracovat na „ $\{e_i\}$  je báze  $U$ “.

**Lemma 6.7.** *Necht'  $\{e_i\}$  je báze  $U$ ,  $\{\tilde{e}_j\}$  báze  $V^*$  s příslušnými duálními bázemi  $\{f^i\}$  a  $\{\tilde{f}^j\}$ . Potom množina  $\{\tilde{f}^j \odot f^i \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$  tvoří bázi  $\text{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})$ .*

*Důkaz.* Pointou důkazu je, že dvě bilineární formy se rovnají, právě když dávají stejné hodnoty na všech dvojicích  $(e_i, \tilde{e}_j)$  bázevých vektorů (to by mělo být čtenáři známo, případně by to měl zvládnout dokázat sám). Pokusme se napsat bilineární formu  $\Phi$  jako kombinaci

$$\Phi = \sum_{r,s} \Phi_{rs} (\tilde{f}^s \odot f^r).$$

Tato rovnost bude podle předchozího splněna, právě když pro každé  $i, j$  bude platit

$$\Phi(e_i, \tilde{e}_j) = \sum_{r,s} \Phi_{rs} (\tilde{f}^s \odot f^r)(e_i, \tilde{e}_j) = \sum_{r,s} \Phi_{rs} \underbrace{f^r(e_i)}_{\delta_i^r} \underbrace{\tilde{f}^s(\tilde{e}_j)}_{\delta_j^s} = \Phi_{ij}.$$

Je tedy vidět, že koeficienty existují a to jediné:  $\Phi_{ij} = \Phi(e_i, \tilde{e}_j)$ . To ale přesně znamená, že daná množina je báze.  $\square$

*Poznámka.* Předchozí důkaz je analogií vztahu  $\eta_i = \eta(e_i)$  pro souřadnice formy – souřadnice bilineární formy jsou také dány hodnotami na prvcích báze,  $\Phi_{ij} = \Phi(e_i, e_j)$ .

## 7. Tenzorový součin

### 7.1. Tenzorový součin vektorových prostorů

Pointa tenzorového součinu je, že chceme převést bilineární zobrazení na lineární. Konkrétně bilineární zobrazení  $U \times V \rightarrow W$  bude ekvivalentní lineárnímu zobrazení  $U \otimes V \rightarrow W$ . Symbolicky

$$\text{Lin}_2(U, V; W) \cong \text{Hom}(U \otimes V, W),$$

kde však říkáme víc než v předchozím – vyžadujeme, aby se jednalo o izomorfismus vektorových prostorů (a ne jen o bijekci). Tímto vztahem je tenzorový součin určen jednoznačně až na izomorfismus a ve většině aplikací není potřeba znát přesnou definici a vystačíme si s touto vlastností. Pokusme se s její pomocí „odvodit“ definici tenzorového součinu. Dosadíme do uvedeného vztahu  $W = \mathbb{K}$ . Dostáváme

$$\text{Lin}_2(U, V; \mathbb{K}) \cong (U \otimes V)^*.$$

Budeme-li nyní předpokládat, že má  $U \otimes V$  konečnou dimenzi, lze psát

$$U \otimes V \cong \text{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})^*$$

Chceme-li tedy dostat tomu, že tenzorový součin převádí bilineární zobrazení na lineární, jsme vedeni k následujícímu:

**Definice 7.1.** Nechť  $U$  a  $V$  jsou vektorové prostory konečné dimenze. Definujeme jejich *tenzorový součin*  $U \otimes V \stackrel{\text{def}}{=} \text{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})^*$ .

Prvek tenzorového součinu  $t \in U \otimes V$  nazýváme *tenzor*.

(V analogii k předchozímu výkladu pro lineární formy jde o verzi „druhého duálu“ pro více činitelů.)

Definujeme nyní bilineární zobrazení  $t: U \times V \rightarrow U \otimes V$  předpisem

$$t(u, v): \Phi \mapsto \Phi(u, v),$$

jedná se tedy o „evaluaci“ (viz srovnání druhého duálu s původním vektorovým prostorem). V následujícím budeme značit  $u \otimes v = t(u, v)$  a je to tedy zobrazení, které každou bilineární formu posílá na její hodnotu na dvojici  $(u, v)$ .

**Lemma 7.2.** Zobrazení  $t$  je bilineární, tj.

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2) \otimes v = a_1 \cdot u_1 \otimes v + a_2 \cdot u_2 \otimes v$$

a analogicky pro druhou složku.

*Důkaz.* Levá strana je dána evaluací

$$\Phi \mapsto \Phi(a_1 u_1 + a_2 u_2, v),$$

zatímco pravá je dána jako lineární kombinace evaluací, tedy

$$\Phi \mapsto a_1 \Phi(u_1, v) + a_2 \Phi(u_2, v).$$

Tyto dva výrazy se rovnají díky bilinearitě  $\Phi$ . □

Tenzory tvaru  $u \otimes v$  nazýváme *jednoduché*. Není pravda, že by každý tenzor byl jednoduchý, ale jednoduché tenzory prostor  $U \otimes V$  generují – to je důsledek následující věty.

**Věta 7.3.** *Nechť  $\{e_i\}$  je báze prostoru  $U$  a  $\{\tilde{e}_j\}$  báze prostoru  $V$ . Pak  $\{e_i \otimes \tilde{e}_j \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$  tvoří bázi prostoru  $U \otimes V$ .*

*Důkaz.* Ukážeme, že  $\{e_i \otimes \tilde{e}_j\}$  tvoří duální bázi k bázi  $\{\tilde{f}^j \odot f^i\}$  z Lemmatu 6.7. Stačí tedy počítat

$$(e_i \otimes \tilde{e}_j)(\tilde{f}^s \odot f^r) = (\tilde{f}^s \odot f^r)(e_i, \tilde{e}_j) = f^r(e_i)\tilde{f}^s(\tilde{e}_j) = \delta_i^r \delta_j^s,$$

což je 0 s výjimkou případu  $i = r, j = s$ . To je ale přesně podmínka na duální bázi.  $\square$

- \* *Poznámka.* Zabývejme se nyní krátce tím, co se stane pro  $U$  nebo  $V$  nekonečné dimenze. Opět platí, že  $e_i \otimes \tilde{e}_j$  jsou duální k  $\tilde{f}^j \odot f^i$ , takže  $e_i \otimes \tilde{e}_j$  jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi podprostoru  $\text{Lin}_2(U, V; \mathbb{K})^*$ , který budeme označovat  $U \otimes V$ . Pro tuto definici platí předchozí věta beze změny. V dalším nebudeme konkrétní definici  $U \otimes V$  potřebovat a vystačíme s předchozí větou; zejména bude vše platit i pro prostory nekonečné dimenze.

## 7.2. Univerzální vlastnost tenzorového součinu

Vraťme se nyní ke vztahu, který jsme použili k motivaci definice tenzorového součinu a ověříme, že opravdu platí. Připomeňme kanonické zobrazení  $t: U \times V \rightarrow U \otimes V$  dané  $(u, v) \mapsto u \otimes v$ .

**Věta 7.4** (Univerzální vlastnost tenzorového součinu). *Nechť  $F: U \times V \rightarrow W$  je bilineární zobrazení. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení  $\varphi: U \otimes V \rightarrow W$  takové, že*

$$\varphi(u \otimes v) = F(u, v),$$

*tj. takové, že následující diagram komutuje*

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{F} & W \\ \downarrow t & \searrow \exists! \varphi & \uparrow \\ U \otimes V & & \end{array}$$

*Důkaz.* Jsme nuceni položit  $\varphi(e_i \otimes \tilde{e}_j) = F(e_i, \tilde{e}_j)$ . Jelikož takové tenzorové součiny tvoří bázi, je tímto  $\varphi$  díky linearitě jednoznačně určeno. Zbývá ukázat, že podmínka opravdu platí. Přitom jsou ale obě  $F, \varphi \circ t$  bilineární zobrazení  $U \times V \rightarrow W$ . Podle předchozího se shodují na dvojicích bázevých vektorů a musí tedy být stejné.  $\square$

- \* **Důsledek 7.5.** *Existuje přirozený izomorfismus*

$$\text{Hom}(U \otimes V, W) \xrightarrow{\cong} \text{Lin}_2(U, V; W),$$

*daný  $\varphi \mapsto \varphi \circ t$ .*

*Poznámka.* Ještě je to izomorfní  $\text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W))$ , ale to je asi napoprvé zbytečně komplikované.

Následující tvrzení říká, že tenzorový součin je svou univerzální vlastností určen až na izomorfismus jednoznačně.

- \* **Věta 7.6** (o jednoznačnosti tenzorového součinu). *Nechť  $S$  je vektorový prostor a necht'  $s: U_1 \times \cdots \times U_n \rightarrow S$  je  $n$ -lineární zobrazení, které má stejnou vlastnost jako zobrazení  $t: U_1 \times \cdots \times U_n \rightarrow U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$  z předchozí věty. Potom existuje právě jeden izomorfismus  $\sigma: U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \rightarrow S$  a k němu inverzní  $\tau: S \rightarrow U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$  tak, že komutuje diagram*

$$\begin{array}{ccc} U_1 \otimes \cdots \otimes U_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma} \\ \xleftarrow{\tau} \end{array} & S \\ \uparrow t & \nearrow s & \\ U_1 \times \cdots \times U_n & & \end{array}$$

*Důkaz.* Provedeme pouze náznak. Existence lineárního zobrazení  $\sigma$  plyne z univerzální vlastnosti  $t$ , existence lineárního zobrazení  $\tau$  plyne z univerzální vlastnosti zobrazení  $s$ . Identity  $\tau \circ \sigma = \text{id}$ ,  $\sigma \circ \tau = \text{id}$  se dokáží dalším použitím předchozí věty (především jejího tvrzení o jednoznačnosti).  $\square$

*Poznámka.* Existují i jiné definice tenzorového součinu vektorových prostorů než je ta, kterou jsme použili. Podle předchozího tvrzení lze však vždy ukázat, že jsou na prostorech konečné dimenze ekvivalentní s naší definicí.

Jedna z možností, která funguje i pro  $U, V$  nekonečné dimenze, je

$$U \otimes V = T/T_0,$$

kde  $T$  je vektorový prostor všech formálních lineárních kombinací dvojic  $(u, v) \in U \times V$  (pro  $\mathbb{K}$  nekonečné a  $U, V$  netriviální nemá  $T$  konečnou dimenzi!), tj.  $T$  je volný vektorový prostor na množině  $U \times V$ , a  $T_0$  je jeho podprostor generovaný prvky

$$\begin{aligned} (au_1 + bu_2, v) - a(u_1, v) - b(u_2, v) \\ (u, av_1 + bv_2) - a(u, v_1) - b(u, v_2) \end{aligned}$$

Zobrazení  $t: U \times V \rightarrow T/T_0$  je  $t(u, v) = [(u, v)]$ .

### 7.3. Asociativita a komutativita tenzorového součinu

Uvažujme zobrazení  $U_1 \times U_2 \times U_3 \rightarrow (U_1 \otimes U_2) \otimes U_3$ ,  $(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1 \otimes u_2) \otimes u_3$ . To je zřejmě lineární v každé složce (protože tenzorový součin vektorů je lineární v každé složce) a díky univerzální vlastnosti tenzorového součinu tak existuje jediné lineární zobrazení

$$\begin{aligned} \alpha: U_1 \otimes U_2 \otimes U_3 &\longrightarrow (U_1 \otimes U_2) \otimes U_3, \\ u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 &\longmapsto (u_1 \otimes u_2) \otimes u_3. \end{aligned}$$

Jedná se o izomorfismus, protože posílá bázi na bázi. Obdobně pro každou permutaci  $\sigma$  množiny  $\{1, \dots, n\}$  existuje právě jeden lineární izomorfismus

$$\begin{aligned} \rho_\sigma: U_1 \otimes \cdots \otimes U_n &\longrightarrow U_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes U_{\sigma(n)}, \\ u_1 \otimes \cdots \otimes u_n &\longmapsto u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Jednotkou pro tenzorový součin je těleso  $\mathbb{K}$ , tj. platí

$$\mathbb{K} \otimes U \cong U.$$

Tento izomorfismus je předepsán  $k \otimes u \mapsto ku$  (skalární násobení v  $U$ ).

*Poznámka.* Ještě distributivita a kompatibilita s kvocienty. Ještě vektor jako zobrazení  $\mathbb{K} \rightarrow U$  a forma jako zobrazení  $U \rightarrow \mathbb{K}$ .

#### 7.4. Tenzorový součin lineárních zobrazení

Nechť  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$  jsou lineární zobrazení. Potom zobrazení

$$U_1 \times \cdots \times U_n \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,$$

definované předpisem  $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \varphi_1(u_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(u_n)$ , je  $n$ -lineární a podle věty o univerzální vlastnosti tenzorového součinu existuje právě jedno lineární zobrazení

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n: U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

takové, že

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = \varphi_1(u_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(u_n).$$

Zobrazení  $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$  nazýváme *tenzorovým součinem* lineárních zobrazení  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

#### 7.5. Tenzorový součin a dualita

**Tvrzení 7.7.** *Nechť  $U$  a  $V$  mají konečnou dimenzi. Pak zobrazení*

$$V^* \otimes U^* \rightarrow \text{Lin}_2(U, V; \mathbb{K}) \cong (U \otimes V)^*$$

*dané předpisem  $\theta \otimes \eta \mapsto \eta \odot \theta$  je izomorfismus.*

*Důkaz.* Zobrazení převádí bázi  $\tilde{f}^j \otimes f^i$  na bázi  $\tilde{f}^j \odot f^i$  (ve druhém vyjádření jsou pak obrazy  $\tilde{f}^j \otimes f^i$  duální k  $e^i \otimes \tilde{e}^j$ ).  $\square$

Jakožto zobrazení  $U \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$  je obraz tenzoru  $\theta \otimes \eta$  dán předpisem  $u \otimes v \mapsto \eta(u) \cdot \theta(v)$  a lze jej tedy popsat jako kompozici

$$U \otimes V \xrightarrow{\eta \otimes \theta} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K},$$

kde přirozený izomorfismus  $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}$  je dán předpisem  $a \otimes b \mapsto ab$ .

#### 7.6. Izomorfismus mezi $\text{Hom}(U, V)$ a $V \otimes U^*$

Uvažujme bilineární zobrazení

$$V \times U^* \rightarrow \text{Hom}(U, V)$$

definované předpisem

$$(v, \eta) \mapsto v \cdot \eta$$

kde  $v \cdot \eta$  je lineární zobrazení  $u \mapsto v \cdot \eta(u)$  (skalární násobek vektoru  $v$ ). V souřadnicích je toto zobrazení opět dáno násobením matic, tentokrát v opačném pořadí než u evaluace.

Podle univerzální vlastnosti tenzorového součinu toto zobrazení indukuje lineární zobrazení

$$V \otimes U^* \rightarrow \text{Hom}(U, V).$$

**Věta 7.8.** *Je-li  $U$  konečné dimenze, pak je výše uvedeně zobrazení izomorfismus.*

## 7. Tenzorový součin

*Důkaz.* Necht'  $\alpha = (e_j)$  je báze  $U$  s duální bází  $(f^j)$  a necht'  $\beta = (\tilde{e}_i)$  je báze prostoru  $V$ . Ukážeme, že ke každému  $\varphi: U \rightarrow V$  existuje jediný vzor, ten si označme

$$\sum_{i,j} (\tilde{e}_i \otimes f^j) a_j^i$$

Jeho obraz je  $\sum_{i,j} (\tilde{e}_i \cdot f^j) a_j^i$  a stačí porovnat hodnoty na bázových vektorech  $e_s$ :

$$\varphi(e_s) = \sum_{i,j} \tilde{e}_i \cdot f^j(e_s) a_j^i = \sum_i \tilde{e}_i \cdot a_s^i.$$

Dostáváme tak jediné řešení:  $a_s^i$  musí být  $i$ -tá souřadnice  $\varphi(e_s)$ . Zejména je tedy  $a_s^i$  rovno prvku matice zobrazení  $\varphi$ ,  $a_s^i = ((\varphi)_{\beta\alpha})_{is}$ .  $\square$

*Poznámka.* V souřadnicích lze identifikovat  $\text{Hom}(U, V)$  s prostorem matic  $m \times n$ . Zobrazení z předchozí věty pak posílá  $\tilde{e}_i \otimes f^j$  na matici  $E_i^j$ , která má jediný nenulový prvek na místě  $(i, j)$  roven 1. Zjevně matice  $E_i^j$  tvoří bázi prostoru všech matic, což dává alternativní důkaz předchozí věty.

Z předchozí věty je dobře vidět, že většina tenzorů není „jednoduchých“, tj. tvaru  $v \otimes \eta$ . Takovým nenulovým tenzorům totiž odpovídají přesně zobrazení  $U \rightarrow V$  hodnoti 1, neboť jejich obraz je právě podprostor generovaný  $v$ . Ve skutečnosti má ale většina zobrazení maximální hodnot  $\min\{\dim U, \dim V\}$ .

cv **Cvičení.** Jaký je vzor  $\text{id} \in \text{Hom}(U, U)$ ?

### 7.7. Tenzorová algebra vektorového prostoru

**Definice 7.9.** *Algebrou* rozumíme vektorový prostor  $A$ , který je současně okruhem a to takovým způsobem, že násobení  $A \times A \rightarrow A$  je bilineární. Alternativně tedy můžeme psát násobení jako lineární zobrazení  $A \otimes A \rightarrow A$ .

Známe již poměrně dost příkladů algeber – algebru čtvercových matic, algebru komplexních čísel (obecněji libovolné rozšíření těles), za chvíli poznáme algebru kvaternionů.

Tenzorový součin  $p$  kopií duálního prostoru  $U^*$  a  $q$  kopií prostoru  $U$  se označuje

$$T_p^q U = \underbrace{U \otimes \dots \otimes U}_q \otimes \underbrace{U^* \otimes \dots \otimes U^*}_p.$$

Jeho prvky se nazývají *tenzory typu*  $(p, q)$ . Díky Větě 7.8 je  $T_p^q U \cong \text{Hom}(U^{\otimes p}, U^{\otimes q})$ . Naším dalším cílem bude z těchto prostorů vyrobit tzv. tenzorovou algebru vektorového prostoru  $U$ .

Prvně definujeme násobení

$$\underbrace{U^{\otimes q_1} \otimes (U^*)^{\otimes p_1}}_{T_{p_1}^{q_1} U} \otimes \underbrace{U^{\otimes q_2} \otimes (U^*)^{\otimes p_2}}_{T_{p_2}^{q_2} U} \xrightarrow{\rho(23)} \underbrace{U^{\otimes q_1} \otimes U^{\otimes q_2} \otimes (U^*)^{\otimes p_1} \otimes (U^*)^{\otimes p_2}}_{T_{p_1+p_2}^{q_1+q_2} U},$$

tj. součinem tenzoru typu  $(p_1, q_1)$  a tenzoru typu  $(p_2, q_2)$  je tenzor typu  $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ , konkrétně

$$\begin{aligned} & ((u_1 \otimes \dots \otimes u_{q_1}) \otimes (\eta^1 \otimes \dots \otimes \eta^{p_1})) \otimes ((v_1 \otimes \dots \otimes v_{q_2}) \otimes (\theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^{p_2})) \mapsto \\ & \mapsto (u_1 \otimes \dots \otimes u_{q_1} \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{q_2}) \otimes (\eta^1 \otimes \dots \otimes \eta^{p_1} \otimes \theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^{p_2}) \end{aligned}$$

- \* Abychom z jednotlivých prostorů  $T_p^q U$  a násobení mezi nimi vyrobili jedinou algebru, je nutné tyto prostory dát nějakým způsobem dohromady. K tomu nám poslouží pojem direktního součtu, tentokrát ovšem pro nekonečný počet sčítanců (sjednocení vektorových prostorů není vektorový prostor). Pro vektorové prostory  $V_i$ ,  $i \in I$ , položme

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \left\{ (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \mid v_i \text{ je nenulové pouze pro konečně mnoho } i \in I \right\}.$$

Budeme identifikovat  $v \in V_j$  s prvkem  $(v_i)_{i \in I}$  takovým, že  $v_j = v$  a ostatní komponenty jsou nulové. Pro  $v = (v_i)_{i \in I}$  s nenulovými složkami  $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$  platí  $v = v_{i_1} + \dots + v_{i_n}$  a je tedy direktní součet generován jednotlivými sčítanci  $V_i$ . Zřejmě je toto vyjádření navíc jednoznačné a tedy lineární zobrazení  $\bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow W$  je jednoznačně určeno svými zúženými  $V_i \rightarrow W$ , kterážto mohou být libovolná lineární zobrazení.

- \* Položme  $T_0^0 U = \mathbb{K}$ . Potom *tenzorová algebra* vektorového prostoru  $U$  je direktní součet vektorových prostorů

$$T_*^* U = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} T_p^q U$$

To je opět vektorový prostor, i když nekonečné dimenze. Násobení na  $T_*^* U$  je jednoznačně určeno tím, že má být bilineární a svým chováním na jednotlivých  $T_p^q U$ .

**Příklad.** Součinem tenzorů

$$2f^1 \otimes u_1 \otimes u_2 - 3f^2 \otimes u_3 \otimes u_3, \quad 4f^3 \otimes u_3 - f^2 \otimes u_1$$

je tenzor

$$\begin{aligned} (2f^1 \otimes u_1 \otimes u_2 - 3f^2 \otimes u_3 \otimes u_3) \otimes (4f^3 \otimes u_3 - f^2 \otimes u_1) &= \\ &= 8f^1 \otimes f^3 \otimes u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 - 2f^1 \otimes f^2 \otimes u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 \\ &\quad - 12f^2 \otimes f^3 \otimes u_3 \otimes u_3 \otimes u_3 + 3f^2 \otimes f^2 \otimes u_3 \otimes u_3 \otimes u_1. \end{aligned}$$

## 7.8. Souřadnice tenzorů

Nechť  $\alpha = \{e_i\}$  je báze prostoru  $U$  a  $\alpha^* = \{f^j\}$  duální báze prostoru  $U^*$ . Potom všechny tenzory tvaru

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_p}$$

tvoří bázi prostoru  $T_p^q(U)$  a každý tenzor  $t \in T_p^q(U)$  lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_q \\ j_1, \dots, j_p}} t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \cdot e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_p}.$$

Čísla  $t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \in \mathbb{K}$  nazýváme souřadnicemi tenzoru  $t \in T_p^q(U)$  v bázi  $\alpha$ . Všimněte si, že dolní index  $p$  značí počet dolních indexů, zatímco horní index  $q$  značí počet horních indexů u souřadnic.

Každý vektor  $u \in U$  je tenzorem typu  $(0, 1)$ , neboť

$$T_0^1(U) = U.$$

Jeho souřadnice v bázi  $\alpha$  budeme zapisovat pomocí horních indexů

$$u = \sum_{i=1}^n a^i e_i.$$

Každá lineární forma  $\eta \in U^*$  je tenzorem typu  $(1, 0)$ , neboť

$$T_1^0(U) = U^*.$$

Její souřadnice v bázi  $\alpha$  budeme zapisovat pomocí dolních indexů

$$\eta = \sum_{j=1}^n a_j f^j.$$

Každá bilineární forma  $g$  na  $U$  je tenzorem typu  $(2, 0)$ , neboť

$$T_2^0(U) = U^* \otimes U^* \simeq \text{Lin}_2(U \times U, \mathbb{K}).$$

Její souřadnice v bázi  $\alpha$  budeme zapisovat pomocí dolních indexů

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} f^i \otimes f^j.$$

Každé lineární zobrazení  $\varphi: U \rightarrow U$  je tenzorem typu  $(1, 1)$ , neboť

$$T_1^1(U) = U \otimes U^* \simeq \text{Hom}(U, U).$$

Jeho souřadnice v bázi  $\alpha$  budeme zapisovat takto:

$$\varphi = \sum_{i,j} a_j^i e_i \otimes f^j.$$

Ukážeme, že matice lineárního zobrazení  $\varphi: U \rightarrow U$  v bázi  $\alpha$  je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (a_j^i)_{i,j=1}^n,$$

kde  $i$  označuje řádek a  $j$  sloupec. Platí totiž, že v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci matice  $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$  je  $i$ -tá souřadnice vektoru  $\varphi(e_j)$ , tj.

$$\begin{aligned} f^i(\varphi(e_j)) &= f^i\left(\sum_{r,s} a_s^r e_r \otimes f^s\right)(e_j) \\ &= f^i\left(\sum_{r,s} a_s^r e_r f^s(r_j)\right) \\ &= \sum_{r,s} a_s^r f^s(e_j) f^i(e_r) = a_j^i \end{aligned}$$

Od této chvíle budeme tedy v kapitole o multilineární algebře značit matice zobrazení jako  $(a_j^i)$ , kde  $i$  značí řádek a  $j$  sloupec.



Násobení tenzorů lze v souřadnicích popsat takto:

$$(t \otimes s)_{j_1 \dots j_{p_1+p_2}}^{i_1 \dots i_{q_1+q_2}} = t_{j_1 \dots j_{p_1}}^{i_1 \dots i_{q_1}} s_{j_{p_1+1} \dots j_{p_1+p_2}}^{i_{q_1+1} \dots i_{q_1+q_2}}.$$

Vyčíslení bilineárního zobrazení  $g: U \times U \rightarrow \mathbb{K}$  na dvojici vektorů  $u$  a  $v$  je postupně součin tenzorů  $g \otimes u \otimes v$  a následná kontrakce prvních a druhých složek (tj. složení s evaluací  $U \otimes U^* \rightarrow \mathbb{K}$ ). V souřadnicích

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \left( \sum g_{ij} f^i \otimes f^j \right) \left( \sum a^s e_s, \sum b^t e_t \right) \\ &= \sum_{i,j,t,s} g_{ij} a^s b^t f^i(e_s) f^j(e_t) = \sum_{i,j} g_{ij} a^i b^j. \end{aligned}$$

Vyčíslení lineárního zobrazení  $\varphi: U \rightarrow U$  na vektoru  $u \in U$  je postupně součin tenzorů  $\varphi \otimes u \in U \otimes U^* \otimes U$  a kontrakce mezi druhou a první složkou. V souřadnicích

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \left( \sum_{i,j} a_j^i e_i \otimes f^j \right) \left( \sum_s x^s e_s \right) \\ &= \sum_{i,j,s} a_j^i x^s f^j(e_s) e_i = \sum_i \left( \sum_j a_j^i x^j \right) e_i \end{aligned}$$

Souřadnice výsledného vektoru jsou tedy  $\sum_j a_j^i x^j$ .

Kroneckerův tenzor  $\delta$  je prvkem  $U \otimes U^*$ , který odpovídá identickému zobrazení z  $\text{Hom}(U, U)$ . Jeho souřadnice v libovolné bázi jsou

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

tj.  $\delta = \sum_i e_i \otimes f^i$ .

## cv 7.9. Grafický kalkulus

Ve cvičení jsme reprezentovali tenzory pomocí obrázků, dále pak jejich tenzorový součin, identitu, evaluaci, skládání, atd.

Základní identity jsou

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\delta \otimes \text{id}} & U \otimes U^* \otimes U & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & U \\ U^* & \xrightarrow{\text{id} \otimes \delta} & U^* \otimes U \otimes U^* & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & U^* \end{array}$$

Díky nim lze přecházet mezi zobrazeními  $U^{\otimes p} \rightarrow U^{\otimes q}$  a tenzory z  $T_p^q U$ . Dále jsme definovali stopu zobrazení, tj. prvku  $T_1^1 U$  jako napojení výstupu do vstupu (kontrakce).

## 7.10. Souřadnice tenzorů při změně báze

Nechť  $\alpha = \{e_i\}$  je báze prostoru  $U$  s duální bází  $\alpha^* = \{f^j\}$  prostoru  $U^*$  a nechť  $\beta = \{\tilde{e}_i\}$  je jiná báze prostoru  $U$  s duální bází  $\beta^* = \{\tilde{f}^j\}$ . Nechť  $A = (a_j^i)$ ,  $i$  značí řádky,  $j$  značí sloupce, je matice přechodu od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$ , tj.  $A = (\text{id})_{\beta\alpha}$ ,

$$(e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)A.$$

Dále nechť

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \tilde{f}^1 \\ \vdots \\ \tilde{f}^n \end{pmatrix}.$$

Dualita potom říká

$$E = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = B \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{f}^1 \\ \vdots \\ \tilde{f}^n \end{pmatrix} (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)}_E A,$$

díky čemuž  $B = A^{-1}$ . Označíme-li  $B = (b_j^i)$ , pak dostáváme vztahy

$$e_k = \sum_i \tilde{e}_i a_k^i, \quad f^l = \sum_j b_j^l \tilde{f}^j,$$

jejichž dosazením do vztahu definujícího souřadnice tenzoru dostaneme následující větu.

**Věta 7.10.** *Nechť  $t \in T_p^q(U)$  je tenzor o souřadnicích  $t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$  v bázi  $\alpha$ . Jeho souřadnice v bázi  $\beta$  jsou při použití sumační konvence*

$$\tilde{t}_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2} \dots a_{k_q}^{i_q} t_{l_1 l_2 \dots l_p}^{k_1 k_2 \dots k_q} b_{j_1}^{l_1} b_{j_2}^{l_2} \dots b_{j_p}^{l_p}$$

(Sčítáme tedy přes všechny indexy  $k_1, \dots, k_q, l_1, \dots, l_p$ .) □

**Příklad.** Nechť  $u$  je vektor se souřadnicemi  $x^i$  v bázi  $\alpha$  a  $\tilde{x}^i$  v bázi  $\beta$ . Podle předchozí věty

$$\tilde{x}^i = \sum_k a_k^i x^k$$

Tedy

$$(u)_\beta = A(u)_\alpha = (\text{id})_{\beta\alpha}(u)_\alpha,$$

což je nám známo již z dřívějších.

**Příklad.** Nechť  $f$  je lineární forma se souřadnicemi  $y_j$  v bázi  $\alpha^*$  a souřadnicemi  $\tilde{y}_j$  v bázi  $\beta^*$ . Podle předchozí věty

$$\tilde{y}_j = \sum_l y_l b_j^l$$

Tedy

$$(f)_{\beta^*} = (f)_{\alpha^*} B = (f)_{\alpha^*} (\text{id})_{\alpha\beta},$$

kde jsou ale souřadnice forem brány jako řádky jako obvykle.

**Příklad.** Lineární zobrazení  $\varphi: U \rightarrow U$  je tenzor typu  $(1,1)$ . Jeho matice  $(\varphi)_{\alpha\alpha} = (t_j^i)$  je zadána souřadnicemi tohoto tenzoru. Podle předchozí věty jsou jeho souřadnice v bázi  $\beta$

$$\tilde{t}_j^i = \sum_{i,j} a_k^i t_l^k b_j^l = \sum_k a_k^i \left( \sum_l t_l^k b_j^l \right),$$

maticově

$$(\varphi)_{\beta\beta} = A(\varphi)_{\alpha\alpha} B = A(\varphi)_{\alpha\alpha} A^{-1} = (\text{id})_{\beta\alpha} (\varphi)_{\alpha\alpha} (\text{id})_{\alpha\beta},$$

což je nám již známý vztah pro transformaci matice zobrazení.

**Příklad.** Bilineární forma na  $U$  je tenzor typu  $(2,0)$ . Matice této formy je dána souřadnicemi tenzoru  $(t_{ij})$  ( $i$  značí řádek,  $j$  sloupec). Podle předchozí věty

$$\tilde{t}_{ij} = \sum_{k,l} t_{kl} b_i^k b_j^l = \sum_k b_i^k \left( \sum_l t_{kl} b_j^l \right),$$

maticově

$$\tilde{T} = B^T T B = (\text{id})_{\alpha\beta}^T T (\text{id})_{\alpha\beta},$$

což je nám již z dřívějšíka známý vztah pro transformaci matice bilineární formy.

*Poznámka.* Pořadí má být opačné.

**Příklad.** Nechť  $V$  je vektorový prostor s bází  $(e_1, e_2)$  a duální bází  $(f^1, f^2)$ . Vyjádřete tenzor

$$f^1 \otimes (e_1 + e_2) \in T_1^1(V)$$

v bází  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$  a duální bází  $(\tilde{f}^1, \tilde{f}^2)$ , jestliže

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

*Řešení.* Platí

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) A.$$

Chceme vyjádřit  $e_1, e_2$  pomocí  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$  a  $f^1, f^2$  pomocí  $\tilde{f}^1, \tilde{f}^2$ . Z předchozí rovnice okamžitě dostáváme

$$(e_1, e_2) = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) A^{-1} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dále hledáme vyjádření ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \tilde{f}^1 \\ \tilde{f}^2 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$E = (f^i(e_j)) = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} (e_1, e_2) = B \begin{pmatrix} \tilde{f}^1 \\ \tilde{f}^2 \end{pmatrix} (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) A^{-1} = B \cdot E A^{-1} = B \cdot A^{-1}.$$

Tedy musí být  $B = A^{-1}$ , proto

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}^1 \\ \tilde{f}^2 \end{pmatrix}.$$

Odtud dosadíme do našeho tenzoru

$$\begin{aligned} f^1 \otimes (e_1 + e_2) &= (\tilde{f}^1 + \tilde{f}^2) \otimes (-2\tilde{e}_1 + 3\tilde{e}_2 + \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2) \\ &= (\tilde{f}^1 + \tilde{f}^2) \otimes (-\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2) \\ &= -\tilde{f}^1 \otimes \tilde{e}_1 - \tilde{f}^2 \otimes \tilde{e}_1 + 2\tilde{f}^1 \otimes \tilde{e}_2 + 2\tilde{f}^2 \otimes \tilde{e}_2. \end{aligned} \quad \diamond$$

### 7.11. Tenzory ve fyzice, jiná definice tenzoru

Předchozí věta o transformaci souřadnic tenzoru při změně báze nám umožňuje porozumět tomu, jak jsou tenzory chápány ve fyzice.

Tenzor typu  $(p, q)$  nad vektorovým prostorem  $U$  každé bázi  $\alpha$  v  $U$  přiřazuje  $n^{p+q}$ -tici čísel  $t_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \in \mathbb{K}$ , přičemž při změně báze probíhá transformace těchto čísel podle věty z předchozího paragrafu.

*Poznámka.* Podobně jsme mohli chápat vektory – jsou to takové  $n$ -tice souřadnic, které se při změně báze vhodně transformují. Lze je tedy organizovat do zobrazení  $v: \{\text{báze } \alpha(e_i)\} \rightarrow \mathbb{K}^n, \alpha \mapsto (v)_\alpha$ , které je „ekvivariantní“, tj. pro regulární matici  $A$  platí  $(v)_{\alpha A^{-1}} = A(v)_\alpha$ .

Podobně lze také chápat vektorový prostor  $V$ , do něhož jsme vkládali afinní prostor  $\mathcal{S}$ . Jeho prvky lze totiž chápat jako  $(n+1)$ -tice čísel, které se při afinní změně souřadnic vhodně změní, konkrétně přiřazení  $\varphi(O, \underbrace{e_1, \dots, e_n}_\alpha)$  zadává vektor  $O \cdot \varphi_0(O, \alpha) + \alpha \cdot \varphi_+(O, \alpha)$ .

## 8. Symetrické a antisymetrické tenzory

### 8.1. Symetrická mocnina

Od této chvíle necht'  $\mathbb{K}$  je těleso charakteristiky 0. Grupou permutací množiny  $\{1, \dots, q\}$  označme  $\Sigma_q$ .

**Definice 8.1.** Definujme *symetrickou mocninu*  $S^q U$  jako kvocient  $\otimes^q U$  podle vektorového podprostoru generovaného tenzory tvaru

$$u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)} - u_1 \otimes \cdots \otimes u_q.$$

Třidu prvku  $u_1 \otimes \cdots \otimes u_q$  budeme značit  $u_1 \cdots u_q$ ; platí tedy  $u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(q)} = u_1 \cdots u_q$ .

Symetrická mocnina  $S^q U$  má opět jistou univerzální vlastnost, demonstrovanou následujícím diagramem:

$$\begin{array}{ccc} \prod^q U & \xrightarrow{\Phi} & V \\ \downarrow t & \nearrow G & \\ \otimes^q U & & \\ \downarrow p & \nearrow F & \\ S^q U & & \end{array}$$

Je-li  $\Phi: \prod^q U \rightarrow V$  multilineární zobrazení, pak existuje jediné lineární zobrazení  $G: \otimes^q U \rightarrow V$  díky univerzální vlastnosti tenzorového součinu. Je-li navíc  $\Phi$  symetrické, pak

$$G(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}) = \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q)}) = \Phi(u_1, \dots, u_q) = G(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q).$$

Proto  $G$  indukuje jediné lineární zobrazení  $F$ , pro které zjevně platí

$$F(u_1 \cdots u_q) = \Phi(u_1, \dots, u_q).$$

Naopak, pokud je  $F$  lineární zobrazení, pak kompozice  $F \circ p \circ t$  je symetrické  $q$ -lineární zobrazení.

**Věta 8.2.** Platí  $\text{Hom}(S^q U, V) \cong \text{Lin}_q(U, \dots, U; V)_{\text{sym}}$ . □

Ukážeme nyní, že  $S^q U$  je ve skutečnosti kvocientem podle ideálu, takže se jedná opět o algebru. Protože je  $\otimes^q U$  generovaný jednoduchými tenzory, stačí ukázat, že

$$(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)} - u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) \otimes (u_{q+1} \otimes \cdots \otimes u_{q+r})$$

opět leží v jádře projekce  $p$  a podobnou symetrickou vlastnost. To je ale jasné, neboť se jedná o generující tenzor pro permutaci  $\sigma + \text{id}$ , která je  $\sigma$  na prvních  $q$  prvcích a identita na posledních  $r$  prvcích. Násobení  $S^q U \otimes S^r U \rightarrow S^{q+r} U$  má tvar  $(u_1 \cdots u_q) \cdot (u_{q+1} \cdots u_{q+r}) = u_1 \cdots u_q u_{q+1} \cdots u_{q+r}$ .

*Poznámka.* Navíc je  $TU$  i koalgebra; na  $U^{\otimes q}$  je konásobením dáno  $\Delta(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) = \sum (u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_k}) \otimes (u_{j_1} \otimes \cdots \otimes u_{j_l})$ , kde sčítáme přes všechny rozklady  $\{1, \dots, q\}$  na dvě rostoucí posloupnosti  $i_1 < \cdots < i_k$ ,  $j_1 < \cdots < j_l$ . To je jediné konásobením, pro které jsou vektory z  $U$  primitivní a které z  $TU$  dělá bialgebru. Konásobením na  $SU$  je analogické,  $\Delta(u_1 \cdots u_q) = \sum (u_{i_1} \cdots u_{i_k}) \otimes (u_{j_1} \cdots u_{j_l})$ . Na úrovni multilineárních zobrazení to odpovídá následujícímu násobení:  $(\varphi \cdot \psi)(u_1, \dots, u_q) = \sum \varphi(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) \psi(u_{j_1}, \dots, u_{j_l})$ . Násobení na  $SU$  naopak odpovídá konásobením na multilineárních zobrazeních: každé lineární zobrazení  $S^q U \rightarrow \mathbb{K}$  se uchopí jako bilineární zobrazení  $S^k U \otimes S^l U \rightarrow \mathbb{K}$ .

**\*\* 8.2. Symetrické tenzory**

Uvedeme nyní alternativní definici  $S^q U$ , konkrétně jako podprostoru  $\otimes^q U$ . K tomu budeme potřebovat několik definic. Pro permutaci  $\sigma \in \Sigma_q$  máme lineární zobrazení

$$\rho_\sigma: \otimes^q U \rightarrow \otimes^q U, \quad u_1 \otimes \cdots \otimes u_q \mapsto u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}.$$

cv Platí  $\rho_\tau \circ \rho_\sigma = \rho_{\sigma \circ \tau}$ ; to je proto, že  $\rho_\tau \rho_\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q)$  vznikne z výše uvedeného vztahu pro  $\rho_\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q)$  tím, že na  $i$ -tém místě napíšeme člen na  $\tau(i)$ -tém místě, tj.  $u_{\sigma(\tau(i))}$ . Výsledkem tak bude

$$u_{\sigma(\tau(1))} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(\tau(q))} = \rho_{\sigma \circ \tau}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q).$$

Konkrétně si lze předchozí důkaz demonstrovat na příkladu

$$\rho_{(23)}\rho_{(12)}(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3) = \rho_{(23)}(u_2 \otimes u_1 \otimes u_3) = u_2 \otimes u_3 \otimes u_1 = \rho_{(123)}(u_1 \otimes u_2 \otimes u_3),$$

přičemž  $(12)(23) = (123) \neq (23)(12)$ .

**Definice 8.3.** Řekneme, že tenzor  $t \in \otimes^q U$  je *symetrický*, jestliže  $\rho_\sigma t = t$  pro každou permutaci  $\sigma$ .

**Definice 8.4.** *Symetrizace* tenzoru  $t$  je tenzor  $\text{Sym}(t) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \rho_\tau t$ .

V předchozí definici používáme nulovou charakteristiku  $\mathbb{K}$  k tomu, abychom mohli dělit *nenulovým* číslem  $q! \neq 0$ .

**Příklad.** Symetrizací tenzoru  $u_1 \otimes u_1 \otimes u_2$  dostaneme tenzor (sčítance odpovídají postupně permutacím  $\text{id}$ ,  $(12)$ ,  $(23)$ ,  $(13)$ ,  $(231)$  a  $(321)$ )

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}(u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 + u_2 \otimes u_1 \otimes u_1 + u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 + \\ & + u_2 \otimes u_1 \otimes u_1) = \frac{1}{3}u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 + \frac{1}{3}u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 + \frac{1}{3}u_2 \otimes u_1 \otimes u_1 \end{aligned}$$

Symetrizace zjevně zadává lineární zobrazení  $\text{Sym}: \otimes^q U \rightarrow \otimes^q U$ .

**Lemma 8.5.** Platí  $\rho_\sigma \circ \text{Sym} = \text{Sym} = \text{Sym} \circ \rho_\sigma$ .

*Důkaz.* Dokážeme první rovnost, druhá se dostane podobně. Platí

$$\rho_\sigma(\text{Sym}(t)) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \rho_\sigma(\rho_\tau(t)) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \rho_{\tau \circ \sigma} t = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \rho_\tau t = \text{Sym}(t)$$

(pro  $\tau \in \Sigma_q$  zjevně probíhají permutace  $\tau \circ \sigma$  přes každý prvek  $\Sigma_q$  právě jednou). □

**Důsledek 8.6.** *Obraz  $\text{Sym}(\otimes^q U)$  sestává právě ze symetrických tenzorů.*

*Důkaz.* Podle lemmatu je  $\rho_\sigma(\text{Sym}(t)) = \text{Sym}(t)$ , takže  $\text{Sym}(t)$  je vždy symetrický. Na druhou stranu každý symetrický tenzor  $t$  leží v obraze  $\text{Sym}$ , neboť

$$\text{Sym}(t) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \rho_\tau t = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} t = t. \quad \square$$

Ve skutečnosti z důkazu jednoduše plyne  $\text{Sym} \circ \text{Sym} = \text{Sym}$ , takže  $\text{Sym}$  je projekce na prostor symetrických tenzorů.

Druhá rovnost z lemmatu říká  $\text{Sym}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) = \text{Sym}(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)})$ , tj.  $\text{Sym}$  faktorizuje přes  $S^q U$ , takže dostáváme indukované zobrazení  $s: S^q U \rightarrow \bigotimes^q U$ . Platí

$$s(u_1 \cdots u_q) = \text{Sym}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)},$$

z čehož dostáváme

$$p(s(u_1 \cdots u_q)) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(q)} = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} u_1 \cdots u_q = u_1 \cdots u_q$$

a tím pádem  $p \circ s = \text{id}$ . Názorně to znamená, že  $s$  vybírá z každé třídy rozkladu  $S^q U = \bigotimes^q U / \ker p$  nějakého reprezentanta této třídy; proto  $p$  indukuje izomorfismus  $\text{im } s \xrightarrow{\cong} S^q U$ . Přitom zjevně  $\text{im } s = \text{im } \text{Sym}$  a podle důsledku se jedná o prostor symetrických tenzorů.

### 8.3. Báze prostoru symetrických tenzorů

Budeme používat zkrácené značení  $u_1^{a_1} \cdots u_k^{a_k}$ , pokud se vektor  $u_j$  vyskytuje v součinu  $a_j$ -krát.

**Věta 8.7.** *Nechť  $(e_1, \dots, e_n)$  je báze prostoru  $U$ . Potom  $\{e_1^{a_1} \cdots e_n^{a_n} \mid a_1 + \cdots + a_n = q\}$  je báze  $S^q(U)$ .*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme s pomocí Lemmatu 6.1, budou nás tedy zajímat lineární zobrazení  $S^q(U) \rightarrow V$  nebo ekvivalentně symetrická  $q$ -lineární zobrazení  $\Phi: \prod^q U \rightarrow V$ . To je jednoznačně určeno svými hodnotami na  $q$ -ticích bázevých vektorů s tím, že tyto hodnoty mohou být libovolné, ale symetrické, tj. jsou jednoznačně určeny (libovolnými) hodnotami na  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_q})$ , kde  $i_1 \leq \cdots \leq i_q$ . Při izomorfismu

$$\text{Lin}_q(U, \dots, U; V)_{\text{sym}} \cong \text{Hom}(S^q U, V)$$

odpovídá  $\Phi$  lineárnímu zobrazení  $F: S^q U \rightarrow V$  a platí tedy, že toto je jednoznačně určené svými (libovolnými) hodnotami

$$F(e_{i_1} \cdots e_{i_q}) = \Phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}),$$

kde  $i_1 \leq \cdots \leq i_q$ , jak jsme chtěli dokázat. □

**Důsledek 8.8.** *Dimenze prostoru  $S^q(U)$  je  $\binom{n+q-1}{q}$ .*

*Důkaz.* Spočítejte, kolik existuje  $n$ -tic  $(a_1, \dots, a_n)$  nezáporných celých čísel takových, že  $a_1 + \cdots + a_n = q$ . (Je jich stejně, jako je různých posloupností  $q$  znaků  $\bullet$  a  $n-1$  znaků  $|$ , například  $(1, 0, 2, 1)$  odpovídá  $\bullet \mid \mid \bullet\bullet \mid \bullet$ .) □

Speciálně pro  $U = (\mathbb{K}^n)^*$  můžeme chápat formy  $f^i$  z duální standardní báze jako proměnné  $x^i$  (jsou to zobrazení  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  jejichž hodnota na  $(x^1, \dots, x^n)$  je právě  $x^i$ ). Potom lze symetrickou algebru  $S(\mathbb{K}^n)^*$  ztotožnit s algebrou  $\mathbb{K}[x^1, \dots, x^n]$  polynomů nad tělesem  $\mathbb{K}$  v proměnných  $x^1, \dots, x^n$  a prvky této algebry pak interpretovat jako polynomiální funkce na  $\mathbb{K}^n$ .

### 8.4. Antisymetrická mocnina

Označme  $\text{sign } \sigma$  znaménko permutace  $\sigma$ . Zopakujeme předchozí výklad pro antisymetrická (nebo též alternující)  $q$ -lineární zobrazení, tj. zobrazení  $\Phi: \prod^q U \rightarrow V$  splňující

$$\Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q)}) = \text{sign } \sigma \cdot \Phi(u_1, \dots, u_q)$$

pro libovolnou permutaci (zjevně stačí zkontrolovat pro transpozice, které generují  $\Sigma_q$ ). Vektorový prostor antisymetrických  $q$ -lineárních zobrazení budeme značit  $\text{Lin}_q(U, \dots, U; V)_{\text{alt}}$ .

**Definice 8.9.** Definujme *antisymetrickou mocninu*  $\Lambda^q U$  jako kvocient  $\otimes^q U$  podle vektorového podprostoru generovaného tenzory tvaru

$$u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(q)} - \text{sign } \sigma \cdot u_1 \otimes \dots \otimes u_q.$$

Třídu prvku  $u_1 \otimes \dots \otimes u_q$  budeme značit  $u_1 \wedge \dots \wedge u_q$ ; platí tedy  $u_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(q)} = \text{sign } \sigma \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_q$ .

Zejména platí  $u_1 \wedge \dots \wedge u_q = 0$ , kdykoliv  $u_i = u_j$  (prohozením  $u_i, u_j$  se výraz jednak nezmění a podle definice změní znaménko; v nulové charakteristice to znamená, že je tento výraz nulový).

Antisymetrická mocnina  $\Lambda^q U$  má opět jistou univerzální vlastnost:

$$\begin{array}{ccc} \prod^q U & \xrightarrow{\Phi} & V \\ \downarrow t & \searrow G & \nearrow \\ \otimes^q U & & \\ \downarrow p & \searrow F & \\ \Lambda^q U & & \end{array}$$

Je-li  $\Phi$  multilineární zobrazení, pak existuje jediné lineární zobrazení  $G: \otimes^q U \rightarrow V$  díky univerzální vlastnosti tenzorového součinu. Je-li navíc  $\Phi$  antisymetrické, pak

$$G(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(q)}) = \Phi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q)}) = \text{sign } \sigma \cdot \Phi(u_1, \dots, u_q) = \text{sign } \sigma \cdot G(u_1 \otimes \dots \otimes u_q).$$

Proto  $G$  indukuje jediné lineární zobrazení  $F$ , pro které zjevně platí

$$F(u_1 \wedge \dots \wedge u_q) = \Phi(u_1, \dots, u_q).$$

Naopak, pokud je  $F$  lineární zobrazení, pak kompozice  $F \circ p \circ t$  je antisymetrické  $q$ -lineární zobrazení.

**Věta 8.10.** Platí  $\text{Hom}(\Lambda^q U, V) \cong \text{Lin}_q(U, \dots, U; V)_{\text{alt}}$ . □

Ukážeme nyní, že  $\Lambda^q U$  je ve skutečnosti kvocientem podle ideálu, takže se jedná opět o algebru. Protože je  $\otimes^q U$  generovaný jednoduchými tenzory, stačí ukázat, že

$$(u_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes u_{\sigma(q)} - \text{sign } \sigma \cdot u_1 \otimes \dots \otimes u_q) \otimes (u_{q+1} \otimes \dots \otimes u_{q+r})$$

opět leží v jádře projekce a podobnou symetrickou vlastnost. To je ale jasné, neboť se jedná o generující tenzor pro permutaci  $\sigma + \text{id}$ , která je  $\sigma$  na prvních  $q$  prvcích a identita na posledních  $r$  prvcích. Násobení  $\Lambda^q U \otimes \Lambda^r U \rightarrow \Lambda^{q+r} U$  má tvar  $(u_1 \wedge \dots \wedge u_q) \cdot (u_{q+1} \wedge \dots \wedge u_{q+r}) = u_1 \wedge \dots \wedge u_q \wedge u_{q+1} \wedge \dots \wedge u_{q+r}$ .



*Poznámka.* Konásobení na  $\Lambda U$  je analogické,  $\Delta(u_1 \wedge \cdots \wedge u_q) = \text{sign } \sigma \cdot \sum (u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k}) \otimes (u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_l})$ , kde  $\sigma$  je permutace  $p \mapsto i_p, k + p \mapsto j_k$ . Na úrovni multilineárních zobrazení to odpovídá následujícímu násobení:  $(\varphi \cdot \psi)(u_1, \dots, u_q) = \sum \text{sign } \sigma \cdot \varphi(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) \psi(u_{j_1}, \dots, u_{j_l})$ . Násobení na  $SU$  naopak odpovídá konásobení na multilineárních zobrazeních: každé lineární zobrazení  $S^q U \rightarrow \mathbb{K}$  se uchopí jako bilineární zobrazení  $S^k U \otimes S^l U \rightarrow \mathbb{K}$ .

## \*\* 8.5. Antisymetrické tenzory

Uvedeme nyní alternativní definici  $\Lambda^q U$ , konkrétně jako podprostoru  $\otimes^q U$ . K tomu budeme potřebovat několik definic.

**Definice 8.11.** Řekneme, že tenzor  $t \in \otimes^q U$  je *antisymetrický*, jestliže  $\rho_\sigma t = \text{sign } \sigma \cdot t$  pro každou permutaci  $\sigma$ .

**Definice 8.12.** *Antisymetrizace* tenzoru  $t$  je tenzor  $\text{Alt}(t) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \text{sign } \sigma \cdot \rho_\tau t$ .

V předchozí definici používáme nulovou charakteristiku  $\mathbb{K}$  k tomu, abychom mohli dělit *nenulovým* číslem  $q! \neq 0$ .

**Příklad.** Antisymetrizací tenzoru  $u_1 \otimes u_1 \otimes u_2$  dostaneme tenzor (sčítance odpovídají postupně permutacím id, (12), (23), (13), (231) a (321))

$$\frac{1}{6} (u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 - u_1 \otimes u_1 \otimes u_2 - u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 - u_2 \otimes u_1 \otimes u_1 + u_1 \otimes u_2 \otimes u_1 + u_2 \otimes u_1 \otimes u_1) = 0$$

Antisymetrizace zjevně zadává lineární zobrazení  $\text{Alt}: \otimes^q U \rightarrow \otimes^q U$ .

**Lemma 8.13.** Platí  $\rho_\sigma \circ \text{Alt} = \text{sign } \sigma \cdot \text{Alt} = \text{Alt} \circ \rho_\sigma$ .

*Důkaz.* Dokážeme první rovnost, druhá se dostane podobně. Platí

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(\text{Alt}(t)) &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \text{sign } \tau \cdot \rho_\sigma(\rho_\tau(t)) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \text{sign } \sigma \cdot \text{sign}(\tau \circ \sigma) \cdot \rho_{\tau \circ \sigma} t \\ &= \text{sign } \sigma \cdot \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \text{sign } \tau \cdot \rho_\tau t = \text{sign } \sigma \cdot \text{Alt}(t) \end{aligned}$$

(pro  $\tau \in \Sigma_q$  zjevně probíhají permutace  $\tau \circ \sigma$  přes každý prvek  $\Sigma_q$  právě jednou).  $\square$

**Důsledek 8.14.** *Obraz  $\text{Alt}(\otimes^q U)$  sestává právě ze symetrických tenzorů.*

*Důkaz.* Podle lemmatu je  $\rho_\sigma(\text{Alt}(t)) = \text{sign } \sigma \cdot \text{Alt}(t)$ , takže  $\text{Alt}(t)$  je vždy antisymetrický. Na druhou stranu každý antisymetrický tenzor  $t$  leží v obraze  $\text{Alt}$ , neboť

$$\text{Alt}(t) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \text{sign } \tau \cdot \rho_\tau t = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} t = t. \quad \square$$

Ve skutečnosti z důkazu jednoduše plyne  $\text{Alt} \circ \text{Alt} = \text{Alt}$ , takže  $\text{Alt}$  je projekce na prostor antisymetrických tenzorů.

Druhá rovnost z lemmatu říká  $\text{Alt}(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}) = \text{sign } \sigma \cdot \text{Alt}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q)$ , tj.  $\text{Alt}$  faktorizuje přes  $\Lambda^q U$ , takže dostáváme indukované zobrazení  $s: \Lambda^q U \rightarrow \otimes^q U$ . Platí

$$s(u_1 \wedge \cdots \wedge u_q) = \text{Alt}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \text{sign } \sigma \cdot u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)},$$

z čehož dostáváme

$$p(s(u_1 \wedge \cdots \wedge u_q)) = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} \text{sign } \sigma \cdot u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(q)} = \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in \Sigma_q} u_1 \wedge \cdots \wedge u_q = u_1 \wedge \cdots \wedge u_q$$

a tím pádem  $p \circ s = \text{id}$ . Názorně to znamená, že  $s$  vybírá z každé třídy rozkladu  $\Lambda^q U = \bigotimes^q U / \ker p$  nějakého reprezentanta této třídy; proto  $p$  indukuje izomorfismus  $\text{im } s \xrightarrow{\cong} \Lambda^q U$ . Přitom zjevně  $\text{im } s = \text{im Alt}$  a podle důsledku se jedná o prostor antisymetrických tenzorů.

### 8.6. Báze prostoru antisymetrických tenzorů

**Věta 8.15.** *Nechť  $(e_1, \dots, e_n)$  je báze prostoru  $U$ . Potom  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} \mid i_1 < \cdots < i_q\}$  je báze  $\Lambda^q(U)$ .*

*Důkaz.* Důkaz je analogický symetrickému případu s tím, že antisymetrická  $q$ -lineární forma  $\Phi: \prod^q U \rightarrow \mathbb{K}$  je jednoznačně určena svými hodnotami na  $q$ -ticích bázových vektorů s tím, že tyto hodnoty mohou být libovolné, ale antisymetrické, tj. jsou jednoznačně určeny (libovolnými) hodnotami na  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_q})$ , kde  $i_1 < \cdots < i_q$ . Při izomorfismu

$$\text{Lin}_q(U, \dots, U; V)_{\text{alt}} \cong \text{Hom}(\Lambda^q U, V)$$

odpovídá  $\Phi$  lineárnímu zobrazení  $F: \Lambda^q U \rightarrow \mathbb{K}$  a platí tedy, že toto je jednoznačně určená svými (libovolnými) hodnotami

$$F(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}) = \Phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}),$$

kde  $i_1 < \cdots < i_q$ . □

**Důsledek 8.16.** *Platí*

$$\dim \Lambda^q(U) = \binom{n}{q},$$

kde  $n = \dim U$ .

**Věta 8.17** (Lineární nezávislost a vnější součin). *Vektory  $u_1, \dots, u_q \in U$  jsou lineárně závislé právě tehdy, když*

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_q = 0.$$

*Důkaz.* Jsou-li  $u_1, \dots, u_q$  lineárně nezávislé, lze je doplnit na bázi  $(u_1, \dots, u_q, u_{q+1}, \dots, u_n)$  prostoru  $U$ . Potom  $u_1 \wedge \cdots \wedge u_q$  je jeden z prvků báze  $\Lambda^q(U)$ , tudíž je různý od nuly.

Jsou-li  $u_1, \dots, u_q$  lineárně závislé, pak jeden z nich je lineární kombinací ostatních, nechť je to

$$u_q = \sum_{i=1}^{q-1} a^i u_i.$$

Potom

$$\begin{aligned} u_1 \wedge \cdots \wedge u_q &= u_1 \wedge \cdots \wedge u_{q-1} \wedge \left( \sum_{i=1}^{q-1} a^i u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{q-1} a^i u_1 \wedge \cdots \wedge u_{q-1} \wedge u_i = 0. \end{aligned} \quad \square$$

## 8.7. Vnější mocnina lineárního zobrazení

Nechť  $\varphi: U \rightarrow V$  je lineární zobrazení. Již dříve jsme ukázali, že existuje lineární zobrazení

$$\varphi^{\otimes q} = \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi: \bigotimes^q U \rightarrow \bigotimes^q V$$

takové, že

$$\varphi^{\otimes q}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q) = \varphi(u_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(u_q).$$

Nyní ukážeme, že existuje zobrazení na kvocientech

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes^q U & \xrightarrow{\varphi^{\otimes q}} & \bigotimes^q V \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \Lambda^q U & \xrightarrow{\varphi^{\wedge q}} & \Lambda^q V \end{array}$$

K tomu zjevně stačí

$$p \circ \varphi^{\otimes q}(u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(q)}) = \text{sign } \sigma \cdot p \circ \varphi^{\otimes q}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_q)$$

neboli

$$\varphi(u_{\sigma(1)}) \wedge \cdots \wedge \varphi(u_{\sigma(q)}) = \text{sign } \sigma \cdot \varphi(u_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(u_q),$$

což ale platí. Indukované zobrazení značíme  $\varphi^{\wedge q}: \Lambda^q U \rightarrow \Lambda^q V$ .

## 8.8. Vnější mocniny a determinanty

**Věta 8.18.** *Nechť  $\varphi: U \rightarrow U$  je lineární zobrazení, které má v bázi  $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$  prostoru  $U$  matici  $A = (a_j^i)$ . Potom platí*

$$\varphi^{\wedge n}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \det A \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

*Důkaz.* Platí

$$\begin{aligned} \varphi^{\wedge n}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= \varphi(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(e_n) \\ &= \left( \sum_{j_1} a_1^{j_1} e_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{j_n} a_n^{j_n} e_{j_n} \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} a_1^{j_1} \cdots a_n^{j_n} \cdot e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} \cdot e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} \text{sign } \sigma \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \det A \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned} \quad \square$$

**Důsledek 8.19.** *Nechť  $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$  je báze  $U$  a uvažme  $\alpha \cdot P = (v_1, \dots, v_n)$  pro libovolnou matici  $P$ . Potom platí  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \det P \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$ .*

## 8. Symetrické a antisymetrické tenzory

*Důkaz.* Obě  $\alpha, \beta = \alpha \cdot P$  lze chápat jako zobrazení  $\mathbb{K}^n \rightarrow U$  posílající standardní bázi  $(e_1, \dots, e_n)$  na danou  $n$ -tici vektorů, pro tato zobrazení pak platí  $\beta = \alpha \circ P$  a dostáváme komutativní diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \det P \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n \\
 & & & \nearrow & \\
 e_1 \wedge \dots \wedge e_n & \xrightarrow{P^{\wedge n}} & \Lambda^n \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\alpha^{\wedge n}} & \Lambda^n U \\
 & \searrow & \downarrow \beta^{\wedge n} & \swarrow & \downarrow \alpha^{\wedge n} \\
 & & v_1 \wedge \dots \wedge v_n & & \det P \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_n
 \end{array}$$

Tvrzení jednoduše plyne z komutativity.  $\square$

**Příklad.** Necht' matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  reprezentuje lineární zobrazení  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Čemu se rovná  $A^{\wedge 2}$ ?

*Řešení.*  $A^{\wedge 2}: \Lambda^2 \mathbb{R} = \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R} = \mathbb{R}$ . Podle předchozí věty je matice tohoto zobrazení rovna

$$\det A = -1. \quad \diamond$$

**Příklad.** Necht'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte kanonický tvar matice  $A^{\wedge 3}$ .

Matice  $A$  má vlastní čísla 1, 0, 2, 3 a příslušné vlastní vektory  $u_1, u_2, u_3, u_4$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^4$ . Potom  $u_i \wedge u_j \wedge u_k$  tvoří bázi  $\Lambda^3 \mathbb{R}^4$ .

Protože

$$A^{\wedge 3}(u_i \wedge u_j \wedge u_k) = Au_i \wedge Au_j \wedge Au_k = \lambda_i \lambda_j \lambda_k u_i \wedge u_j \wedge u_k,$$

má matice  $A^{\wedge 3}$  vlastní vektory, které tvoří bázi  $\Lambda^3 \mathbb{R}^4$  s vlastními čísly 0, 0, 0, 6. Tedy Jordanův kanonický tvar matice  $A^{\wedge 3}$  bude

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

### Kontrolní otázky

1. Necht' lineární transformace  $\varphi: U \rightarrow U$  má vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ . Jaká vlastní čísla má duální zobrazení  $\varphi^*: U^* \rightarrow U^*$ ?
2. Necht'  $\mathbb{R}_3[x]$  je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše 3. Udejte příklad nenulové lineární formy  $\mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$ , nenulové bilineární formy  $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$ , nenulové 3-lineární formy  $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$ .
3. Vyslovte definici tenzorového součinu  $U \otimes V$  a vysvětlete, co je tenzor  $u \otimes v$ , kde  $u \in U$  a  $v \in V$ .

4. Ukažte, jak se použije univerzální vlastnost tenzorového součinu pro definici zobrazení  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ , kde  $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ ,  $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$  jsou lineární zobrazení. Nechť  $\varphi_1$  je dáno maticí  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_2$  je dáno maticí  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ . Vypočtete  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$  na  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
5. Udejte příklad nenulového symetrického tenzoru  $S^3(\mathbb{R}^2)$ .
6. Vysvětlete, co znamená symbol  $i_v \omega$ , kde  $v \in U$ ,  $\omega \in \Lambda^k(U^*)$ . Vyjádřete pro  $U = \mathbb{R}^3$ ,  $\omega(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2$  a  $v = (1, 2, 3)$ .

### Příklady k procvičení

1. Vyčíslíte tenzory:

- (a)  $t = f^1 \otimes e_2 + f^2 \otimes (e_1 + 3e_3) \in T_1^1(\mathbb{R}^3)$  na vektoru  $v = e_1 + 5e_2 + 4e_3$  a formě  $f = f^1 + f^2 + f^3$ .
- (b)  $t \in T_3^2(\mathbb{R}^4)$  se všemi souřadnicemi rovnými 3 na pětici  $(v, v, v, f, f)$ , kde  $f = f^1 - f^4$  a  $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$ .
- (c)  $r = 2 \cdot t \otimes s + s \otimes t$ , kde  $t = 2 \cdot f^1 \otimes e_1$ ,  $s = f^2 \otimes (2e_1 - e_2)$ , na čtveřici  $(e_1, 3e_1 - e_2, 2f^1 + f^2, f^1)$ .

[Řešení: (a)  $t(v, f) = 21$ ; (b)  $t(v, v, v, f, f) = 0$ ; (c)  $r(e_1, 3e_1 - e_2, 2f^1 + f^2, f^1) = -16$ .]

2. Spočtete souřadnice

- (a)  $\bar{t}_1^{12}$  tenzoru  $t \in T_1^2(\mathbb{R}^2)$ , jehož souřadnice jsou v bázi  $(e_1, e_2)$  všechny rovny 1, v nové bázi

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (b)  $\bar{t}_{12}^1$  tenzoru  $t = f^1 \otimes f^2 \otimes (e_1 + e_2) \in T_2^1(\mathbb{R}^2)$  v nové bázi

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (c)  $\bar{t}_{31}^{12}$  tenzoru  $f^2 \otimes f^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes e_1 \otimes e_2 \in T_2^2(\mathbb{R}^3)$  v nové bázi

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (d)  $\bar{t}_{123}^{12}$  tenzoru  $t \in T_3^2(\mathbb{R}^3)$  se všemi souřadnicemi rovnými dvěma v bázi  $(e_1, e_2, e_3)$  v nové bázi

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Řešení: (a)  $\bar{t}_1^{12} = -9$ ; (b)  $\bar{t}_{12}^1 = 4$ ; (c)  $\bar{t}_{31}^{12} = 3$ ; (d)  $\bar{t}_{123}^{12} = 0$ .]

3. Spočítejte kontrakci tenzoru

(a)  $3 \cdot f^1 \otimes e_1 \otimes e_2 - 2 \cdot f^2 \otimes e_2 \otimes e_2$  podle 1. a 2. složky.

(b)  $(f^1 - 2f^3 + 3f^4) \otimes (e_1 + 3e_2 - e_3)$

(c)  $(f^1 + f^2 + f^3 + f^4) \otimes e_1 + (f^1 + 2f^2 + 2f^3 + 4f^4) \otimes e_2 + 2(f^1 - f^2 - f^4) \otimes e_3$

(d)  $f^2 \otimes f^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + f^3 \otimes f^3 \otimes e_1 \otimes e_2$  podle druhých složek.

[Řešení: (a)  $-2e_2$ ; (b) 3; (c) 3; (d)  $f^2 \otimes e_3$ .]

4. Pomocí matice

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

proved'te snížení a povýšení tenzoru  $(f^1 + f^2) \otimes (e_3 + e_4) - (f^1 + f^3) \otimes e_3$

[Řešení: Snížení  $(3e_1 + 2e_2) \otimes (e_3 + e_4) - (2e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \otimes e_2$ , povýšení  $(f^1 + f^2) \otimes f^3 + (f^1 + f^3) \otimes (f^4 - 2f^3)$ .]

5. Nechť  $t \in T_0^2(U)$  je symetrický a  $s \in T_2^0(U)$  antisymetrický tenzor. Dokažte, že tenzor vzniklý násobením a následnou kontrakcí v obou složkách  $t_{ij}s^{ij}$  je roven nule.

6. Dokažte, že pro operátory symetrizace  $S: T_0^q(U) \rightarrow S^q(U)$  a antisymetrizace  $A: T_0^q(U) \rightarrow \Lambda^q(U)$  platí

$$S \circ A = A \circ S = 0.$$

7. Dokažte, že pro  $\dim U > 2$  nejsou prostory  $\Lambda^2(\Lambda^2(U))$  a  $\Lambda^4(U)$  izomorfní.

8. Dokažte, že tenzor  $t_{ijk} \in T_0^3(U)$  symetrický vzhledem k  $i, j$  a antisymetrický vzhledem k  $j, k$  je roven nule.

## 9. Determinanty, objemy a orientace

### 9.1. Objemová forma a determinant

Objemová forma na  $U$  je libovolná nenulová antisymetrická  $n$ -lineární forma  $\text{Vol}: \prod^n U \rightarrow \mathbb{K}$ , kde  $n = \dim U$ , tj.

$$\text{Vol} \in \text{Lin}_n(U, \dots, U; \mathbb{K})_{\text{alt}} \cong \text{Hom}(\Lambda^n U, \mathbb{K}) \ni \text{vol};$$

odpovídající lineární formu budeme značit  $\text{vol}: \Lambda^n U \rightarrow \mathbb{K}$ . Nechť  $(e_1, \dots, e_n)$  je libovolná báze  $U$ . Nenulovost  $\text{Vol}$  je ekvivalentní tomu, že  $\text{vol}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \text{Vol}(e_1, \dots, e_n) \neq 0$ , neboť  $\Lambda^n U$  je generovaný  $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ .

Hodnotu  $\text{Vol}(u_1, \dots, u_n)$  nazýváme *orientovaným objemem* rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory. Díky objemové formě můžeme interpretovat determinant operátoru  $\varphi: U \rightarrow U$ . Platí totiž

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) &= \text{vol}(\varphi(u_1) \wedge \dots \wedge \varphi(u_n)) \\ &= \det \varphi \cdot \text{vol}(u_1 \wedge \dots \wedge u_n) \\ &= \det \varphi \cdot \text{Vol}(u_1, \dots, u_n), \end{aligned}$$

tedy zobrazení  $\varphi$  zvětší objem  $(\det \varphi)$ -krát. Tato vlastnost nezávisí na volbě objemové formy – podstatné je, že se jedná o „relativní tvrzení“, tedy neříkáme nic o tom, jaký je výsledný objem, ale pouze ho porovnáváme s původním. Pokud bychom však chtěli definovat determinant lineárního zobrazení mezi dvěma různými vektorovými prostory (stejně dimenze), museli bychom na nich zafixovat objemové formy.

Je-li  $(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_n) \cdot P$ , pak platí

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = \text{vol}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \text{vol}(\det P \cdot u_1 \wedge \dots \wedge u_n) = \det P \cdot \text{Vol}(u_1, \dots, u_n).$$

**Příklad.** Na  $\mathbb{K}^n$  máme *standardní* objemovou formu, jejíž hodnota na standardní bázi je

$$\text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Pro libovolnou  $n$ -tici vektorů  $(u_1, \dots, u_n)$  pak lze psát

$$(u_1, \dots, u_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot P,$$

kde matice přechodu  $P$  je tvořena právě vektory  $u_1, \dots, u_n$ , a potom

$$\text{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \det P \cdot \text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = \det P.$$

Dohromady  $\text{Vol}(u_1, \dots, u_n)$  je determinant matice, jejíž sloupce jsou tvořeny těmito vektory.

### 9.2. Orientace

Naším dalším cílem bude definovat orientovaný objem v Eukleidovském prostoru – protože máme velikosti a úhly, je víceméně jasné jak objem definovat; pro orientovaný objem budeme ale potřebovat ještě orientaci *reálného* vektorového prostoru  $U$ . Řekneme, že dvě báze  $(e_1, \dots, e_n)$  a  $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$  jsou *shodně orientované*, jestliže platí

$$\tilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n = c \cdot (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

pro nějaké kladné  $c \in \mathbb{R}$ . Konstanta  $c$  je tímto vztahem samozřejmě jednoznačně určena – jedná se o determinant matice přechodu od první báze k druhé – a je tedy nenulová. Pro  $c$  záporné mluvíme o *opačně orientovaných* bázích. Takto nám na množině všech bází vzniká relace ekvivalence mající právě dvě třídy, které nazýváme *orientace*  $U$ . Pokud je na  $U$  zvolena orientace, říkáme, že je  $U$  *orientovaný* a prvky vybrané orientace nazýváme *kladné báze*, zatímco zbylé jsou *záporné báze*.

**Příklad.** Na  $\mathbb{R}^n$  definujme standardní orientaci jako třídu bází obsahující standardní bázi  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**Příklad.** Nechť  $V$  je komplexní vektorový prostor a  $V^{\mathbb{R}}$  značí reálný vektorový prostor s touž nosnou množinou, týmž sčítáním, ale s násobením skaláry zúženém na reálná čísla; mluvíme o realifikaci  $V$ . Na  $V^{\mathbb{R}}$  existuje kanonická orientace (závisející samozřejmě na komplexní struktuře), kterou nyní popíšeme. Zvolme libovolnou bázi  $(e_1, \dots, e_n)$  komplexního prostoru  $V$ . Potom

$$(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$$

je báze reálného prostoru  $V^{\mathbb{R}}$  a prohlásíme ji za kladnou bázi. Je potřeba ukázat, že pro jinou volbu komplexní báze bude vzniklá reálná báze shodně orientovaná a tím pádem dostáváme opravdu dobře definovanou orientaci.

Matice přechodu mezi dvěma komplexními bázemi je však libovolná invertibilní komplexní matice a musíme tedy ukázat, že reálná matice příslušná libovolné invertibilní matici má kladný determinant. Rozložme komplexní matici přechodu na součin elementárních matic. Příslušná matice přechodu mezi reálnými bázemi je tak opět součinem jistých „elementárních“ matic. Přičítání (komplexního) násobku dá matici determinantu 1, prohození dvou řádků taktéž (příslušná reálná matice odpovídá prohození dvou dvojic řádků). Násobení komplexním číslem má příslušnou reálnou matici vzniklou z jednotkové výměnou dvou jedniček za blok

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

který má determinant  $a^2 + b^2 > 0$ .

Vraťme se nyní k obecné situaci reálného vektorového prostoru  $U$ .

**Věta 9.1.** *Dvě báze  $\alpha, \beta$  jsou shodně orientované, právě když je lze spojit cestou, tj. právě když existuje spojitě zobrazení*

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow U \times \dots \times U = U^n$$

*splňující následující*

- $\gamma(0) = \alpha, \gamma(1) = \beta$
- pro každé  $t \in [0, 1]$  je  $n$ -tice  $\gamma(t)$  bází  $U$ .

*Poznámka.* Spojitost jistě dává smysl pro  $U = \mathbb{R}^n$ . Avšak libovolný (konečně rozměrný) reálný vektorový prostor je izomorfní  $\mathbb{R}^n$  a spojitost lze definovat ve smyslu tohoto izomorfismu – hlavně na volbě takového izomorfismu nezávisí.



*Důkaz.* Není těžké se přesvědčit, že každou čtvercovou matici s kladným determinantem lze napsat jako součin elementárních s kladným determinantem. Prohození dvou sloupců lze nahradit kompozicí operací  $I \rightarrow I+II$ ,  $II \rightarrow II-I$ ,  $I \rightarrow I+II$ , která samozřejmě zároveň s prohozením sloupců také jeden z nich vynásobí číslem  $-1$ , ale Gaussova eliminace lze provádět i s touto operací. Vynásobení dvou sloupců číslem  $-1$  lze nahradit provedením dvou předchozích složených operací za sebou.

Dále není těžké se přesvědčit, že každá z elementárních matic  $T_i$  s kladným determinantem lze spojit s jednotkovou maticí  $E$  cestou  $\Gamma_i$  procházející pouze maticemi s kladným determinantem. Jejich součin  $T = T_1 \cdots T_k$  pak lze spojit s jednotkovou maticí jednoduše pomocí cesty

$$t \mapsto \Gamma_1(t) \cdots \Gamma_k(t).$$

Jelikož však platí

$$\alpha = \beta \cdot T,$$

hledaná cesta mezi bázemi  $\alpha$ ,  $\beta$  lze volit například jako

$$t \mapsto \beta \cdot \Gamma_1(t) \cdots \Gamma_k(t).$$

V opačném směru veličina  $(\det \text{id}_{\gamma(t)\alpha}) \in \mathbb{R}^\times$  závisí spojitě na  $t$  a její hodnota pro  $t = 0$  je 1. Proto i její hodnota pro  $t = 1$  musí být kladná, tj.  $(\det \text{id}_{\beta\alpha}) > 0$  a báze  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou shodně orientované.  $\square$

Důležitým příkladem objemové formy je objemová forma vzniklá ze skalárního součinu na *orientovaném* Eukleidovském prostoru  $\mathcal{E}$ . To by nemělo být překvapující – skalární součin na  $\mathcal{E}$  udává smysl velikosti vektorů a úhlů mezi nimi; z těchto údajů lze objem počítat. Objemová forma však udává orientovaný objem, proto je navíc potřeba ještě volba orientace. Z jiného úhlu pohledu na Eukleidovském prostoru jsou dvě objemové formy a není žádný důvod preferovat jednu z nich; ten nastává až při zafixování orientace. Pro neorientovaný Eukleidovský prostor bychom mohli nadefinovat pouze neorientovanou objemovou „formu“  $|\text{Vol}|$ ; k ní se vrátíme za chvíli.

Nechť  $\alpha = (e_1, \dots, e_n)$  je libovolná kladně orientovaná ortonormální báze. Kanonickou objemovou formu zafixujeme požadavkem

$$\text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Je-li  $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$  jiná kladně orientovaná ortonormální báze, pak matice přechodu má kladný determinant a je ortogonální, takže tento determinant musí být roven 1, a proto

$$\text{Vol}(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = 1 \cdot \text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$$

a požadavek na  $\text{Vol}$  tedy nezávisí na volbě báze  $\alpha$ .

Nechť nyní  $\beta = (u_1, \dots, u_n)$  je libovolná  $n$ -tice vektorů a píšme  $\beta = \alpha \cdot P$ , kde „transformační matice“  $P$  má prvky souřadnice vektorů  $u_j$  v bázi  $\alpha$ , tj.  $p_j^i = f^i(u_j)$ . Potom

$$\text{Vol}(u_1, \dots, u_n) = \det P \cdot \text{Vol}(e_1, \dots, e_n) = \det P.$$

Jelikož je báze  $\alpha$  kladná, má  $\beta$  stejné znaménko jako  $\det P$ , tedy jako  $\text{Vol}(u_1, \dots, u_n)$ .

**Tvrzení 9.2.** Orientovaný objem  $\text{Vol}(u_1, \dots, u_n)$  lze spočítat jako determinant matice, jejíž  $j$ -tý sloupec je tvořen souřadnicemi vektoru  $u_j$  v libovolné kladné ortonormální bázi (ta však musí být stejná pro všechny sloupce). Zejména

$$\text{sign Vol}(u_1, \dots, u_n) = \text{sign}(u_1, \dots, u_n).$$

Jeho druhou mocninu lze spočítat jako Gramův determinant

$$(\text{Vol}(u_1, \dots, u_n))^2 = \det(\langle u_i, u_j \rangle)$$

z matice, jejíž prvek na pozici  $(i, j)$  je skalární součin  $\langle u_i, u_j \rangle$ .

*Důkaz.* Druhé tvrzení plyne z prvního uvážením  $\det(P^T P)$ . Na pozici  $(i, j)$  dostaneme součin  $i$ -tého a  $j$ -tého sloupce  $P$ , tedy

$$\sum_k f^k(u_i) f^k(u_j) = \langle u_i, u_j \rangle$$

(jedná se o vzorec pro skalární součin v ortonormálních souřadnicích). □

Jako důsledek dostáváme vzorec pro neorientovaný objem na Eukleidovském prostoru jako odmocninu z Gramova determinantu – ten závisí pouze na skalárním součinu a nikoliv na orientaci. Z tohoto pohledu lze interpretovat Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces jako vzorec pro objem. Během něj totiž měníme každý vektor pouze přičítáním násobků předchozích vektorů a nemění se tedy orientovaný objem. Přitom po provedení celého procesu a pro vzniklý ortogonální systém  $(v_1, \dots, v_n)$  je Gramova matice diagonální a neorientovaný objem je tak roven

$$|\text{Vol}(u_1, \dots, u_n)| = |v_1| \cdots |v_n|,$$

tedy součinu velikostí vektorů  $v_1, \dots, v_n$ . Znaménko je též jako u původního orientovaného objemu a je tedy určeno tím, zda je  $(u_1, \dots, u_n)$  báze kladná či záporná (v případě, že se nejedná vůbec o bázi, je objem beztak nulový). Přitom velikost vektoru  $v_i$  je rovna výšce rovnoběžnostěnu určeného  $u_1, \dots, u_i$  s podstavou danou prvními  $i - 1$  vektory. Jedná se tedy o vzorec

$$\text{objem rovnoběžnostěnu} = \text{objem podstavy} \times \text{výška}$$

Hlavní význam této formule je pro nás v tom, že po několika stránkách je snad konečně zřejmé, proč tomuto objektu říkáme orientovaný objem.

### 9.3. Geometrie v rovině a prostoru

Prvně se zabýváme rovinou  $\mathcal{E}_2$ , kterou budeme chápat jako  $\mathbb{R}^2$  se standardním skalárním součinem a standardní orientací. Ta je mimochodem totožná s tou vzniklou z komplexní struktury na  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ .

Pro vektory  $u, v \in \mathcal{E}_2$  počítejme neorientovaný objem z Gramova determinantu

$$(\text{Vol}(u, v))^2 = \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 - \langle u, v \rangle^2 = |u|^2 |v|^2 \sin^2 \alpha,$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi vektory  $u, v$  a rovnost plyne z  $\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \alpha$ . Odmocněním dostáváme vztah

$$|\text{Vol}(u, v)| = |u||v| \sin \alpha.$$

Standardně bereme  $\alpha \in [0, \pi]$ , díky orientaci můžeme nyní rozšířit definiční obor na  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  a zvolit znaménko podle orientace  $(u, v)$ . Mluvíme pak o *orientovaném úhlu* od vektoru  $u$  k vektoru  $v$  a můžeme psát

$$\begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} = \text{Vol}(u, v) = |u||v| \sin \alpha.$$

Budeme psát  $\alpha = \sphericalangle(u, v)$ . (Lépe je samozřejmě brát  $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .)

Orientovaný úhel se hodí v úlohách, ve kterých je potřeba (zejména algoritmicky) rozhodnout o viditelnosti objektů v rovině. Dalším případem je úloha rozhodnout, zda mnohoúhelník  $A_1 \cdots A_n$  zadaný posloupností vrcholů je kladně či záporně orientovaný (v případě, že nevíme, zda je konvexní). Velice jednoduchým způsobem (alespoň z teoretického pohledu) je spočítat všechny orientované úhly

$$\sphericalangle(A_n A_1, A_1 A_2), \sphericalangle(A_1 A_2, A_2 A_3), \dots, \sphericalangle(A_{n-1} A_n, A_n A_1)$$

podél mnohoúhelníka a sečíst je. Pokud je součet roven  $2\pi$ , je mnohoúhelník kladně orientovaný, pokud  $-2\pi$ , je záporně orientovaný. Ostatní případy nemohou pro mnohoúhelník nastat a lze takto i detekovat některé případy, kdy se nejedná o mnohoúhelník (zdaleka ne však všechny). V případě, kdy je mnohoúhelník konvexní, budou mít všechny úhly stejné znaménko a to lze spočítat pomocí orientovaného objemu (u čtyřúhelníku stačí spočítat znaménka i v nekonvexním případě). Jiným řešením je sečíst orientované objemy

$$\frac{1}{2} \text{Vol}(A_1 A_2, A_1 A_3) + \cdots + \frac{1}{2} \text{Vol}(A_1 A_{n-1}, A_1 A_n).$$

Pokud je výsledek kladný, je mnohoúhelník kladně orientovaný a naopak.

**Příklad.** Ukažme nyní, že výše uvedený součet vyjadřuje obsah mnohoúhelníku  $A_1 \cdots A_n$ . V prvním kroku dokážeme o něco obecněji, že součet

$$\text{Vol}(X A_1, X A_2) + \cdots + \text{Vol}(X A_{n-1}, X A_n) + \text{Vol}(X A_n, X A_1)$$

nezávisí na volbě bodu  $X$ . To je tím, že

$$\begin{aligned} \text{Vol}(Y A_i, Y A_{i+1}) &= \text{Vol}(Y X + X A_i, Y X + X A_{i+1}) \\ &= \text{Vol}(X A_i, X A_{i+1}) + \text{Vol}(Y X, X A_{i+1}) + \text{Vol}(X A_i, Y X), \end{aligned}$$

kde členy  $\text{Vol}(Y X, X A_{i+1})$  se při sečtení vyruší se členy  $\text{Vol}(X A_i, Y X) = -\text{Vol}(Y X, X A_i)$ .

V dalším kroku ukážeme, že existuje vnitřní diagonála  $A_i A_j$ , která protíná mnohoúhelník pouze v koncových bodech. Pak lze induktivně předpokládat, že vzorec pro obsah funguje pro oba mnohoúhelníky vzniklé rozdělením podél  $A_i A_j$  a jejich sečtením dokázat, že tento vzorec funguje také pro původní mnohoúhelník (členy obsahující diagonálu se vyruší). Nechť  $A_i$  je bod s nejmenší  $x$ -ovou souřadnicí. Pokud leží uvnitř trojúhelníku  $A_{i-1} A_i A_{i+1}$  nějaký další vrchol mnohoúhelníku, zvolíme za  $A_j$  ten s nejmenší  $x$ -ovou souřadnicí. Pokud ne, zvolíme za dělicí diagonálu  $A_{i-1} A_{i+1}$ .

*Poznámka.* Orientovaná Eukleidovská rovina<sup>5</sup> je kanonicky (jednorozměrným) komplexním vektorovým prostorem: násobení  $i$  je rotace o  $90^\circ$  v kladném směru. Tím lze také definovat

<sup>5</sup>Ve skutečnosti stačí mít skalární součin zadán až na násobek – takové struktúře se říká konformní; lze v ní měřit úhly a porovnávat velikosti. Typickým příkladem konformního zobrazení, které není ortogonální, je stejnolehlost.

## 9. Determinanty, objemy a orientace

orientovaný úhel mezi nenulovými vektory  $u, v$  jako  $\sphericalangle(u, v) = \arg(v/u)$  – je totiž  $v = z \cdot u$  pro jediné komplexní číslo  $z$ , jehož argument je přesně onen orientovaný úhel.

Neorientovaná rovina má dvě komplexní struktury, které se navzájem liší o komplexní konjugaci. Ve výsledku je tak úhel jednoznačný až na znaménko.

Přejděme nyní ke standardnímu orientovanému Eukleidovskému třírozměrnému prostoru  $\mathcal{E}_3$ . Krom skalárního součinu lze na  $\mathcal{E}_3$  definovat vektorový součin pomocí objemové formy. Po dosazení dvou vektorů  $u, v \in \mathcal{E}_3$  se z objemové formy stane lineární forma

$$\text{Vol}(u, v, -): \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Každá lineární forma je rovna skalárnímu součinu s jednoznačně určeným vektorem, který v tomto případě značíme  $u \times v$ . Je tedy definován vztahem

$$\text{Vol}(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle.$$

V kladné ortonormální bázi lze vektorový součin spočítat jako

$$\begin{aligned} u \times v &= \langle u \times v, e_1 \rangle \cdot e_1 + \langle u \times v, e_2 \rangle \cdot e_2 + \langle u \times v, e_3 \rangle \cdot e_3 \\ &= \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & 1 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 0 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 1 \\ u^3 & v^3 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & 0 \\ u^2 & v^2 & 0 \\ u^3 & v^3 & 1 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} u^1 & v^1 & e_1 \\ u^2 & v^2 & e_2 \\ u^3 & v^3 & e_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

kde výsledný determinant dává smysl pouze, pokud jej rozvineme podle třetího sloupce; dostaneme pak korektní vzorec

$$u \times v = \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u^3 & v^3 \\ u^1 & v^1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} e_3.$$

Zabývejme se nyní abstraktními vlastnostmi vektorového součinu. Z antisymetrie platí

$$\langle u \times v, u \rangle = \text{Vol}(u, v, u) = 0,$$

a proto je  $u \times v$  kolmý na  $u$  a analogicky také na  $v$ . Tím je určen jeho směr, nyní určíme orientaci a na závěr jeho velikost. Orientace je dána tím, že

$$\text{Vol}(u, v, u \times v) = \langle u \times v, u \times v \rangle \geq 0$$

a je tedy  $(u, v, u \times v)$  kladně orientovaná (za předpokladu, že se jedná o bázi; v opačném případě však  $u \times v = 0$  a jeho orientaci není potřeba určovat).

Zbývá spočítat velikost  $u \times v$ . Pomocí Gramova determinantu

$$\begin{aligned} |u \times v|^2 &= \langle u \times v, u \times v \rangle = \text{Vol}(u, v, u \times v) = \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle & 0 \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle u \times v, u \times v \rangle \end{vmatrix}^{1/2} \\ &= (|u|^2|v|^2 - \langle u, v \rangle^2)^{1/2} \cdot |u \times v| \end{aligned}$$

Pomocí úhlu  $\alpha$  mezi vektory  $u, v$  dostáváme finální vztah

$$|u \times v| = |u||v| \sin \alpha.$$

Tentokrát není možné přiřadit úhlu  $\alpha$  orientaci jako v rovinném případě.

**Věta 9.3.** *Vektorový součin má následující vlastnosti (které ho jednoznačně určují)*

- Vektorový součin  $- \times -$  je antisymetrické bilineární zobrazení.
- Vektor  $u \times v$  je kolmý na  $u$  a  $v$ .
- Vektor  $u \times v$  je nenulový, právě když jsou  $u, v$  lineárně nezávislé a pak
- báze  $(u, v, u \times v)$  je kladně orientovaná.
- Platí  $|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$ .

#### nd 9.4. Vztah kvaternionů a orientovaného objemu

Obecně můžeme říct, že objemová forma je *kompatibilní* se skalárním součinem, jestliže  $|\text{Vol}(u_1, \dots, u_n)| = |u_1| \cdots |u_n|$  kdykoliv  $u_1, \dots, u_n$  tvoří ortonormální systém vektorů. Nad  $\mathbb{R}$  je pak objemová forma  $\text{Vol}$  určena jednoznačně až na znaménko (orientaci), nad  $\mathbb{C}$  jednoznačně až na násobek komplexní jednotkou. Jednoduchou modifikací ortonormální báze lze najít takovou ortonormální bázi, jejíž objem je roven 1. Standardní báze  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{C}^n$  jsou příklady takových bází.

Zabývejme se prvně krátce situací v reálné Eukleidovské rovině  $\mathcal{E}_2$ . Objemová forma je

$$\text{Vol}: \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbb{R},$$

kterou můžeme díky skalárnímu součinu přepsat jako

$$\text{Vol}(u, v) = \langle Iu, v \rangle.$$

Protože je objemová forma kompatibilní se skalárním součinem, máme

$$\text{Vol}(e_1, e_1) = 0, \quad \text{Vol}(e_1, e_2) = 1, \quad \text{Vol}(e_2, e_1) = -1, \quad \text{Vol}(e_2, e_2) = 0$$

a tedy  $Ie_1 = e_2$ ,  $Ie_2 = -e_1$ . Díky tomu  $I^2 = -\text{id}$  a zobrazení  $I$  zadává na  $V$  strukturu komplexního vektorového prostoru:  $v(a + bi) = va + I(vb)$  (samozřejmě,  $I$  je rotace o  $90^\circ$  v kladném směru).

Nyní se zabývejme stejnou situací v „komplexní Eukleidovské rovině“  $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$ . Předpokládejme, že skalární součin je lineární v druhé složce a tzv. „konjugovaně lineární“ v první složce, tj. platí  $\langle \alpha u, v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$ . Objemová forma je  $\text{Vol}: \mathcal{E}_2^{\mathbb{C}} \times \mathcal{E}_2^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , kterou můžeme díky skalárnímu součinu přepsat jako

$$\text{Vol}(u, v) = \langle Ju, v \rangle.$$

Tentokrát je  $J: \overline{\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$  konjugovaně lineární,

$$\langle J(u\alpha), v \rangle = \text{Vol}(u\alpha, v) = \alpha \text{Vol}(u, v) = \alpha \langle Ju, v \rangle = \langle (Ju)\bar{\alpha}, v \rangle,$$

tj.  $J(u\alpha) = (Ju)\bar{\alpha}$ . Z kompatibility se skalárním součinem  $Je_1 = e_2$ ,  $Je_2 = -e_1$  a proto  $J^2 = -\text{id}$  (druhá iterace už je lineární) a zobrazení  $J$  zadává na  $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$  strukturu kvaternionického vektorového prostoru: definujme kvaternionickou algebru  $\mathbb{H}$  jako podalgebru generovanou  $I, J \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ , kde  $I = iE$  je násobení imaginární jednotkou  $i$ . Ukážeme, že jako vektorový prostor je generovaná  $E, I, J, K = IJ$ : už víme, že platí  $I^2 = J^2 = -E$ ,  $IJ = -JI = K$ , počítejme nyní  $K^2 = -JIIIJ = J^2 = -E$  a obdobně  $JK = -KJ = I$ ,  $KI = -IK = J$ . Platí

$$Ee_1 = e_1, \quad Ie_1 = e_1i, \quad Je_1 = e_2, \quad Ke_1 = e_2i$$

a tedy zobrazení  $\mathbb{H} \rightarrow \mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}, Q \mapsto Qe_1$  je izomorfismus. Obrazy  $E, I, J, K$  značíme postupně 1,  $i, j, k$  a v dalším budeme o  $\mathbb{H}$  uvažovat jako o prostoru  $\mathbb{R}^4 = [1, i, j, k]$  společně s násobením daným výše uvedenými vztahy.

	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	- $j$
$j$	$j$	- $k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	- $i$	-1

### 9.5. Dodatek ke geometrii v prostoru

V této části dáme do souvislosti geometrii v prostoru s kvaterniony. Připomeňme, že kvaterniony vzniknou z komplexních čísel přidáním jednotky  $j$ , která antikomutuje s komplexní jednotkou  $i$ , tj. platí  $ij = -ji$ , a splňuje  $i^2 = j^2 = -1$ . Označme  $k = ij$ . Potom máme následující

$$q = (a + xi) + (y + zi)j = a + (xi + yj + zk).$$

Číslo  $a$  nazveme *reálnou částí* kvaternionu  $q$  a  $v = xi + yj + zk$  jeho *vektorovou částí*; lze totiž tuto část ztotožnit s vektorem  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Chápeme proto komplexní jednotky  $i, j, k$  jako vektory standardní báze.

*Poznámka.* Lépe se tento vztah vyjádří pomocí Cliffordovy algebry  $\mathcal{C}_3^0$ ; pak  $i = e_2e_3, j = e_3e_1, k = e_1e_2$ .

Pro jejich součin platí výše uvedená tabulka, díky níž se snadno ověří, že

$$v \cdot w = -\langle v, w \rangle + v \times w.$$

Jelikož je skalární součin komutativní a vektorový součin antikomutativní, dostáváme snadno vztahy

$$\langle v, w \rangle = -\frac{1}{2}(vw + wv) = -\operatorname{Re}(vw), \quad v \times w = \frac{1}{2}(vw - wv) = \operatorname{Im}(vw).$$

Orientovaný objem  $\operatorname{Vol}(u, v, w)$  získáme jako reálnou část

$$\operatorname{Vol}(u, v, w) = -\frac{1}{4}(uvw - vuv + wuv - wvu) = -\operatorname{Re}(uvw).$$

Zabývejme se nyní inverzí kvaternionu  $q = a + v$ . K tomu nám poslouží konjugovaný kvaternion  $q^* = a - v$ . Platí

$$q^*q = (a - v)(a + v) = aa - vv = aa + \langle v, v \rangle = |a|^2 + |v|^2 = |q|^2$$

a tedy  $q^{-1} = |q|^{-2}q^*$ . Zejména, pokud je  $q$  jednotkový kvaternion, tj.  $|q| = 1$ , dostáváme  $q^{-1} = q^*$ . Kvaterniony mají také goniometrický tvar; my si vystačíme s jednotkovými kvaterniony, pro něž platí

$$q = \cos \varphi + v \sin \varphi,$$

kde  $\varphi \in [0, \pi]$  a  $v \in \mathbb{R}^3$  je jednoznačně určený jednotkový vektor s výjimkou  $q = \pm 1$ , tj.  $\varphi \in \{0, \pi\}$ , kdy není určený vůbec. Občas je také výhodné zapisovat

$$e^{\varphi v} = \cos \varphi + v \sin \varphi.$$

Tento vztah dává smysl zejména, když výraz vlevo rozvineme do Taylorovy řady a využijeme vztahu  $v^2 = -|v|^2 = -1$ . Pro inverzní kvaternion platí  $(e^{\varphi v})^{-1} = e^{-\varphi v}$ .

*Poznámka.* Obecně pak platí vztah

$$\log(e^v e^w) = v + w + v \times w + \dots$$

a známé pravidlo pro násobení mocnin v kvaternionech neplatí – důvodem je, že nejsou komutativní.

Dva ryze imaginární kvaterniony komutují,  $vw = wv$ , právě když  $v \parallel w$  a antikomutují,  $vw = -wv$ , právě když  $v \perp w$ . Lze proto spočítat pro  $v \parallel w$

$$e^{\varphi v} w e^{-\varphi v} = e^{\varphi v} e^{-\varphi v} w = w,$$

což znamená, že vektor  $w$  se touto konjugací zachovává. Naopak pro  $v \perp w$  platí

$$w e^{-\varphi v} = w(\cos \varphi - v \sin \varphi) = (\cos \varphi + v \sin \varphi)w = e^{\varphi v} w$$

a proto

$$e^{\varphi v} w e^{-\varphi v} = e^{\varphi v} e^{\varphi v} w = e^{2\varphi v} w = (\cos 2\varphi)w + (\sin 2\varphi)v \times w.$$

Vektor  $v \times w$  je kolmý jak na  $v$ , tak na  $w$  a má stejnou velikost jako  $w$ . Leží tedy  $e^{\varphi v} w e^{-\varphi v}$  na kružnici procházející  $w$  a  $v \times w$  a nachází se od  $w$  vzdálen o úhel  $2\varphi$ . Ve výsledku tak konjugace  $e^{\varphi v}$  geometricky odpovídá rotaci o úhel  $2\varphi$  okolo osy dané vektorem  $v$ . Z těchto úvah plyne poměrně praktický popis toho, jak spočítat složení dvou rotací.

**Příklad.** Nechť například  $R$  je rotace okolo osy  $x$  o úhel  $60^\circ$  a  $S$  je rotace okolo osy  $z$  o úhel  $90^\circ$ . Potom  $R$  odpovídá konjugaci kvaternionem  $e^{\pi/6 \cdot i}$  a  $S$  konjugaci  $e^{\pi/4 \cdot k}$ . Jejich složení  $SR$  je potom dané kvaternionem

$$\begin{aligned} e^{\pi/4 \cdot k} e^{\pi/6 \cdot i} &= (\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot k)(\sqrt{3}/2 + 1/2 \cdot i) \\ &= \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 \cdot i + \sqrt{2}/4 \cdot j + \sqrt{6}/4 \cdot k. \end{aligned}$$

Ve výsledku se tak jedná o rotaci okolo osy dané vektorem  $(1, 1, \sqrt{3})$  o úhel  $2 \arccos(\sqrt{6}/4)$ .

Poznamenejme, že tento příklad lze počítat také pomocí matic. Složení dvou zadaných rotací má matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 je  $(1, 1, \sqrt{3})$ , jak se snadno spočítá, a stopa této matice je

$$\frac{1}{2} = 1 + (\cos \varphi + i \sin \varphi) + (\cos \varphi - i \sin \varphi) = 1 + 2 \cos \varphi,$$

z čehož vychází  $\varphi = \arccos(-\frac{1}{4})$ . Těžší je zjistit, jestli se jedná o rotaci v kladném či záporném směru.

Podobně se dají reprezentovat reflexe. Zobrazení  $w \mapsto v w v$  je na vektorech  $v \parallel w$  rovno

$$v w v = v v w = -w$$

a na vektorech  $v \perp w$  rovno

$$v w v = -v v w = w.$$

### 9. Determinanty, objemy a orientace

---

Jedná se tedy o reflexi vzhledem k rovině kolmé na vektor  $v$  (opět předpokládáme, že  $|v| = 1$ ). Zabývejme se nyní tím, co se stane při složení dvou reflexí, prvně podle roviny kolmé na  $v$  a poté podle roviny kolmé na  $v'$ . Dostaneme

$$w \mapsto v'vwv' = (-v'v)w(-vv') = (\langle v', v \rangle - v' \times v)w(\langle v, v' \rangle - v \times v'),$$

tj. rotaci okolo vektoru  $v \times v' = -v' \times v$  o úhel  $2 \arccos \langle v, v' \rangle$ .



## 10. Smithův normální tvar celočíselných matic

### 10.1. Celočíselné matice

*Celočíselná matice* tvaru  $n \times m$  je kolekce celých čísel  $A = (a_j^i)$  indexovaná dvojicemi  $i = 1, \dots, n$  a  $j = 1, \dots, m$ . Píšeme  $A \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{Z}$ . Celočíselné matice odpovídají homomorfismům grup:

**Lemma 10.1.** *Homomorfismy grup  $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  odpovídají přesně celočíselným maticím typu  $m \times n$ . Homomorfismus příslušný matici  $A \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{Z}$  je  $x \mapsto Ax$ .*

*Důkaz.* Každý homomorfismus grup  $\varphi: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$  je jednoznačně určen obrazy  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)$ , které ale můžou být libovolné:

$$\begin{aligned} \varphi(x^1, \dots, x^m) &= \varphi(e_1 x^1 + \dots + e_m x^m) = \varphi(e_1) x^1 + \dots + \varphi(e_m) x^m \\ &= (\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_m)) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad \square$$

Naším cílem bude nyní každý takový homomorfismus reprezentovat „ve vhodných bázích“ co nejjednodušší maticí. Bude nás tedy zajímat nalezení invertibilních matic  $P$  a  $Q$  takových, že  $PAQ^{-1}$  je co nejjednodušší. Stejně jako v případě vektorových prostorů jsou invertibilní matice součinem „elementárních matic“, tj. matic odpovídajícím řádkovým/sloupcovým operacím, jen musíme dávat pozor na násobení řádků a sloupců. Jediné operace tohoto typu, které jsou invertibilní, jsou totiž násobení  $\pm 1$ .

V dalším proto budeme za řádkové operace považovat pouze: přičtení násobku jednoho řádku k druhému, prohození dvou řádků a vynásobení řádku číslem  $-1$ . To samé samozřejmě platí pro sloupcové operace.

Obecně máme následující charakterizaci:

**Lemma 10.2.** *Celočíselná matice  $A$  je invertibilní, právě když je čtvercová a její determinant je roven  $\pm 1$ .*

*Důkaz.* Prvně si uvědomme, že libovolná celočíselná inverze je zároveň inverzí nad  $\mathbb{Q}$  a proto musí být matice  $A$  čtvercová (s nenulovým determinantem). Zároveň

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

a, jelikož  $A^{-1}$  je celočíselná, musí být také celočíselný její determinant,  $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ . Proto  $\det A = \pm 1$ .

Nechť naopak  $A$  je čtvercová, jejíž determinant je  $\pm 1$ . Potom inverzní matici můžeme spočítat pomocí matice algebraických doplňků:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{\text{adj}}$$

a je celočíselná. □

*Poznámka.* Podobný důkaz funguje nad libovolným komutativním okruhem  $R$  (to by mělo být zřejmé alespoň pro obor integrity, kde  $\mathbb{Q}$  je nahrazeno podílovým tělesem): matice  $A \in \text{Mat}_{n \times n} R$  je invertibilní, právě když je čtvercová a  $\det A \in R^\times$  je invertibilní. Komutativita okruhu  $R$  je důležitá – bez ní by jednak nebylo možné definovat determinant a navíc existují okruhy s invertibilními obdelníkovými maticemi!

**Věta 10.3** (o Smithově normálním tvaru). *Pro libovolnou celočíselnou matici  $A$  existují invertibilní celočíselné matice  $P$  a  $Q$  takové, že*

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & q_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde  $q_1 \mid q_2 \mid \cdots \mid q_r$  se postupně dělí. Čísla  $q_i$  se nazývají invariantní faktory, pravá strana se nazývá Smithův normální tvar celočíselné matice  $A$ . Každý jiný takový se liší pouze znaménky  $q_i$ . Konkrétněji platí  $q_i = d_i/d_{i-1}$ , kde

$$d_i = \gcd\{\det S \mid S \text{ je submatice } A \text{ tvaru } i \times i\}$$

*Poznámka.* Je tedy vhodné vyžadovat  $q_i > 0$  a tyto jsou potom určeny zcela jednoznačně. V dalším budeme vždy tuto volbu preferovat.

*Důkaz.* Hlavním krokem je pomocí řádkových a sloupcových operací vyrobit v levém horním rohu největší společný dělitel všech prvků matice, dále pomocí něj vylíčit všechny prvky pod ním a vpravo od něj a následně použít indukci.

Základním krokem je vytvoření největšího společného dělitele prvků ležících v témž řádku nebo sloupci. K tomu budeme využívat Eukleidův algoritmus, který spočítá největšího společného dělitele následujícím způsobem: jsou-li  $a, b$  nenulová celá čísla taková, že  $|a| > |b|$ , vydělíme číslo  $a$  číslem  $b$  se zbytkem,  $a = qb + r$ . Potom

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r).$$

Nahrazením dvojice  $(a, b)$  dvojicí  $(b, r)$  se tedy největší společný dělitel nezmění. Navíc po konečném (ve skutečnosti velmi malém) počtu kroků vyjde  $r = 0$ ; potom příslušné  $b$  v tomto kroku je hledaný největší společný dělitel. Pokud se vyskytují  $a, b$  v jednom sloupci, můžeme výše popsaný algoritmus realizovat pomocí řádkových operací a nahradit tak tyto dva prvky dvojicí  $(d, 0)$ , kde  $d$  je největší společný dělitel  $a, b$ . To samé lze aplikovat na výskyt  $a, b$  v témže řádku pomocí sloupcových operací.

1. Vraťme se nyní k naší matici  $A$ . Prvně přesuňme na pozici  $(1, 1)$  pomocí operací libovolný nenulový prvek matice  $A$  (rozmyslete si zvláště případ  $A = 0$ ). V dalších krocích se bude vždy prvek na této pozici zmenšovat, díky čemuž bude náš algoritmus konečný.

2. Pomocí Eukleidova algoritmu a jeho implementace pomocí řádkových a sloupcových operací můžeme dosáhnout toho, že prvek v levém horním rohu je jediný nenulový prvek v prvním řádku a prvním sloupci, tj. dostaneme matici tvaru

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

3. Pokud by nyní prvek  $\tilde{a}_1^1$  nedělil nějaký prvek  $\tilde{a}_j^i$  matice  $\tilde{A}$ , můžeme jej pomocí přičtení řádku dostat do prvního řádku a pomocí kroku 2. opět na pozici  $(1, 1)$  vyrobit menší prvek. Po konečném počtu kroků tak vznikne matice blokového tvaru

$$\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix},$$

v níž bude prvek  $q_1$  v levém horním rohu dělit všechny prvky matice  $A'$ .

4. Na submatici  $A'$  můžeme použít indukční předpoklad a převést ji na Smithův normální tvar s invariantními faktory  $q_2, \dots, q_r$ . Protože  $q_1$  dělí všechny prvky  $A'$ , dělí i  $q_2$  (podle indukčního předpokladu je to největší společný dělitel všech prvků  $A'$ ) a tím pádem  $q_1 \mid q_2 \mid \dots \mid q_r$  tak, jak požadujeme.

Zbývá dokázat jednoznačnost; ta bude plynout z invariantnosti  $d_i$  vůči řádkovým/sloupcovým operacím a z jednoduchého výpočtu největších společných dělitelů  $d_i$  pro matici ve Smithově normálním tvaru, kterým začneme.

Zřejmě, pokud submatice obsahuje  $k$ -tý řádek, nikoliv však  $k$ -tý sloupec matice ve Smithově normálním tvaru, pak její determinant je nulový (jelikož obsahuje nulový řádek). Proto stačí uvažovat submatice složené z nějakých řádků a týchž sloupců. Ty jsou diagonální a jejich determinant je roven součinu prvků na diagonále – libovolných  $i$  prvků diagonály. Tedy největší společný dělitel je

$$d_i = \gcd\{q_{k_1} \cdots q_{k_i} \mid 1 \leq k_1 < \cdots < k_i \leq r\} = q_1 \cdots q_i$$

a vskutku platí  $q_i = d_i/d_{i-1}$  pro matici ve Smithově normálním tvaru.

Zbývá dokázat invarianci největšího společného dělitele  $d_i$  vzhledem ke sloupcovým operacím. Uvažujme tedy „starou“ a „novou“ matici, kde nová vznikne ze staré pomocí sloupcových operací (zatím ne nutně invertibilních). Zřejmě každý sloupec každé nové submatice je celočíselnou kombinací starých sloupců a její determinant je tedy celočíselnou kombinací starých subdeterminantů; zejména je každý nový subdeterminant dělitelný největším společným dělitelem  $d_i$  starých subdeterminantů a zejména je nové  $d_i$  dělitelné starým  $d_i$ . Pokud byly operace invertibilní, lze také starou matici vyrobit z nové a proto je i staré  $d_i$  dělitelné novým  $d_i$  a tudíž se rovnají.  $\square$

*Poznámka.* Není špatné si povšimnout, že z existenční části plyne, že každá invertibilní matice je součinem elementárních matic, neboť jediná invertibilní matice ve Smithově normálním tvaru je jednotková matice, tedy  $P^{-1}AQ = E$  a  $A = PQ^{-1}$ , a v převodu na Smithův normální tvar jsme používali pouze elementární matice.

Smithův normální tvar je vhodný k algoritmickým výpočtům s komutativními grupami. Platí totiž následující vztahy

$$\begin{aligned} \text{im } A &= [q_1 \cdot Pe_1, \dots, q_r \cdot Pe_r] \\ \text{ker } A &= [Qe_{r+1}, \dots, Qe_m], \end{aligned}$$

tedy obraz i jádro homomorfismu  $A$  lze jednoduchým způsobem získat ze sloupců matic  $P$  a  $Q$  a z invariantních faktorů  $q_i$ .

## 10.2. Prezentace konečně generovaných komutativních grup

Nechť  $M$  je komutativní grupa. V následujícím budeme komutativní grupy uvažovat vždy aditivně, tj. grupovou operaci budeme značit  $+$ , jednotku  $0$  a inverzi prvku  $a$  značíme  $-a$ .

Nechť  $k \in \mathbb{Z}$  a  $a \in M$ . Definujme  $a \cdot k$  jako  $0$ , pokud  $k = 0$ , jako

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{k \times}$$

pokud  $k > 0$  a jako  $(-k) \cdot (-a)$ , pokud  $k < 0$ . Toto označení by čtenáři mělo být známe z multiplikativního zápisu  $a^k$ , kde značí přesně to stejné. Výhodou tohoto zápisu je, že v každé (komutativní) grupě umíme automaticky násobit celými čísly, můžeme se tedy bavit o celočíselných kombinacích a používat okamžitě některé další pojmy z vektorových prostorů.

Nechť  $a_1, \dots, a_n \in M$  jsou libovolné prvky komutativní grupy  $M$ . Uvažujme následující homomorfismus grup

$$\varphi: \mathbb{Z}^n \rightarrow M, \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n.$$

**Lemma 10.4.** *Zobrazení  $\varphi$  je skutečně homomorfismus grup. Navíc platí*

1.  $\varphi$  je surjektivní, právě když prvky  $a_1, \dots, a_n$  generují  $M$ .
2.  $\varphi$  je injektivní, právě když jsou prvky  $a_1, \dots, a_n$  „lineárně nezávislé nad  $\mathbb{Z}$ “. □

Omezme se nyní na situaci, kdy prvky  $a_1, \dots, a_n$  generují  $M$ . Potom je  $\varphi$  podle předchozího surjektivní a z algebry známe následující fakt,

$$M \cong \mathbb{Z}^n / \ker \varphi,$$

nazývaný první věta o izomorfismu. K pochopení konečně generovaných komutativních grup bude tedy dobré zkoumat grupu  $\mathbb{Z}^n$  a její podgrupy.

**Věta 10.5.** *Každá podgrupa  $\mathbb{Z}^n$  je opět konečně generovaná a ve skutečnosti izomorfní  $\mathbb{Z}^m$  pro nějaké  $m \leq n$ .*

*Důkaz.* Budeme postupovat induktivně. Pro  $n = 1$  máme  $M \subseteq \mathbb{Z}$  a víme, že vždy  $M = t \cdot \mathbb{Z}$ . Máme tedy dvě možnosti. Pokud  $t = 0$ , je  $M \cong \mathbb{Z}^0$ , v opačném případě  $M \cong \mathbb{Z}^1$ .

Nechť nyní  $M \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$  a uvažme projekci

$$p: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (x^0, x^1, \dots, x^n) \mapsto x^0$$

Opět  $p(M) \subseteq \mathbb{Z}$  je podgrupa a tedy  $p(M) = t \cdot \mathbb{Z}$ . Nechť  $y_0 \in M$  je nějaké takové, že  $t = p(y_0)$ . Dále uvažme podgrupu  $\ker p \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ , která je zřejmě izomorfní  $\mathbb{Z}^n$  a můžeme tedy na ní aplikovat indukční předpoklad. Nechť tedy

$$M \cap \ker p = [y_1, \dots, y_m]$$

Tvrdíme nyní, že  $M = [y_0, y_1, \dots, y_m]$ . Uvažme proto libovolné  $x \in M$ . Podle konstrukce máme  $p(x) = tk_0$  pro nějaké  $k_0 \in \mathbb{Z}$  a

$$x = y_0 k_0 + (x - y_0 k_0),$$

kde  $x - y_0k_0 \in M \cap \ker p$  a tedy

$$x = y_0k_0 + y_1k_1 + \cdots + y_mk_m$$

pro nějaká  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ . Podrobnějším prozkoumáním důkazu lze též dokázat induktivně, že prvky  $y_0, y_1, \dots, y_m$  jsou lineárně nezávislé nad  $\mathbb{Z}$ , pokud jsou lineárně nezávislé  $y_1, \dots, y_m$  a  $t \neq 0$  (případ  $t = 0$  je triviální a vyřeší se zvlášť).  $\square$

*Poznámka.* Podobné tvrzení pro nekomutativní grupy neplatí. Existuje grupa, která je generována dvěma prvky (jedná se o volnou grupu na dvou generátorech), která obsahuje podgrupu, která je generovaná třemi, čtyřmi,  $\dots$  prvky a dokonce i podgrupu, která není konečně generovaná.

Přejděme nyní k hlavnímu konceptu této části – prezentacím. Necht'  $M$  je komutativní grupa generovaná prvky  $a_1, \dots, a_n$  a uvažme surjektivní homomorfismus

$$\varphi: \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow M, \quad \varphi(x^1, \dots, x^n) = a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$$

jako předtím. Podle předchozí věty je  $\ker \varphi$  opět konečně generovaná komutativní grupa a můžeme tedy najít další surjektivní homomorfismus

$$\psi: \mathbb{Z}^m \twoheadrightarrow \ker \varphi.$$

Zavedeme-li pro složení  $\mathbb{Z}^m \rightarrow \ker \varphi \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$  označení  $R$ , budeme vzniklou situaci zapisovat

$$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{R} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} M.$$

V každé takové posloupnosti budeme vyžadovat, aby  $\varphi$  byl surjektivní homomorfismus grup a  $\ker \varphi = \text{im } R$ . Potom dostáváme izomorfismus

$$M \cong \mathbb{Z}^n / \ker \varphi = \mathbb{Z}^n / \text{im } R.$$

Všimněme si, že pravá strana  $\mathbb{Z}^n / \text{im } R$  závisí pouze na homomorfismu (matici)  $R$ . Říkáme proto, že  $R$  prezentuje komutativní grupu  $M$ .

*Poznámka.* Prezentace grupy  $M$  lze definovat konkrétněji pomocí generátorů  $M$  a relací mezi nimi. Generátory  $e_1, \dots, e_n$  grupy  $\mathbb{Z}^n$  odpovídají (zvoleným) generátorům  $a_1, \dots, a_n$  grupy  $M$  a generátory grupy  $\mathbb{Z}^m$  budou odpovídat relacím mezi  $a_1, \dots, a_n$ . Obrazy generátorů  $e_j \in \mathbb{Z}^m$  jsou nějaké celočíselné kombinace

$$R(e_j) = e_1r_j^1 + \cdots + e_nr_j^n.$$

Z podmínky  $\ker \varphi = \text{im } R$  plyne, že analogické kombinace

$$a_1r_j^1 + \cdots + a_nr_j^n = 0$$

jsou nulové. To jsou přesně ony zmiňované relace mezi generátory  $M$  a  $M$  je v jistém smyslu „nejobecnější“ komutativní grupa s generátory  $a_1, \dots, a_n$  splňujícími tento systém relací. Přesněji, je-li  $N$  jiná komutativní grupa s prvky  $b_1, \dots, b_n$  splňujícími tytéž relace

$$b_1r_j^1 + \cdots + b_nr_j^n = 0,$$

existuje jediný homomorfismus grup  $M \rightarrow N$  posílající  $a_i$  na  $b_i$ . Tento fakt nebudeme dokazovat, poznamenejme ale, že plyne (celkem snadno) z univerzální vlastnosti kvocientu  $\mathbb{Z}^n / \text{im } R$ .

## 10. Smithův normální tvar celočíselných matic

Konečně generované komutativní grupy jsou ve výsledku prezentovány celočíselnými maticemi. Nyní ukážeme, že ze znalosti Smithova normálního tvaru lze prezentovanou grupu zcela zrekonstruovat, samozřejmě až na izomorfismus. Obecněji se zabýváme případem ekvivalentních matic a jimi prezentovaných komutativních grup

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{R} & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & M \\ \cong \downarrow Q & & \cong \downarrow P & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{S} & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & N \end{array}$$

Tvrdíme, že naznačený homomorfismus  $M \rightarrow N$  existuje a je to navíc izomorfismus. Prezentované grupy můžeme ztotožnit s kvocienty podle obrazů a hledáme tedy homomorfismus

$$\mathbb{Z}^n / \text{im } R \rightarrow \mathbb{Z}^n / \text{im } S.$$

Ten lze jednoduše definovat předpisem

$$x + \text{im } R \mapsto Px + \text{im } S.$$

Jelikož se každý jiný reprezentant třídy  $x + \text{im } R$  liší od  $x$  o prvek tvaru  $Ry$ , příslušná pravá strana se změní o třídu prvku  $PRy = SQy \in \text{im } S$  a zůstane proto stejná – zobrazení je dobře definované. Inverzní zobrazení je určené týmž předpisem s  $P$  nahrazeným  $P^{-1}$ . Tento výsledek lze vyjádřit heslem: izomorfní prezentace určují izomorfní grupy.

Zabýváme se nyní tím, jakou grupu prezentuje matice ve Smithově normálním tvaru.

**Lemma 10.6.** *Je-li  $S$  ve Smithově normálním tvaru s nenulovými prvky  $q_1 | \dots | q_r$  na diagonále, pak*

$$\mathbb{Z}^n / \text{im } S \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/q_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r \times \mathbb{Z}^{n-r}$$

*Důkaz.* Potřebné zobrazení se definuje snadno

$$(x^1, \dots, x^n) + \text{im } S \mapsto ([x^1], \dots, [x^r], x^{r+1}, \dots, x^n)$$

a je jednoduché ověřit, že se jedná o dobře definovaný homomorfismus grup. Stejně snadno se definuje i inverzní zobrazení.  $\square$

V kombinaci s předchozími úvahami dostáváme první část následující věty.

**Věta 10.7.** *Každá konečně generovaná komutativní grupa je izomorfní součinu cyklických grup*

$$(1) \quad \mathbb{Z}/q_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r \times \mathbb{Z}^k,$$

kde  $1 \neq q_1 | \dots | q_r$ . Dvě takové grupy jsou izomorfní, právě když se rovnají odpovídající řády  $q_1, \dots, q_r$  konečných cyklických faktorů a exponenty  $k$  beztorzních částí.

*Důkaz.* Existenční část plyne z toho, že každá konečně generovaná komutativní grupa má prezentaci a ta je ekvivalentní prezentaci ve Smithově normálním tvaru. Činitele tvaru  $\mathbb{Z}/1 = 0$  můžeme vynechat.

nd Jednoznačnost se dokáže následovně. Jsou-li dvě grupy tvaru (1) izomorfní, musí být izomorfní i jejich torzní části  $\mathbb{Z}/q_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r$ . Přitom  $q_r$  je řád největší konečné cyklické

podgrupy a musí být tedy stejný pro obě grupy. Součin zbylých konečných cyklických grup je kvocient torzní části podle její největší cyklické podgrupy a musí být tedy opět izomorfní pro obě grupy. Podle indukčního předpokladu se musí rovnat všechna odpovídající  $q_1, \dots, q_{r-1}$ . Kvocient podle torzní části je roven  $\mathbb{Z}^k$  a opět musí být tato grupa izomorfní odpovídající grupě  $\mathbb{Z}^{k'}$ . Tento izomorfismus je zprostředkován invertibilní maticí. Jelikož každá taková musí být nutně čtvercová, dostáváme  $k = k'$ .  $\square$

*Poznámka.* V tom důkazu jednoznačnosti je díra (největší cyklická podgrupa není jednoznačná a není jasné, proč by měl existovat izomorfismus velkých grup převádějící jednu na druhou), asi to chce fakt dělat přes vnější mocniny, viz níže.

Alternativní věta dává rozklad každé konečně generované komutativní grupy na součin cyklických grup, jejichž řád je mocninou prvočísla. To snadno plyne opět ze Smithova normálního tvaru: jelikož je grupa  $\mathbb{Z}/p_1^{k_1} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_r^{k_r}$  prezentována diagonální maticí s čísly  $p_1^{k_1}, \dots, p_r^{k_r}$  na diagonále a tato má invariantní faktory  $1, \dots, 1, p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$  (jelikož  $d_{r-1} = 1$ ), platí

$$\mathbb{Z}/p_1^{k_1} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_r^{k_r} \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

(tomuto tvrzení se také říká Čínská zbytková věta). V opačném směru pak lze každou cyklickou grupu rozložit na součin cyklických grup, jejichž řád je mocninou prvočísla. Tento rozklad je také jednoznačný.

### \*\* 10.3. Poznámky

Je-li  $M$  konečná, lze dát invariantnímu faktoru  $q_n$  následující význam. Jedná se o nejmenší číslo  $t$ , pro které  $M \cdot t = 0$ , tedy nejmenší číslo dělitelné řádem každého prvku. Poněkud abstraktněji definujme  $\text{Ann}(M) = \{t \in \mathbb{Z} \mid M \cdot t = 0\}$ , anihilátor komutativní grupy  $M$ . Jedná se vždy o podgrupu a platí  $\text{Ann}(M) = q_n \cdot \mathbb{Z}$ .

*Poznámka.* Předchozí platí i pro konečně generované komutativní grupy – pokud  $k > 0$ , je poslední invariantní faktor  $q_n = 0$  a 0 je vzhledem k dělitelnosti nejmenší  $t$  s vlastností  $M \cdot t = 0$  (neboli  $t$  generuje  $\text{Ann}(M) = 0$ ).

Podobnou interpretaci lze dát s trochou práce i zbývajícím invariantním faktorům, konkrétně

$$\text{Ann}(\Lambda^{n+1-i} M) = q_i \cdot \mathbb{Z},$$

k tomu je však potřeba definovat vnější mocniny komutativních grup, což značně přesahuje obsah kurzu.

*Poznámka.* Základ je formulka  $\Lambda^k(M_1 \oplus M_2) = \bigoplus_{k_1+k_2=k} \Lambda^{k_1} M_1 \otimes \Lambda^{k_2} M_2$  a  $\Lambda^2 \mathbb{Z}/q = 0$ .

Vzhledem k jednoznačnosti z předchozí věty můžeme zformulovat jednoznačnost prezentace konečně generované komutativní grupy. Pro každé dvě prezentace musí jejich Smithovy normální tvary být shodné až na jedničky na diagonále (ty zhruba řečeno odpovídají přidání nového generátoru  $x$  společně s relací  $x = 0$ ) a nadbytečné nulové sloupce (ty zase odpovídají relacím, které lze odvodit z ostatních relací).

Mají-li matice  $R, S$  stejné rozměry, pak prezentují stejnou grupu, právě když jsou ekvivalentní (ve smyslu, že je lze na sebe převést řádkovými a sloupcovými úpravami).

## \* 11. Smithův normální tvar polynomiálních matic

### \* 11.1. Polynomiální matice

Polynomiální matice tvaru  $n \times m$  je kolekce polynomů  $A = (a_j^i)$  indexovaná dvojicemi  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ . Tedy  $a_j^i$  je polynom, přesněji polynom s koeficienty v tělese  $\mathbb{K}$  a v proměnné  $\lambda$ . Píšeme  $A \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{K}[\lambda]$ .

**Lemma 11.1.** *Polynomiální matice  $A$  je invertibilní, právě když je čtvercová a její determinant je nenulový konstantní.*

*Důkaz.* Důkaz se provede stejně jako pro celočíselné matice. □

**Věta 11.2** (o Smithově normálním tvaru). *Pro libovolnou polynomiální matici  $A$  existují invertibilní polynomiální matice  $P$  a  $Q$  takové, že*

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & q_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde  $q_1|q_2|\cdots|q_r$  se postupně dělí. Polynomy  $q_i$  se nazývají invariantní faktory, pravá strana se nazývá Smithův normální tvar polynomiální matice  $A$ . Každý jiný takový se liší pouze vynásobením  $q_i$  nenulovou konstantou. Konkrétněji platí  $q_i = d_i/d_{i-1}$ , kde

$$d_i = \gcd\{\det S \mid S \text{ je submatice } A \text{ tvaru } i \times i\}$$

*Důkaz.* Důkaz se provede stejně jako pro celočíselné matice; jeho základem byl Eukleidův algoritmus, který funguje i pro  $\mathbb{K}[\lambda]$ . □

Opět můžeme vyžadovat polynomy  $q_i$  normované, dostaneme pak Smithův normální tvar zcela jednoznačně.

*Poznámka.* Je zajímavé se zamyslet nad tím, které (komutativní) okruhy umožňují Smithův normální tvar. Potřebujeme nějakou formu Eukleidova algoritmu a pro tzv. Eukleidovské obory (obory integrity s Eukleidovým algoritmem) není naprosto žádný problém. Ve skutečnosti lze tuto větu zobecnit na obory hlavních ideálů (obory integrity, kde každý ideál je hlavní), nevystačíme si však již s elementárními operacemi: k vyrobení největšího společného dělitele nestačí odčítat násobky, ale jsou potřeba obecnější (invertibilní) lineární kombinace. Ve výsledku se dá ukázat, že nad obory hlavních ideálů již není každá invertibilní matice součinem elementárních. Rozdíl mezi invertibilními maticemi a součiny elementárních matic je jedním z důležitých aspektů studovaných algebraickou  $K$ -teorií okruhu  $R$ . Ta je velmi důležitá v rozličných odvětvích matematiky – od geometrie, přes algebru až k teorii čísel.



Stejně jako celočíselné matice měly vztah ke konečně generovaným komutativním grupám a jejich prezentacím, mají také polynomiální matice vztah k nějakým matematickým objektům a jejich prezentacím. Pokusme se jejich definici motivovat následujícím porovnáním

číselné matice $A \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{K}$	lineární zobrazení $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$
celočíselné matice $A \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{Z}$	homomorfismy grup $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$
polynomiální matice $A \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{K}[\lambda]$	homomorfismy ??? $\mathbb{K}[\lambda]^m \rightarrow \mathbb{K}[\lambda]^n$

**Definice 11.3.** Necht  $M$  je komutativní grupa. Řekneme, že  $M$  je  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul, jestliže je zadáno zobrazení

$$\mathbb{K}[\lambda] \times M \rightarrow M, \quad (p, x) \mapsto p \cdot x,$$

nazývané „násobení skaláry“, splňující obvyklé axiomy vektorového prostoru

$$\begin{aligned} p \cdot (q \cdot x) &= (p \cdot q) \cdot x \\ 1 \cdot x &= x \\ p \cdot (x + y) &= p \cdot x + p \cdot y \\ (p + q) \cdot x &= p \cdot x + q \cdot x \end{aligned}$$

**Příklad.** Důležitým  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulem je  $\mathbb{K}[\lambda]^n$ , tj. množina všech  $n$ -tic polynomů společně se sčítáním po složkách a násobením po složkách

$$p \cdot (q_1, \dots, q_n) = (pq_1, \dots, pq_n)$$

Každý  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul  $M$  je automaticky vektorovým prostorem nad  $\mathbb{K}$ : když umíme prvky  $M$  násobit polynomy, umíme je zejména násobit konstantními polynomy, které lze jednoduše ztotožnit s prvky tělesa  $\mathbb{K}$ , lze psát

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}[\lambda].$$

Zároveň násobení lineárním polynomem  $\lambda$  je zobrazení

$$m_\lambda: M \rightarrow M, \quad x \mapsto \lambda \cdot x,$$

o kterém ověříme, že se jedná o lineární zobrazení:

$$m_\lambda(ax + by) = \lambda \cdot ax + \lambda \cdot by = (a\lambda) \cdot x + (b\lambda) \cdot y = a(m_\lambda x) + b(m_\lambda y)$$

**Věta 11.4.** Předchozí konstrukce zadává bijektivní korespondenci

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{K}[\lambda]\text{-moduly } M\} & \xleftrightarrow{\quad} & \left\{ \begin{array}{l} \text{dvojice } (V, T), \text{ kde } V \text{ je vektorový} \\ \text{prostor a } T: V \rightarrow V \text{ je operátor} \end{array} \right\} \\ M & \longmapsto & (M, m_\lambda) \\ V & \longleftarrow & (V, T) \end{array}$$

V dalším budeme pro operátor  $T$  na vektorovém prostoru  $V$  používat pro odpovídající  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul označení  $(V, T)$ .

## 11. Smithův normální tvar polynomiálních matic

*Důkaz.* Zbývá ukázat, jak se pro operátor  $T: V \rightarrow V$  na vektorovém prostoru  $V$  definuje násobení skaláry z  $\mathbb{K}[\lambda]$ . Má-li se jednat o inverzi ke konstrukci  $(M, m_\lambda)$ , jsme nuceni položit

$$px = (p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_k\lambda^k)x = p_0x + p_1Tx + \cdots + p_kT^kx,$$

kde  $T^i x$  značí  $i$ -násobnou iteraci operátoru  $T$ , tj.

$$T^i x = (T \circ \cdots \circ T)x = T(\cdots T(Tx) \cdots);$$

je totiž  $\lambda^i x = \lambda(\cdots \lambda(\lambda x) \cdots) = T(\cdots T(Tx) \cdots)$ .  $\square$

Z předchozího důkazu si zapamatujme vztah pro násobení polynomem  $p$  na  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulu  $(V, T)$ . Budeme ho zapisovat ve tvaru

$$p \cdot x = p(T)x,$$

kde  $p(T)$  značí, tak jako v důkazu, výsledek formálního dosazení operátoru  $T$  do polynomu  $p$ , tj.  $p(T) = p_0 \text{Id} + p_1 T + \cdots + p_k T^k$ .

*Poznámka.* Hlavní myšlenkou předchozího důkazu je, že okruh polynomů  $\mathbb{K}[\lambda]$  je generovaný tělesem  $\mathbb{K}$  a jedním prvkem  $\lambda$  splňujícím  $a \cdot \lambda = \lambda \cdot a$ , tedy prvek  $\lambda$  je přidán „volně“ pouze s tím, že má komutovat se všemi prvky z původního tělesa. Pro strukturu modulu to znamená, že musíme zadat násobení prvky tělesa  $\mathbb{K}$  (strukturu vektorového prostoru) a násobení prvkem  $\lambda$ , kde jedinou podmínkou je, že tyto mají komutovat, tj. násobení prvkem  $\lambda$  musí být lineární. To je přesně tvrzení věty.

*Poznámka.* Výhodou uvažování  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů namísto operátorů je to, že základním stavebním kamenem (konečně generovaných)  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů je  $\mathbb{K}[\lambda]^n$  (jak za chvíli uvidíme), který je jako vektorový prostor s operátorem nekonečně rozměrný a tedy z pohledu lineární algebry dost netypický. Konkrétně  $\mathbb{K}[\lambda]$  jako vektorový prostor je

$$\mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}_0} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0: \forall l \geq k: a_l = 0\},$$

množina posloupností čísel (odpovídajících posloupnostem koeficientů polynomů), která jsou od jistého indexu počínaje všechna nulová. Operátor je pak dán

$$(a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots)$$

Dalším přirozeným pojmem je homomorfismus  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů, který je přímou analogií lineárního zobrazení.

**Definice 11.5.** Necht'  $M, N$  jsou dva  $\mathbb{K}[\lambda]$ -moduly. Zobrazení  $\varphi: M \rightarrow N$  se nazývá *homomorfismem  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů*, jestliže platí

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(px) = p\varphi(x).$$

pro libovolná  $x, y \in M$  a  $p \in \mathbb{K}[\lambda]$ .

Opět převedeme tento pojem do řeči operátorů. Je zřejmé zúžením definiční podmínky na konstantní polynomy, že každý homomorfismus  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů je lineární zobrazení.

**Tvrzení 11.6.** Necht' jsou dány operátory  $T$  na  $V$  a  $S$  na  $U$ . Lineární zobrazení  $\varphi: V \rightarrow U$  je homomorfismus  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů, právě když komutuje následující diagram.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & U \\ T \downarrow & & \downarrow S \\ V & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

*Důkaz.* Jelikož je  $\varphi$  lineární, zachovává násobení všemi konstantními polynomy. Zbývá tedy zkontrolovat zachovávání násobení polynomem  $\lambda$ , ale to jsou přesně operátory v diagramu.  $\square$

V případě, že je  $\varphi$  invertibilní, lze předchozí diagram přepsat jako  $S = \varphi T \varphi^{-1}$ , tj. operátory  $S, T$  jsou podobné.

Vraťme se k naší původní motivaci s polynomiálními maticemi.

**Lemma 11.7.** *Nechť  $a_1, \dots, a_n \in M$  jsou libovolné prvky  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulu  $M$ . Pak existuje jediný homomorfismus  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů  $\varphi: \mathbb{K}[\lambda]^n \rightarrow M$  splňující  $\varphi(e_i) = a_i$ , kde  $e_i$  je opět  $n$ -tice polynomů  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  s konstantním polynomem 1 na  $i$ -tém místě.*

*Speciálně homomorfismy  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů  $\mathbb{K}[\lambda]^m \rightarrow \mathbb{K}[\lambda]^n$  jsou v bijekci s polynomiálními maticemi  $A \in \text{Mat}_{n \times m} \mathbb{K}[\lambda]$ , jejímž  $i$ -tým sloupcem je právě obraz  $e_i$ . Příslušný homomorfismus je dán  $x \mapsto Ax$ .*

*Důkaz.* Vše je jasné z rovnosti

$$\begin{aligned} \varphi(p^1, \dots, p^n) &= \varphi(e_1 p^1 + \dots + e_n p^n) = \varphi(e_1) p^1 + \dots + \varphi(e_n) p^n \\ &= a_1 p^1 + \dots + a_n p^n. \end{aligned}$$

Naopak výsledný vzorec je homomorfismus  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů pro libovolné  $a_1, \dots, a_n \in M$ .  $\square$

V dalším se nám ještě budou hodit kvocienty  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů. Nechť  $M$  je  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul. Podmodul  $N \subseteq M$  je podmnožina uzavřená na nulu, sčítání a násobení skaláry. Zejména je  $N$  podgrupa vzhledem ke sčítání. Na kvocientu grup  $M/N$  definujeme strukturu  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulu následovně:

$$(x + N) \cdot p \stackrel{\text{def}}{=} xp + N$$

Je jednoduché ověřit, že se jedná o dobře definované zobrazení, které splňuje všechny axiomy  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulu.

### \* 11.2. Kanonická prezentace operátoru na $\mathbb{K}^n$

Nechť  $T: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  je operátor na  $\mathbb{K}^n$  a uvažujme příslušný  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul  $(\mathbb{K}^n, T)$ . Narozdíl od situace pro konečně generované komutativní grupy existuje kanonická prezentace (tj. taková, která nezávisí na žádných volbách). Uvažujme homomorfismus  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů

$$\varphi: \mathbb{K}[\lambda]^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

jednoznačně určený tím, že posílá  $e_i \mapsto e_i$ , kde na levé straně je  $e_i$  interpretováno jako  $n$ -tice polynomů, zatímco na pravé straně jako  $n$ -tice čísel<sup>6</sup>. V obou případech se jedná o  $n$ -tici složenou z 1 na  $i$ -tém místě a z 0 na zbylých místech. Zřejmě je  $\varphi$  surjektivní zobrazení, popíšeme nyní jeho jádro a dostaneme tím prezentaci pro  $(\mathbb{K}^n, T)$ .

**Tvrzení 11.8.** *Nechť  $T$  je operátor na  $\mathbb{K}^n$ . Potom*

$$\mathbb{K}[\lambda]^n \xrightarrow{T - \lambda E} \mathbb{K}[\lambda]^n \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{K}^n, T)$$

*je prezentace příslušného  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulu.*

<sup>6</sup>Alternativní pohled na prvky  $\mathbb{K}[\lambda]^n$  je jako polynomy s koeficienty v  $\mathbb{K}^n$ . Zobrazení je pak dáno předpisem  $v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda^k v_k \mapsto v_0 + T v_1 + \dots + T^k v_k$ .

## 11. Smithův normální tvar polynomiálních matic

*Důkaz.* Zbývá ukázat, že

$$\text{im}(T - \lambda E) = \ker \varphi.$$

Zprvce platí  $\varphi \circ (T - \lambda E) = 0$ , neboť pro generátory  $e_i \in \mathbb{K}[\lambda]^n$  platí

$$\varphi \circ (T - \lambda E)(e_i) = \varphi(Te_i - \lambda e_i) = Te_i - \lambda e_i = 0.$$

Proto  $\text{im}(T - \lambda E) \subseteq \ker \varphi$ . K opačné implikaci píšme pro  $v \in \mathbb{K}[\lambda]^n$

$$v = v_0 + \lambda v_1 + \cdots + \lambda^k v_k,$$

kde  $v_0, v_1, \dots, v_k$  jsou  $n$ -tice konstantních polynomů. Zjevně platí

$$v \equiv v_0 + Tv_1 + \cdots + T^k v_k \pmod{\text{im}(T - \lambda E)},$$

což je  $n$ -tice konstantních polynomů, která při ztotožnění s  $\mathbb{K}^n$  přesně odpovídá  $\varphi(v)$ . Pokud tedy předpokládáme  $v \in \ker \varphi$ , dostáváme  $v \equiv 0$  modulo  $\text{im}(T - \lambda E)$  a tedy  $v \in \text{im}(T - \lambda E)$ . Platí proto i opačná inkluze  $\ker \varphi \subseteq \text{im}(T - \lambda E)$ .  $\square$

*Poznámka.* Poslední tvrzení dává velice uspokojivé zdůvodnění, proč v matici  $T - \lambda E$  je obsaženo vše podstatné týkající se operátoru  $T$ . To se tradičně vysvětluje přes kořenové podprostory. Předchozí tvrzení však platí nezávisle na tom, zda těleso  $\mathbb{K}$  je algebraicky uzavřené a hodí se ke zkoumání operátoru i nad obecnými tělesy.

Nyní dáme dohromady kanonickou prezentaci se Smithovým normálním tvarem tak, jak jsme učinili pro konečně generované komutativní grupy. Nechť Smithův normální tvar  $T - \lambda E$  je polynomiální matice  $S(\lambda)$ . Její vztah ke kanonické prezentaci je vyjádřen v následujícím diagramu

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}[\lambda]^n & \xrightarrow{T - \lambda E} & \mathbb{K}[\lambda]^n & \longrightarrow & (\mathbb{K}^n, T) \\ Q(\lambda) \downarrow \cong & & \cong \downarrow P(\lambda) & & \downarrow \cong \\ \mathbb{K}[\lambda]^n & \xrightarrow{S(\lambda)} & \mathbb{K}[\lambda]^n & \longrightarrow & \mathbb{K}[\lambda]^n / \text{im } S(\lambda) \end{array}$$

Opět se jednoduše přesvědčíme, že

$$\mathbb{K}[\lambda]^n / \text{im } S(\lambda) \cong \mathbb{K}[\lambda]/(q_1) \times \cdots \times \mathbb{K}[\lambda]/(q_n),$$

kde  $q_1 | \cdots | q_n$  jsou polynomy vyskytující se na diagonále Smithova normálního tvaru  $S(\lambda)$ .

**Věta 11.9.** *Dva operátory  $T, T'$  jsou podobné, právě když polynomiální matice  $T - \lambda E, T' - \lambda E$  mají též Smithův normální tvar. Zejména lze problém podobnosti řešit algoritmicky.*

*Poznámka.* Nad algebraicky uzavřeným tělesem lze problém podobnosti „řešit“ s pomocí Jordanova kanonického tvaru. Algoritmicky je však tento přístup nevhodný, protože obecně nelze spočítat vlastní čísla a tím pádem ani Jordanův kanonický tvar. Na druhou stranu Smithův normální tvar je zcela algoritmický.

*Důkaz.* Jsou-li operátory  $T$  a  $T'$  podobné,  $T' = PTP^{-1}$ , budou podobné i

$$T' - \lambda E = P(T - \lambda E)P^{-1}.$$

Tím spíš budou ekvivalentní a proto budou mít též Smithův normální tvar.

Nechť naopak  $T - \lambda E, T' - \lambda E$  mají též Smithův normální tvar. Potom jsou ekvivalentní a podle předchozího diagramu jsou izomorfní prezentované moduly  $(\mathbb{K}^n, T) \cong (\mathbb{K}^n, T')$ . To ale přesně znamená, že operátory jsou podobné podle Tvrzení 11.6.  $\square$

*Poznámka.* Výhodou oproti případu komutativních grup je existence kanonické prezentace. O něco obtížněji lze také dokázat, že dva  $\mathbb{K}[\lambda]$ -moduly prezentované libovolnými (v kontrastu s kanonickými) polynomiálními maticemi týchž rozměrů jsou izomorfní, právě když mají tyto matice též Smithův normální tvar; viz případ komutativních grup.

Místo Jordanova kanonického tvaru je možné popsat jiný kanonický tvar, který nevyžaduje nalezení kořenů charakteristického polynomu a lze jej spočítat algoritmicky. Jelikož je

$$(\mathbb{K}^n, T) \cong \mathbb{K}[\lambda]/(q_1) \times \cdots \times \mathbb{K}[\lambda]/(q_n),$$

stačí popsat  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul  $\mathbb{K}[\lambda]/(q)$  jako vektorový prostor společně s operátorem. Nalezneme vhodnou (kanonickou) bázi a v ní matici příslušného operátoru  $m_\lambda$ . Necht'  $q = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k$ . Potom takovou bází je  $\alpha = ([1], [\lambda], \dots, [\lambda^{k-1}])$  a jednoduše

$$(m_\lambda)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Tedy  $(\mathbb{K}^n, T)$  má ve vhodné bázi blokově diagonální tvar s bloky výše uvedeného tvaru na diagonále. Tento tvar se nazývá *racionální kanonický tvar* operátoru – pro jeho kanoničnost je však nutno vyžadovat, aby se polynomy příslušné jednotlivým blokům postupně dělily tak jako ve Smithově normálním tvaru.

Invariantní faktor  $q_n$  má poměrně jednoduchou interpretaci v řeči  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů, z níž lze jednoduše dokázat následující větu.

**Tvrzení 11.10** (Cayleyho–Hamiltonova věta). *Necht'  $\chi(\lambda) = \det(T - \lambda E)$  značí charakteristický polynom  $T$ . Potom platí  $\chi(T) = 0$ .*

*Důkaz.* Z věty o Smithově normálním tvaru platí  $\chi = q_1 \cdots q_n$ . Přitom pro libovolné

$$x \in \mathbb{K}[\lambda]/(q_1) \times \cdots \times \mathbb{K}[\lambda]/(q_n)$$

zjevně platí  $q_n x = 0$ . Protože je však tento  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul izomorfní  $(\mathbb{K}^n, T)$ , platí to samé i pro  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul  $(\mathbb{K}^n, T)$ . Pro libovolné  $v \in \mathbb{K}^n$  tak máme  $q_n(T)v = 0$ . Protože ale toto platí pro libovolné  $v$ , musí být  $q_n(T) = 0$  jakožto operátory na  $\mathbb{K}^n$ . Tím spíš tedy  $\chi(T) = 0$ .  $\square$

**Definice 11.11.** Z důkazu předchozí věty plyne, že ve skutečnosti platí již  $q_n(T) = 0$  a není těžké se přesvědčit, že  $q_n$  je nejmenší polynom (vzhledem k dělitelnosti), pro který tento vztah platí. Nazývá se *minimální polynom* operátoru  $T$ .

*Poznámka.* Opět poněkud abstraktněji lze minimální polynom popsat následovně. Definujme anihilátor  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulu  $M$  jako

$$\text{Ann}(M) = \{p \in \mathbb{K}[\lambda] \mid p \cdot M = 0\}.$$

Není těžké se přesvědčit, že se vždy jedná o ideál a v našem případě je  $\text{Ann}(M) = (q_n)$ . Opět s trochou práce lze dát význam i zbylým invariantním faktorům,

$$\text{Ann}(\Lambda_{\mathbb{K}[\lambda]}^{n-i+1} M) = (q_i),$$

### 11. Smithův normální tvar polynomiálních matic

kde například  $\Lambda_{\mathbb{K}[\lambda]}^2 M$  je kvocient  $\Lambda^2 M$  podle podprostoru generovaného rozdíly  $Tx \wedge y - x \wedge Ty$ . Operátor na tomto kvocientu je zadán předpisem

$$T[x \wedge y] \stackrel{\text{def}}{=} [Tx \wedge y] = [x \wedge Ty].$$

#### \* 11.3. Jordanův kanonický tvar

Jelikož Smithův normální tvar  $T - \lambda E$  zcela určuje operátor  $T$  až na podobnost, nemělo by být překvapením, že z něj lze spočítat Jordanův kanonický tvar  $T$ . Necht' proto nyní  $\mathbb{K}$  je algebraicky uzavřené těleso. Potom každý cyklický modul  $\mathbb{K}[\lambda]/(q)$  lze psát s využitím rozkladu  $q = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$  ve tvaru<sup>7</sup>

$$\mathbb{K}[\lambda]/(q) \cong \mathbb{K}[\lambda]/((\lambda - \lambda_1)^{r_1}) \times \cdots \times \mathbb{K}[\lambda]/((\lambda - \lambda_k)^{r_k})$$

(formální podobnost s rozkladem na prvčinitele není vůbec náhodná). Zbývá tedy popsat  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul tvaru

$$\mathbb{K}[\lambda]/((\lambda - \lambda_0)^r).$$

**Tvrzení 11.12.** *Cyklický  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul  $\mathbb{K}[\lambda]/((\lambda - \lambda_0)^r)$  je izomorfní operátoru na  $\mathbb{K}^r$  s maticí*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

*Důkaz.* Jakožto vektorový prostor má  $\mathbb{K}[\lambda]/((\lambda - \lambda_0)^r)$  bázi

$$((\lambda - \lambda_0)^{r-1}, \dots, [\lambda - \lambda_0], [1])$$

Počítejme matici operátoru  $m_\lambda$  (násobení polynomem  $\lambda$ ) vzhledem k této bázi. Zjevně platí

$$\lambda[(\lambda - \lambda_0)^{i-1}] = ((\lambda - \lambda_0) + \lambda_0)[(\lambda - \lambda_0)^{i-1}] = [(\lambda - \lambda_0)^i] + \lambda_0[(\lambda - \lambda_0)^{i-1}].$$

V případě  $i = r$  pak  $[(\lambda - \lambda_0)^r] = 0$  a dostáváme přesně matici z tvrzení.  $\square$

**Věta 11.13.** *Je-li těleso  $\mathbb{K}$  algebraicky uzavřené, je každý operátor podobný operátoru v Jordanově kanonickém tvaru. Obecněji tvrzení platí pro operátor  $T$  nad libovolným tělesem, nad kterým se charakteristický polynom  $T$  zcela rozkládá.*  $\square$

\*\* Je-li  $T - \lambda E$  ekvivalentní  $J - \lambda E$ , řekněme

$$J - \lambda E = P(\lambda)(T - \lambda E)Q(\lambda)$$

<sup>7</sup>Jednoduchý důkaz tohoto faktu využívá Smithův normální tvar –  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul napravo je prezentován diagonální maticí s mocninami  $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$  na diagonále; její Smithův normální tvar má na diagonále  $1, \dots, 1, q$ .

(nyní u  $P(\lambda)$  nebudeme psát inverzi, protože v tomto tvaru dostaneme výsledek z algoritmu počítajícího Smithův normální tvar), lze spočítat matice přechodu mezi oběma operátory. Začneme s maticí přechodu od  $T$  k  $J$ . Tu dostaneme z následujícího diagramu

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}[\lambda]^n & \xrightarrow{T-\lambda E} & \mathbb{K}[\lambda]^n & \xleftarrow{\quad} & (\mathbb{K}^n, T) \\ \cong \uparrow Q(\lambda) & & \cong \downarrow P(\lambda) & & \cong \downarrow R \\ \mathbb{K}[\lambda]^n & \xrightarrow{J-\lambda E} & \mathbb{K}[\lambda]^n & \xrightarrow{\text{ev}_J} & (\mathbb{K}^n, J) \end{array}$$

naznačené zobrazení  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}[\lambda]^n$  zobrazí  $n$ -tici čísel na  $n$ -tici příslušných konstantních polynomů (a nejedná se o homomorfismus  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů). Složením dostaneme pro

$$P = P_0 + \lambda P_1 + \cdots + \lambda^k P_k$$

následující vyjádření pro matici přechodu  $R$ :

$$v \mapsto \text{ev}_J(P(\lambda)v) = P_0 v + J P_1 v + \cdots + J^k P_k v = P^{\text{left}}(J)v,$$

kde poslední zápis značí dosazení matice  $J$  do polynomiální matice  $P(\lambda)$  zleva.

\*\* Matice přechodu v opačném směru lze získat buď jako inverzní matici k  $P^{\text{left}}(J)$  nebo pomocí transponování všech matic (formálně přechodu k duálním prostorům). Konkrétně dostáváme diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}[\lambda]^n & \xrightarrow{T^*-\lambda E} & \mathbb{K}[\lambda]^n & \xleftarrow{\quad} & (\mathbb{K}^n, T^*) \\ \cong \uparrow P^*(\lambda) & & \cong \downarrow Q^*(\lambda) & & \cong \downarrow S^* \\ \mathbb{K}[\lambda]^n & \xrightarrow{J^*-\lambda E} & \mathbb{K}[\lambda]^n & \longrightarrow & (\mathbb{K}^n, J^*) \end{array}$$

nebo jednodušeji rovnicí

$$J^* - \lambda E = Q^*(\lambda)(T^* - \lambda E)P^*(\lambda)$$

Podle předchozího dostáváme  $S^* = (Q^*)^{\text{left}}(J^*)$  a zpětným transponováním

$$\begin{aligned} S &= ((Q^*)^{\text{left}}(J^*))^* = (Q_0^* + J^* Q_1^* + \cdots + (J^*)^k Q_k^*)^* \\ &= Q_0 + Q_1 J + \cdots + Q_k J^k = Q^{\text{right}}(J). \end{aligned}$$

Jelikož je  $S$  matice přechodu od  $J$  k  $T$ , skládají se její sloupce z vektorů báze, v níž  $T$  nabývá Jordanova kanonického tvaru  $J$ . Matici  $Q(\lambda)$  lze získat tak, že veškeré sloupcové operace provádíme zároveň na matici  $T - \lambda E$  a na jednotkové matici (řádkové operace však pouze na  $T - \lambda E$ ). Pokud takto převedeme  $T - \lambda E$  na  $J - \lambda E$ , vytvoří sloupcové operace přesně matici  $Q(\lambda)$ . Dosadíme-li pak do ní matici  $J$  zprava, získáme hledanou matici přechodu  $S$ .

\*\* Vhodnou adaptací lze výpočet zjednodušit. Není potřeba pomocí dalších operací převádět Smithův normální tvar na  $J - \lambda E$ , neboť lze využít bázi  $\mathbb{K}[\lambda]^n / \text{im } B$  z důkazu Tvzení 11.12, kde  $B$  je Smithův normální tvar  $T - \lambda E$ . Uveďme si to na zásadním příkladu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\lambda - \lambda_0)^r \end{pmatrix}$$

## 11. Smithův normální tvar polynomiálních matic

Potom forma  $f^i$  na prostoru  $\mathbb{K}^n$  vpravo nahoře se zobrazí na formu na  $\mathbb{K}[\lambda]^n$  s tímž názvem, dále pak pomocí  $Q^*(\lambda)$  na  $f^i Q(\lambda)$ , tj. na  $i$ -tý řádek matice  $Q(\lambda)$ . Na závěr je potřeba spočítat, jakou formu na  $\mathbb{K}^n$  v pravém dolním rohu tato reprezentuje. Vyjádříme ji proto ve tvaru<sup>8</sup>

$$f^i Q(\lambda) \equiv \sum_j f^r (\lambda - \lambda_0)^j a_j^i$$

modulo  $\text{im } B = (f^1, \dots, f^{r-1}, f^r(\lambda - \lambda_0)^r)$ . Matice  $a_j^i$  je hledanou maticí přechodu (v případě  $B = J - \lambda E$  se výpočet zjednodušil tím, že počítání modulo  $\text{im } B$  je dosazování  $J$ ).

*Poznámka.* Protože chceme dostat v Jordanově kanonickém tvaru  $J$  a nikoliv  $J^*$ , je vhodnou bází opravdu  $(f^r, \dots, f^r(\lambda - \lambda_0)^{r-1})$ , tj. pořadí je opačné oproti Tvzení 11.12. K hlubšímu pochopení by bylo potřeba přesněji popsat vztah mezi coker  $S(\lambda)$  a coker  $S^*(\lambda)$ , který jsme pro  $S(\lambda) = J - \lambda E$  s pomocí  $\text{coker}(J - \lambda E) \cong (\mathbb{K}^n, J)$  používali v předchozím.

\*\* O něco složitější, ale stále zvládnutelný, je případ, kdy  $q = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ . Pak za bázi kvocientu  $\mathbb{K}[\lambda]/(q)$  lze vzít polynomy

$$\left( \frac{q}{\lambda - \lambda_1}, \dots, \frac{q}{(\lambda - \lambda_1)^{r_1}}, \dots, \frac{q}{\lambda - \lambda_k}, \dots, \frac{q}{(\lambda - \lambda_k)^{r_k}} \right)$$

(Žádnou jejich číselnou lineární kombinací nemůžeme získat nenulový násobek  $q$ . Budeme-li psát  $a_{r_\ell-1} \frac{q}{\lambda - \lambda_\ell} + \dots + a_0 \frac{q}{(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell}} = (a_{r_\ell-1}(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell-1} + \dots + a_0) \frac{q}{(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell}} = p_\ell \frac{q}{(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell}}$ , lze lineární kombinaci přepsat do tvaru  $p_1 \frac{q}{(\lambda - \lambda_1)^{r_1}} + \dots + p_k \frac{q}{(\lambda - \lambda_k)^{r_k}}$  a její nulovost dává  $(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell} \mid p_\ell$ , protože ostatní členy jsou  $(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell}$  dělitelné a naopak  $\frac{q}{(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell}}$  je s ním nesoudělné. Protože je ale stupeň  $p_\ell$  menší než  $r_\ell$ , musí být  $p_\ell = 0$ .)

\*\* Matice  $m_\lambda$  je v této bázi v Jordanově kanonickém tvaru postupně s bloky příslušnými  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  rozměrů  $r_1, \dots, r_k$ . Položíme-li  $r = r_1 + \dots + r_k$ , je pro výpočet  $i$ -tého řádku potřeba vyjádřit

$$f^i Q(\lambda) \equiv \sum_{\ell, j} f^r \frac{q}{(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell - j}} a(\ell)_j^i$$

modulo  $\text{im } B = (f^1, \dots, f^{r-1}, f^r q)$ , kde  $a(\ell)$  značí  $\ell$ -tý sloupcový blok matice přechodu, tj.  $a(\ell)_j$  je  $j$ -tý bázový vektor  $\ell$ -tého bloku Jordanovy báze.<sup>9</sup>

### Kontrolní otázky

1. Jak se mění determinant polynomiální matice při provádění jednotlivých elementárních řádkových operací?
2. Napište dva maticové polynomy stupně 1, jejichž součin je polynom stupně 1.
3. Vysvětlete, jaký je vztah mezi podobností matic a ekvivalencí jejich charakteristických matic.
4. Vyslovte definici kanonického tvaru polynomiální matice. Proč je tento kanonický tvar určen jednoznačně?

<sup>8</sup>Koeficienty  $a_j^i$  jsou až na faktor  $\frac{1}{(r-j)!}$  členy Taylorova rozvoje polynomu  $(f^i Q(\lambda))_r$  (tj. prvku  $Q(\lambda)_r^i$  matice  $Q(\lambda)$ ) v bodě  $\lambda_0$ .

<sup>9</sup>Opět lze koeficienty  $a(\ell)_j^i$  získat z Taylorových polynomů  $Q(\lambda)_r^i$  a  $\frac{q}{(\lambda - \lambda_\ell)^{r_\ell}}$  v bodech  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .



5. Jaký je vztah mezi maticí  $J$  v Jordanově kanonickém tvaru a kanonickým tvarem její charakteristické matice  $J - \lambda E$ ? Napište několik matic v Jordanově kanonickém tvaru s více buňkami různých velikostí a s několika vlastními čísly a k nim najděte příslušný kanonický tvar charakteristické matice.
6. Vyslovte definici minimálního polynomu matice  $A \neq 0$ . Jak najdeme minimální polynom matice pomocí kanonického tvaru její charakteristické matice? Najděte matice  $4 \times 4$  s minimálním polynomem stupně 1, 2, 3 a 4.

### Příklady k procvičení.

1. Najděte Jordanův kanonický tvar následujících matic  $A_i$  a matice podobnosti  $P_i$  takové, že  $J = P_i^{-1} \cdot A_i \cdot P_i$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 4 \\ 7 & -7 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -9 \\ 9 & -3 & -1 & -9 \\ 9 & 0 & -3 & -9 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Které z následujících matic jsou navzájem podobné?

$$B_1 = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[Řešení:  $B_1$  je podobná  $B_3$ ,  $B_2$ ,  $B_4$  a  $B_5$  jsou si navzájem podobné.]

3. Určete kanonické tvary charakteristických matic příslušných maticím

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

[Řešení:

$$K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-2)^3 \end{pmatrix}$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

4. Určete minimální polynom následujících matic

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

[Řešení:  $m_1 = (\lambda - 3)^2(\lambda - 4)$ ;  $m_2 = (\lambda - 3)^2$ ;  $m_3 = (\lambda - 3)^3$ ;  
 $m_4 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$ .]

5. Najděte matici, jejíž minimální polynom je

(a) polynom  $\lambda^2$  a matice má rozměry  $3 \times 3$

(b) polynom prvního řádu a matice má rozměry  $2 \times 2$

[Řešení: např. (a)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .]

# Dodatky

## A. Affine spaces through affine combinations

Let us skip at this point metric questions. The world around us is (a reasonable approximation to) an affine space rather than a vector space – it does not really make sense to speak about the origin. Clearly, every observer may treat himself as the origin but then certain notions of vector spaces depend on such a choice – e.g.  $\frac{1}{2}v$  is the point on half of the way to  $v$  and this certainly depends on the starting point. On the other hand  $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ , the midpoint of the segment between  $u$  and  $v$  is independent of the choice of the origin. When speaking about affine subspaces, we observed that it is possible to define affine combinations and that the affine subspaces are closed under them. We will base our definition of an affine space on *all* affine combinations because this keeps the axioms rather straightforward.

**Definition A.1.** An *affine space*  $\mathcal{S}$  is a set together with operations of *affine combinations*

$$\mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1\lambda_1 + \dots + x_n\lambda_n$$

for all  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  with  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  that satisfy the following axioms:

- $x_1\mathbf{0} + \dots + x_{i-1}\mathbf{0} + x_i\mathbf{1} + x_{i+1}\mathbf{0} + \dots + x_n\mathbf{0} = x_i$ ,
- $(x_1\lambda_{11} + \dots + x_n\lambda_{n1})\mu_1 + \dots + (x_1\lambda_{1m} + \dots + x_n\lambda_{nm})\mu_m = x_1(\lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1m}\mu_m) + \dots + x_n(\lambda_{n1}\mu_1 + \dots + \lambda_{nm}\mu_m)$ .

The axioms become very easy to write down if we set up the following notation: for an  $n$ -tuple of points  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  of  $\mathcal{S}$  and an  $n$ -tuple  $\ell = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  whose components add up to 1, we denote

$$\mathbf{x}\ell = x_1\lambda_1 + \dots + x_n\lambda_n,$$

and similarly for a matrix  $L = (\ell_1, \dots, \ell_m)$  we denote

$$\mathbf{x}L = (\mathbf{x}\ell_1, \dots, \mathbf{x}\ell_m).$$

Then the axioms become

$$\mathbf{x}E = \mathbf{x}, \quad (\mathbf{x}L)M = \mathbf{x}(LM).$$

A prime example of an affine space is a vector space, where the affine combinations are defined as the linear combinations in the vector space. In fact, we may recover all linear combinations from the affine ones by adding an appropriate multiple of the zero vector, i.e.

$$x_1\lambda_1 + \dots + x_n\lambda_n = o\lambda + x_1\lambda_1 + \dots + x_n\lambda_n,$$

where  $\lambda$  is such that the combination on the right is affine, i.e.  $\lambda = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$ . In fact, we may do the same in any affine space  $\mathcal{S}$  – by a choice of origin, we obtain a structure of a vector space on  $\mathcal{S}$ . Let us study now the effect of changing the origin:

$$P\lambda + X_1\lambda_1 + \dots + X_n\lambda_n \stackrel{?}{=} Q\lambda + X_1\lambda_1 + \dots + X_n\lambda_n$$

gives (by adding  $P(1 - \lambda) + X_1(-\lambda_1) + \dots + X_n(-\lambda_n)$ )

$$P = P(1 - \lambda) + Q\lambda$$

Then, for  $\lambda \neq 0$ , we get  $Q \in \langle P, P(1 - \lambda) + Q\lambda \rangle = \langle P, P \rangle = \{P\}$ , i.e.  $P = Q$ . On the other hand, if  $\lambda = 0$ , the result does not depend on the choice of  $P$ , so that we obtain the following result:

A linear combination does not depend on the choice of origin if and only if it is an affine combination.

We will now define the resulting vector space independently of the choice of origin, namely through the translations of  $\mathcal{S}$ . We say that a map

$$t: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

is a *translation* if it is of the form  $X \mapsto X + P_1\lambda_1 + \cdots + P_n\lambda_n$ , where  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ . We will understand the formal combination  $v = P_1\lambda_1 + \cdots + P_n\lambda_n$  as the *vector* that prescribes the translation, so that  $t$  is a translation by  $v$  given by  $t(X) = X + v$ . We obtain

$$t(X) = X + v = X + P + v - P = X + t(P) - P,$$

so that  $v = t(P) - P$  (regardless of  $P$ ). In other words, only formal combinations of the form  $Q - P$  are necessary to describe translations. Since the resulting translation maps  $P$  to  $Q$ , it is a translation by a “vector from  $P$  to  $Q$ ” and we denote this vector as  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ .

It is possible to formally add and scalar multiply formal linear combinations and it is not difficult to see that this passes to vectors (i.e. these operations produce ones on the set of translations). We will describe this in bigger generality later.

We would like to make formal distinction between vectors and translations. We consider the following mapping

$$\begin{aligned} \Phi: \{((P_1, \dots, P_n), (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \mid n \geq 0, P_1, \dots, P_n \in \mathcal{S}, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0\} &\longrightarrow \{\text{mappings } \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}\} \\ ((P_1, \dots, P_n), (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) &\longmapsto (X \mapsto X + P_1\lambda_1 + \cdots + P_n\lambda_n) \end{aligned}$$

We defined translations as the mappings in the image and we define vectors as elements of  $\text{dom } \Phi / \ker \Phi$ . The class of  $((P_1, \dots, P_n), (\lambda_1, \dots, \lambda_n))$  will be denoted by  $P_1\lambda_1 + \cdots + P_n\lambda_n$ . Thus,  $\Phi$  induces a bijection between vectors and translations. Also, we observed that there is a unique translation mapping  $P$  to  $Q$ , namely  $X \mapsto X + \overrightarrow{PQ}$ . The choice of origin  $P$  now provides the identification  $\mathcal{S} \xrightarrow{\cong} \text{Dir } \mathcal{S}, X \mapsto \overrightarrow{PX}$ .

A map  $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  is *affine* if it preserves affine combinations. We define its direction via

$$\varphi(P_1\lambda_1 + \cdots + P_n\lambda_n) = \varphi(P_1)\lambda_1 + \cdots + \varphi(P_n)\lambda_n.$$

It is not difficult to see that this does not depend on the representation of the vector. In particular  $\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$ . If this map is the identity, we have

$$Q - P = \varphi(Q - P) = \varphi(Q) - \varphi(P),$$

i.e.  $\varphi(Q) = Q + \varphi(P) - P$  and  $\varphi$  is a translation by the vector  $\varphi(P) - P$ . In other words, translations are affine maps with the underlying linear map the identity.

In the subsequent construction of a linear closure, we will need to consider arbitrary formal linear combinations, not only those whose coefficients add up to 0. Again, given  $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{S}$  and  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , we define the associated map

$$h(X) = X\lambda + P_1\lambda_1 + \cdots + P_n\lambda_n,$$

where  $\lambda = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$ . Such maps are called *homotheties*. When  $\lambda \neq 1$ , we may write

$$h(X) = X\lambda + \underbrace{(P_1 \frac{\lambda_1}{1-\lambda} + \dots + P_n \frac{\lambda_n}{1-\lambda})}_P \underbrace{(1-\lambda)}_\mu = X\lambda + P\mu$$

so that such homotheties are represented by a formal multiple  $P\mu$  (the point  $P$  is recovered as the unique fixed point –  $h(X) = X$  implies  $P \in \langle X, X\lambda + P\mu \rangle = \langle X, X \rangle = \{X\}$ ; the coefficient  $\mu$  is recovered as long as  $\dim \mathcal{S} > 0$ ). We will thus say that  $P_1\lambda_1 + \dots + P_n\lambda_n = P\mu$  is a point with weight  $\mu$ . Points with weight 0 are simply vectors. Another special case is a point of weight 1 – those are in bijection with points of  $\mathcal{S}$ .

We may now define the *linear closure*  $[\mathcal{S}]$  of  $\mathcal{S}$  to be the collection of all weighted points. It is simple to form linear combinations of formal linear combinations and, thus, also the corresponding homotheties. This provides this set with a structure of a vector space.

There is a canonical map  $\varepsilon: [\mathcal{S}] \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $P_1\lambda_1 + \dots + P_n\lambda_n \mapsto \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  and, clearly,  $\mathcal{S} = \varepsilon^{-1}(1)$  so that it is an affine hyperplane. In addition  $\text{Dir } \mathcal{S} = \varepsilon^{-1}(0)$  is a linear hyperplane.

## B. Symplektické vektorové prostory

V této části dokážeme větu o kanonickém tvaru nedegenerovaných antisymetrických bilineárních forem, tzv. *symplektických* forem. Nechť  $V$  je komplexní vektorový prostor se skalárním součinem

$$\langle -, - \rangle: \bar{V} \times V \rightarrow \mathbb{C}.$$

Nechť  $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  je antisymetrická bilineární forma. Ta lze jednoznačně vyjádřit jako

$$\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle,$$

kde  $J: \bar{V} \rightarrow V$  je antilineární zobrazení, jak jsme viděli u Vol na  $\mathcal{E}_2^{\mathbb{C}}$ . Z antisymetrie  $\omega$  dostáváme vztah  $\langle Ju, v \rangle = -\langle Jv, u \rangle$ . Druhá iterace  $J^2: V \rightarrow V$  je již lineární, ukážeme nyní, že je samoadjungovaná,

$$\langle J^2u, v \rangle = -\langle Jv, Ju \rangle = -\overline{\langle Ju, Jv \rangle} = \overline{\langle J^2v, u \rangle} = \langle u, J^2v \rangle.$$

Lze proto ortogonálně diagonalizovat. Navíc také pro libovolný normovaný vlastní vektor  $u$  s vlastním číslem  $\lambda$  platí

$$\lambda = \langle J^2u, u \rangle = -\langle Ju, Ju \rangle \leq 0,$$

takže všechna vlastní čísla musí být reálná, nekladná. Je-li navíc  $\lambda < 0$ , je také vektor  $Ju$  nenulový a má velikost  $s = \sqrt{-\lambda}$ . Vektory  $Ju, u$  jsou na sebe kolmé, neboť platí

$$\langle Ju, u \rangle = \omega(u, u) = 0.$$

Proto vektory  $u, v = Ju \frac{1}{s}$  tvoří ortonormální systém, v němž je matice  $\omega$  rovna

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$$

( $\omega(v, u) = \omega(Ju \frac{1}{s}, u) = \langle J^2u \frac{1}{s}, u \rangle = \lambda \frac{1}{s} = -s$ ). Přitom vektor  $v$  je opět vlastním vektorem  $J^2$  s vlastním číslem  $-s^2 = \lambda$ . Proto je kolmý doplněk  $[u, v]^\perp$  invariantní vzhledem k  $J^2$  a lze

induktivně zkonstruovat ortonormální bázi  $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k)$ , v níž má  $\omega$  matici

$$\begin{pmatrix} & & & s_1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 0 & \cdots & s_k \\ -s_1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & -s_k & & & \end{pmatrix}$$

Čísla  $s_1, \dots, s_k$  jsou jednoznačně určena z vlastních čísel  $J^2$  (ta závisí pouze na  $\omega$  a skalárním součinu). V případě, že  $J$  zachovává skalární součin v následujícím smyslu

$$\langle u, v \rangle = \langle Jv, Ju \rangle,$$

říkáme, že symplektická forma je kompatibilní se skalárním součinem. Jinak se dá také tento požadavek vyjádřit jako

$$\langle u, v \rangle = -\langle J^2 u, v \rangle,$$

neboli  $J^2 = -\text{id}$ . Potom zobrazení  $J$  zadává na  $V$  strukturu *kvaternionického* vektorového prostoru předpisem  $vj = Jv$ .

Typickým příkladem symplektického vektorového prostoru je prostor  $U^* \oplus U$ , na němž je symplektická forma daná předpisem

$$\omega(\eta + u, \theta + v) = \eta(v) - \theta(u).$$

Skalární součin na tomto součtu, daný skalárním součinem na  $U$  a indukovaným skalárním součinem na  $U^*$  je kompatibilní s touto symplektickou formou.

*Poznámka.* V případě reálného vektorového prostoru se symplektickou formou  $\omega$  existuje ortonormální báze, v níž má  $\omega$  tvar jako v komplexním případě. Pokud je symplektická forma kompatibilní se skalárním součinem, zadává příslušné lineární zobrazení  $I$  na vektorovém prostoru strukturu komplexního vektorového prostoru (je lineární a platí  $I^2 = -\text{id}$ ).

### C. Komplexní ortogonální prostory

Zabývejme se nyní tím, jakou strukturu na komplexním vektorovém prostoru zadává nedege-nerovaná *symetrická* bilineární forma  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ . Opět ji můžeme psát ve tvaru

$$f(u, v) = \langle Cu, v \rangle,$$

kde  $C: \bar{V} \rightarrow V$  je antilineární. Nad  $\mathbb{R}$  je  $C$  samoadjungované (vzhledem ke skalárnímu součinu  $\text{Re}\langle -, - \rangle$ ) a tedy ortonormálně diagonalizovatelné. Necht' nyní  $v$  je vlastní vektor, tj.  $Cv = vs$  pro nějaké (reálné)  $s \in \mathbb{R}$ . Potom  $C(vi) = -(Cv)i = -(vs)i = vi(-s)$  a proto násobení  $i$  prohazuje vlastní podprostory příslušné kladným vlastním číslům s těmi příslušnými záporným vlastním číslům. Dostáváme tak rozklad

$$V = \bigoplus_{s>0} \ker(C - sE) \oplus \bigoplus_{s<0} \ker(C - sE)$$

kde první sčítanec je reálný podprostor  $U \subseteq V$  a druhý je podle předchozího roven  $Ui$ , tj. platí  $V = U \oplus Ui$ . Zejména,  $V = U^{\mathbb{C}}$ . Je-li navíc  $f$  kompatibilní se skalárním součinem ve

smyslu  $\langle Cu, Cv \rangle = \langle v, u \rangle$  nebo ekvivalentně  $C^2 = \text{id}$ , potom  $Cv = \bar{v}$  vzhledem k tomuto rozkladu.

Shrňme tedy, že na komplexním vektorovém prostoru kompatibilní nedegenerovaná antisymetrická bilineární forma zadává rozšíření na kvaternionický vektorový prostor, zatímco symetrická naopak „zúžení“ na reálný vektorový prostor (přesněji to znamená, že vektorový prostor je komplexifikací reálného vektorového prostoru).

## D. Polární rozklad

Při odvozování singulárního rozkladu jsme zjistili, že v případě invertibilní matice  $M$  platí

$$M = P\Sigma Q^* = (PQ^*)(Q\Sigma Q^*) = (P\Sigma P^*)(QP^*)^*,$$

kde v obou případech jde o součin pozitivně definitní matice a unitární matice. Tomuto rozkladu se říká polární rozklad a je analogický geometrickému tvaru komplexního čísla, který je součinem kladného čísla (pozitivně definitní matice) a komplexní jednotky (unitární matice).

Protože je matice  $Q\Sigma Q^*$  určena jednoznačně tím, že na vlastním podprostoru  $M^*M$  příslušném  $\lambda$  je daná násobením  $s = \sqrt{\lambda}$ , nezávisí na volbě báze. Proto také  $PQ^* = M(Q\Sigma Q^*)^{-1}$  je jednoznačně určena.<sup>10</sup> Pro matici  $Q\Sigma Q^*$  existuje velice užitečný vzoreček

$$Q\Sigma Q^* = (M^*M)^{1/2}$$

(analogicky k  $|z| = \sqrt{\bar{z}z}$ ), kde výraz napravo má smysl, protože spektrum  $M^*M$  je tvořeno kladnými čísly, na nichž je odmocnina definována.<sup>11</sup> Pro unitární část pak máme vztah

$$PQ^* = M(M^*M)^{-1/2}$$

(analogicky k  $z/|z|$ ).

Poznamenejme, že  $PQ^* = e^{iA}$  pro nějakou pozitivně definitní samoadjungovanou matici  $A$ , která odpovídá argumentu komplexního čísla a není jednoznačná. Lze psát  $A = -i \log(PQ^*)$  (analogicky k  $\arg z$ ) pro libovolnou volbu komplexní funkce  $\log$  na spektru  $PQ^*$  – spektrum  $PQ^*$  leží na jednotkové kružnici a proto spektrum  $A$  bude ležet na reálné ose.

## E. Grassmannovy variety

**Cvičení.** Uvažte posloupnost

$$\Lambda^0 V \rightarrow \Lambda^1 V \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^n V,$$

kde každé zobrazení  $\Lambda^q V \rightarrow \Lambda^{q+1} V$  je dáno předpisem  $t \mapsto v \wedge t$  pro nějaký nenulový vektor  $v \in V \setminus \{0\}$ . Dokažte, že tato posloupnost je exaktní, tj. že obraz každého zobrazení je přesně jádro následujícího.

<sup>10</sup>Pokud by náhodou  $M$  nebyla invertibilní, je tento rozklad nejednoznačný, stejně jako geometrický tvar nulového komplexního čísla.

<sup>11</sup>Obecně lze zavést  $f(A)$  pro libovolnou funkci  $f$  definovanou a mající dostatečné množství derivací v okolí spektra matice  $A$ . Nechtě  $p$  je Lagrangův interpolační polynom  $f$  ve vlastních číslech matice  $A$  a to stejného řádu jako je minimální polynom (zejména stačí řád rovný algebraické násobnosti). Potom položíme  $f(A) = p(A)$ ; pro samoadjungovanou matici stačí vzít polynom interpolující hodnoty, protože minimální polynom má všechny kořeny jednoduché.



*Řešení.* Díky doplnění do báze můžeme předpokládat, že  $v = e_1$  je první vektor báze. Potom báze antisymetrický tenzor  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}$  se zobrazí na 0 pokud  $i_1 = 1$  a jinak na báze antisymetrický tenzor  $e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}$ . Dostáváme tak

$$t = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} t^{[i_1 \cdots i_q]} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} \mapsto \sum_{1 < i_1 < \cdots < i_q \leq n} t^{[i_1 \cdots i_q]} e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}$$

a to je nulový tenzor, právě když všechny koeficienty  $t^{[i_1 \cdots i_q]}$ , pro  $i_1 > 1$ , jsou nulové. To ale přesně znamená, že

$$t = \sum_{1 < i_2 < \cdots < i_q \leq n} t^{[1i_2 \cdots i_q]} e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} = e_1 \wedge \sum_{1 < i_2 < \cdots < i_q \leq n} t^{[1i_2 \cdots i_q]} e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}. \quad \diamond$$

**Cvičení.** Dokažte, že Plückerovo zobrazení

$$\mathbb{G}_q V \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda^q V), \quad [v_1, \dots, v_q] \mapsto [v_1 \wedge \cdots \wedge v_q]$$

je dobře definované a injektivní.

*Řešení.* Nezávislost na výběru báze  $U \subseteq V$  se nejjednodušeji ukáže tak, že se zobrazení popíše jako  $U \mapsto \Lambda^q U$ .

Řekneme, že antisymetrický tenzor  $t \in \Lambda^q V$  je zcela rozložitelný (jednoduchý nebo základní), jestliže  $t = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q$ , tak jako v zadání. Zobecněním předchozího příkladu lze dokázat, že to nastane právě tehdy, když zobrazení

$$\varphi_t: V \rightarrow \Lambda^{q+1} V, \quad v \mapsto v \wedge t$$

má jádro dimenze  $q$  – konkrétně právě  $[v_1, \dots, v_q]$ ; v opačném případě má toto jádro menší dimenzi. Díky předchozí diskuzi lze inverzi spočítat jako  $[t] \mapsto \ker \varphi_t$ .  $\diamond$

*Poznámka.* Díky předchozímu cvičení lze obraz popsat pomocí podmínky  $\dim \ker \varphi_t \geq q$ , neboli  $\text{rk } \varphi_t \leq n - q$ . To je ale ekvivalentní tomu, že všechny minory matice  $\varphi_t$  řádu  $(n - q + 1) \times (n - q + 1)$  jsou nulové, což je systém polynomiálních rovnic. Grassmannova varieta je tedy jistá analogie nadkvadrik (jen je určena systém polynomiálních rovnic obecného stupně oproti jedné kvadratické rovnici). Ve skutečnosti lze Grassmannovu varietu ekvivalentně popsat soustavou kvadratických rovnic, je to ale znatelně těžší.

Existuje přirozená kolineace

$$\mathcal{P}(\Lambda^q V) \cong \mathcal{P}(\Lambda^{n-q} V^*), \quad [v_1 \wedge \cdots \wedge v_q] \mapsto [\eta^{q+1} \wedge \cdots \wedge \eta^n],$$

kde  $V^\perp = [\eta^{q+1}, \dots, \eta^n]$ . V případě, že je  $V$  orientovaný Eukleidovský prostor, máme dokonce kanonický izomorfismus

$$\Lambda^q V \cong \Lambda^{n-q} V^*$$

daný tím, že ortonormální systém vektorů  $v_1, \dots, v_q$  doplníme do kladně orientované ortonormální báze  $v_1, \dots, v_q, v_{q+1}, \dots, v_n$  a uvážíme duální bázi  $\eta^1, \dots, \eta^n$ ; poté položíme

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_q \mapsto \eta^{q+1} \wedge \cdots \wedge \eta^n$$

(je to o Hodgeově duálu, který se ale většinou uvažuje jako  $\Lambda^q V \cong \Lambda^{n-q} V$ ,  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_q \mapsto v_{q+1} \wedge \cdots \wedge v_n$ .)

## Rejstřík

- Algebra, 62
- Antisymetrická mocnina, 72
- Antisymetrizace, 73
- Aritmetický základ prostoru, 8
- Aritmetický zástupce bodu, 8
  
- Barycentrické souřadnice, 6
- Bod projektivního prostoru, 8
- Bodová báze afinního prostoru, 6
- Báze afinního prostoru, 5
  
- Celočíselná matice, 89
  
- Dualita, 54
- Duální
  - báze, 52
  - lineární zobrazení, 54
  - vektorový prostor, 52
  
- Eukleidovský afinní prostor, 35
  
- Geometrická báze projektivního prostoru, 9
  
- Hlavní
  - nadrovina nadkvadriky, 37
  - směr nadkvadriky, 36
  - čísla nadkvadriky, 36
- Homomorfismus  $\mathbb{K}[\lambda]$ -modulů, 98
  
- Invariantní faktory, 90, 96
  
- $\mathbb{K}[\lambda]$ -modul, 97
- Kladná báze, 80
- Kolineace, 9
- Kolmé směry, 36
- Komplementární dimenze, 32
- Komplexifikace
  - afinního prostoru, 6
  - vektorového prostoru, 3
- Komplexní rozšíření
  - afinního prostoru, 6
  - afinního zobrazení, 7
  - lineárního zobrazení, 4
  - vektorového prostoru, 3
- Kuželosečka, 24
- Kvadratika, 24
  
- Kvaternionický vektorový prostor, 111
  
- Lineární forma, 52
  
- Minimální polynom, 101
- Mooreova–Penroseova pseudoinverze, 44
  
- Nadkvadratika
  - v afinním prostoru, 24
  - v komplexním rozšíření, 24
- Nejlepší aproximace řešení, 47
- Nevlastní
  - bod nadkvadriky, 34
  - bod projektivního prostoru, 9
  - prostor, 9
  
- Objemová
  - forma, 79
- Objemová forma
  - kompatibilní se skalárním součinem, 85
- Opačně orientované báze, 80
- Orientace vektorového prostoru, 80
- Orientovaný
  - objem, 79
  - vektorový prostor, 80
  - úhel, 83
- Osa
  - kuželosečky, 37
  - kvadriky, 38
  - nadkvadriky, 38
- Osová nadrovina nadkvadriky, 37
- Osová přímka
  - kuželosečky, 37
  - kvadriky, 38
  
- Polára, 32
- Polární doplněk, 31
- Polární nadrovina, 32
- Polárně sdružené body, 31
- Projektivní
  - podprostor, 8
  - přímka, 8
- Projektivní rozšíření
  - afinního prostoru, 9
  - nadkvadriky, 24

Prostor  
     afinní, 5  
     projektivní, 8  
     standardní afinní, 5  
     standardní projektivní, 8  
     afinní, 7  
     indukované lineární, 7  
     Záporná báze, 80

Racionální kanonický tvar, 101

Realifikace, 12

Regulární  
     bod vzhledem k nadkvadrice, 32  
     nadkvadrice, 32

Reálná část kvaternionu, 86

Shodně orientované báze, 79

Singulární  
     bod nadkvadrice, 32  
     hodnoty zobrazení, 45  
     nadkvadrice, 32  
     rozklad, 46

Smithův normální tvar  
     celočíselné matice, 90  
     polynomiální matice, 96

Směr, 9, 34

Souřadnice  
     bodu afinního prostoru, 5  
     homogenní, 8

Střed nadkvadrice, 34

Symetrická mocnina, 69

Symetrizace, 70

Symplektická forma, 110

Tenzor, 58  
     antisymetrický, 73  
     jednoduchý, 59  
     symetrický, 70

Tenzor typu  $(p, q)$ , 62

Tenzorová algebra vektorového prostoru, 63

Tenzorový součin  
     lineárních zobrazení, 61  
     vektorových prostorů, 58

Tečná nadrovina nadkvadrice, 33

Vektorová část kvaternionu, 86

Vlastní bod, 9

Vrchol nadkvadrice, 38

Zaměření afinního prostoru, 5

Zobrazení

## Další literatura

- [D] M. Doupovec, Diferenciální geometrie a tenzorový počet, VUT Brno, 1999.
- [JS] J. Janyška, A. Sekaninová, Analytická geometrie kuřeloseček a kvadrik, MU Brno, 1996.
- [K] A. I. Kostrikin, Exercises in algebra: A collection of exercises in algebra, linear algebra and geometry, Gordon and Breach Publishers, 1996.
- [KM] A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin, Linear algebra and geometry, Gordon and Breach Publishers, 1997.
- [S] J. Slovák, Lineární algebra, elektronický učební text, [www.math.muni.cz/~slovak](http://www.math.muni.cz/~slovak).

Ke kapitolám 1, 2 a 3 lze doporučit [JS], [K] a [KM], ke kapitolám 5, 6 a 7 [D], [K], [KM] a [S] a ke kapitole 10 [S]. Mnohé příklady v tomto textu pocházejí z [JS] a [K].