Písemka 5. 12. 2017

1. Nechť V je vektorový prostor s bází $\alpha = (e_1, e_2, e_3)$ a duální bází $\alpha^* = (f^1, f^2, f^3)$. Tenzor $t \in T_1^2 V = V \otimes V \otimes V^*$ má v bázi α souřadnice $t_k^{ij} = 1$. Najděte jeho souřadnici $\bar{t}_2^{13}$ v bázi $\beta = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, jestliže pro duální bázi $\beta^* = (\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3)$ platí

$$\begin{pmatrix} \bar{f}^1 \\ \bar{f}^2 \\ \bar{f}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}.$$

(3 body)

2. Nechť Vol je objemová forma, pro kterou platí $\mathrm{Vol}(u, v, w) = 100$, kde

$$u = (1, 6, 1)^T, \quad v = (1, 1, 1)^T, \quad w = (3, -4, 1)^T.$$

Určete $\mathrm{Vol}(e_1, e_2, e_3)$, kde e_i jsou vektory standardní báze. (2 body)

3. Popište pomocí osy a úhlu složení $S \circ R$ rotace R okolo vektoru $(1, 0, 0)$ o úhel $+90°$ s rotací S okolo vektoru $(-1, 2, 2)$ o úhel $+120°$. Nezapomeňte, co musí splňovat vektor a úhel ve vyjádření rotace pomocí kvaternionů. (2 body)

4. Spočtěte Smithův normální tvar celočíselné matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & -10 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & -8 \\ -10 & 16 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(3 body)