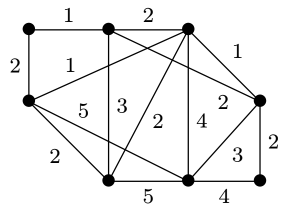
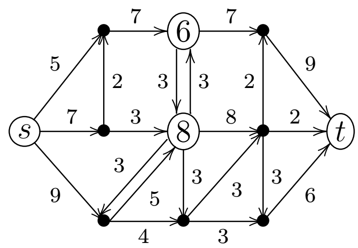
Teorie grafů – podzim 2021 – 1. termín

1. (10 bodů) Nalezněte všechny kostry nejmenší váhy v grafu



2. (10 bodů) Určete největší velikost toku v následující síti s danými kapacitami hran a dvou vrcholů a svoje rozhodnutí zdůvodněte.



3. (5 bodů) Dejte příklad souvislého grafu s osmi vrcholy, který je izomorfní svému blokovému stromu. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

4. (5 bodů) Dejte příklad eulerovského grafu G s osmi vrcholy splňujícího $\kappa'(G) = 3$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

5. (5 bodů) Dejte příklad 5-regulárního grafu G s osmi vrcholy splňujícího $\kappa(G) = 4$. Pokud takový graf neexistuje, zdůvodněte proč.

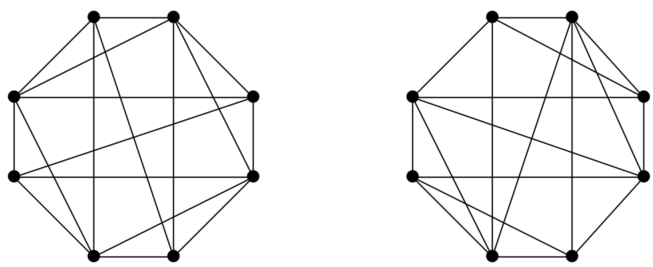
6. (10 bodů) Určete, pro která nezáporná celá čísla x a y je posloupnost

$$(x, x, x, x + 2, y, y + 1, y + 2, y + 2, y + 2)$$

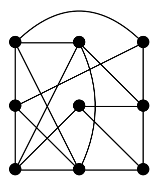
skórem nějakého grafu, a svoje rozhodnutí zdůvodněte. Pro všechny takové hodnoty x a y dejte příklad grafu s tímto skóre.

7. (10 bodů) Najděte všechny vzájemně neizomorfní 2-souvislé grafy G se sedmi vrcholy, které splňují $\chi(G) = 3$ a neobsahují podgraf izomorfní K_3.

8. (8 bodů) Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní. Svoje rozhodnutí zdůvodněte.



9. (7 bodů) Rozhodněte, zda následující graf je rovinný. Pokud rovinný je, doplňte jej na maximální rovinný graf. Pokud rovinný není, svoje rozhodnutí zdůvodněte.



10. (10 bodů) Nechť n je přirozené číslo a $G = (V, E)$ je obyčejný graf, kde

$$V = \left\{ v_{i,k} \;\middle|\; i \in \{1, 2\},\ k \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

a pro všechna $i, j \in \{1, 2\}$ a $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ platí $v_{i,k}v_{j,\ell} \in E$ právě tehdy, když

$$(i, k) \neq (j, \ell) \quad \wedge \quad |k - \ell| \leq 1.$$

Určete hranovou a vrcholovou souvislost G, jeho hranové a vrcholové chromatické číslo a zda je G eulerovský či hamiltonovský.

11. (5 bodů) Definujte střed grafu.

12. (5 bodů) Formulujte Ramseyho větu pro k barev.

13. (10 bodů) Dokažte, že pokud obyčejný graf G neobsahuje vrchol stupně alespoň 4, tak platí rovnost $\kappa(G) = \kappa'(G)$.