Topologie

Lukáš Vokřínek

2. ledna 2023

Obsah

Úvod

Tento text vznikl sepsáním mých příprav přednášek a cvičení k předmětu „Topologie“. Jako výchozí text jsem používal své zápisky, které jsem pořídil když předmět vyučoval prof. Rosický. Ten vycházel z Pultrovy knihy „Podprostory euklidovských prostorů“. Některé části jsem rozšířil či doplnil, čerpal jsem především z Bredonovy knihy „Geometry and topology“. To se týká také kapitol, které jsem přidal.

V textu jsou příklady, které jsme dělali ve cvičeních označeny „cv“; nesepisoval jsem k nim vzorová řešení. Příklady označené „dú“ jsem nechal za domácí úkol.

Části textu označené „$*$“ jsou technicky náročnější pasáže, které jsem někdy ani neprobíral na přednášce, ale na které se mohu ptát u zkoušky. Části označené „$**$“ považuji za zbytečně těžké nebo speciální a ptát se na ně nebudu. Části označené jako „nd“ jsme nedělali, ale mám v plánu je v budoucnu probírat.

1. Motivace

Topologie se zabývá „topologickými prostory“ – to jsou zhruba metrické prostory, akorát zapomeneme na konkrétní vzdálenosti mezi body a zapamatujeme si pouze, které body „jsou blízko“. Ústředním pojmem je pak spojitosti, konkrétněji spojité zobrazení. Ve výsledku to znamená, že čtverec je „totéž“ co kružnice (narozdíl od geometrie). To je proto, že existují spojitá vzájemně inverzní zobrazení mezi čtvercem a kružnicí – dohromady zadávají izomorfismus.

Existují i jiné druhy prostorů – založené na jiných typech zobrazení. Jedná se například o

metrické prostory	– izometrie
diferencovatelné variety	– diferencovatelná zobrazení
algebraické variety	– polynomiální zobrazení
PL (po částech lineární) variety	– po částech lineární zobrazení
polyedry	– afinní zobrazení

V negeometričnosti (čtverec = kružnice) jde ještě značně dál algebraická topologie, která prohlásí za stejné prostory i $\mathbb{R}^n$ a prostor sestávající se z jediného bodu, neboť $\mathbb{R}^n$ lze „spojitě zdeformovat“ do bodu.

2. Topologický prostor

V metrickém prostoru M definujeme otevřenou kouli okolo x o poloměru $\varepsilon > 0$ jako

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid \operatorname{dist}(x, y) < \varepsilon\}.$$

Řekneme, že podmnožina $U \subseteq M$ je *otevřená*, jestliže pro každé $x \in U$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Zkráceně říkáme, že U obsahuje s každým bodem i nějaké jeho okolí.

Definice 2.1. *Topologie* na množině X je systém podmnožin $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ splňující následující podmínky

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{X}$,
(2) $U_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathcal{I} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{X}$,
(3) $U_i \in \mathcal{X}$, $i \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ konečná $\Rightarrow \bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{X}$.

Topologický prostor je množina X společně s topologií $\mathcal{X}$ na X. Prvky $\mathcal{X}$ nazýváme *oteřené* podmnožiny X.

Poznámka. Podmínka (0) plyne ze zbylých dvou, $\emptyset$ je totiž sjednocením prázdného systému podmnožin a X průnik prázdného systému.

Příklady 2.2.

1. metrické prostory (podrobněji to dokážeme časem),
2. pro libovolnou množinu X definujeme *diskrétní topologii* na X jako $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$ (vše je otevřené, je zadána metrikou $\operatorname{dist}(x, y) = 1$),
3. pro libovolnou množinu X definujeme *triviální topologii* na X jako $\mathcal{X} = \{\emptyset, X\}$ („nic“ není otevřené, je zadána pseudometrikou $\operatorname{dist}(x, y) = 0$),
4. pro libovolnou množinu X definujeme *topologii konečných doplňků* na X jako

$$\mathcal{X} = \{U \subseteq X \mid X \smallsetminus U \text{ konečná}\} \cup \{\emptyset\},$$

dú 1 5. je-li X libovolná (před)uspořádaná množina, je

$$\mathcal{X} = \{U \subseteq X \mid U \text{ splňuje } \forall x \in U \ \forall y \leq x : y \in U\}$$

topologie. Naopak, je-li $\mathcal{X}$ libovolná topologie splňující (2) i pro nekonečné indexové množiny $\mathcal{I}$, pak na X existuje předuspořádání zadávající tuto topologii.

Pokusíme se nyní dokázat, že otevřené množiny zadané metrikou opravdu definují topologii. K tomu se nám bude hodit následující pojem.

Definice 2.3. Systém množin $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se nazývá *subbáze* topologie $\mathcal{X}$, jestliže $\mathcal{X}$ je nejmenší topologie obsahující $\mathcal{S}$.

Systém množin $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se nazývá *báze* topologie $\mathcal{X}$, jestliže $\mathcal{X}$ jsou právě všechna sjednocení prvků $\mathcal{B}$. Jinými slovy,

$$\mathcal{X} = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A \ \exists U \in \mathcal{B} \colon x \in U \subseteq A\}$$

(protože pak $A = \bigcup\{U \in \mathcal{B} \mid U \subseteq A\}$).

Lemma 2.4. *Platí, že $\mathcal{B}$ je báze nějaké topologie (podle definice však jediné), právě když platí následující podmínky*

1. $X = \bigcup \mathcal{B}$ *a*
2. *pro každé $U, V \in \mathcal{B}$ a $x \in U \cap V$ existuje $W \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in W \subseteq U \cap V$.*

cv Dokažte předchozí lemma.

cv **Příklad 2.5.** Nechť M je metrický prostor. Potom systém koulí $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \mid x \in M, \varepsilon > 0\}$ je bází topologie. (Prvně dokažte, že je bází nějaké topologie, pak ji identifikujte jako kanonickou topologii na metrickém prostoru.)

Je-li nyní $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ libovolný systém podmnožin, splňuje $\mathcal{B} = \{\text{konečné průniky prvků } \mathcal{S}\}$ podmínky lemmatu a proto je topologie generovaná $\mathcal{S}$ právě

$$\mathcal{X} = \{\text{sjednocení konečných průniků prvků } \mathcal{S}\}.$$

Definice 2.6. Podmnožina $F \subseteq X$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $X \smallsetminus F$ je otevřená.

Například v prostoru konečných doplňků jsou uzavřené právě konečné množiny a X. Pro $X = \mathbb{C}$ lze ekvivalentně uzavřené množiny popsat jako nulové množiny polynomů – tento příklad má zobecnění do $\mathbb{C}^n$, viz algebraická geometrie.

Poznámka. Pro uzavřené množiny platí „duální“ axiomy k axiomům topologie. Ekvivalentně je možné topologii zadat systémem uzavřených množin, které splňují tyto axiomy.

Definice 2.7. *Uzávěr* $\overline{A}$ podmnožiny $A \subseteq X$ je nejmenší uzavřená podmnožina obsahující A, tj.

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subseteq F \text{ uz.}} F.$$

cv **Příklad 2.8.** Dokažte následující vlastnosti uzávěru

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

3. $A \subseteq \overline{A}$,
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Dále ukažte, že obecně neplatí $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Pomocí uzávěru (nebo lépe řečeno uzávěrového operátoru) lze topologii zrekonstruovat následovně: podmnožina $A \subseteq X$ je uzavřená, právě když $A = \overline{A}$.

Poznámka. Platí, že topologii lze ekvivalentně zadat uzávěrovým operátorem (tj. operátorem $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ splňujícím axiomy (1)–(4)).

Lemma 2.9. *Platí* $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U$ *otevřená*, $x \in U : A \cap U \neq \emptyset\}$.

O bodech z pravé strany mluvíme jako o *limitních bodech* A (a nepotřebujeme k tomu říct, co je to limita posloupnosti).

Důkaz. Platí $x \notin \overline{A}$, právě když existuje uzavřená $F \supseteq A$, neobsahující x. Přejítím k doplňkům to je, právě když existuje otevřená $U = X \smallsetminus F$, $A \cap U = \emptyset$ a obsahující x. To je ale přesně $x \notin RHS$. □

Definice 2.10. „Duálně“ definujeme *vnitřek* A jako největší otevřenou množinu obsaženou v A, tj.

$$\mathring{A} = \bigcup_{A \supseteq U \text{ ot.}} U.$$

Říkáme, že vnitřní body A jsou ty, které se do A vejdou i s nějakým svým okolím. Přesněji okolí definujeme později.

3. Spojitá zobrazení

Definice 3.1. Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi dvěma topologickými prostory se nazývá *spojité*, jestliže pro pro každou otevřenou $U \subseteq Y$ je také $f^{-1}(U) \subseteq X$ otevřená.

cv **Cvičení 3.2.**

1. Spojitost stačí ověřit pro U z nějaké (libovolné) subbáze topologie na Y.
2. Zobrazení f je spojité, právě když vzor každé uzavřené množiny je uzavřený.

——— konec 1. přednášky ———

Definice 3.3. Podmnožina $N \subseteq X$ se nazývá *okolím* bodu $x \in X$, jestliže existuje otevřená množina U s vlastností $x \in U \subseteq N$.

Zejména otevřené okolí bodu x je to samé, co otevřená množina obsahující x. Pomocí okolí se dají charakterizovat otevřené množiny jako ty, které jsou okolími všech svých bodů.

Definice 3.4. Řekneme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité v bodě $x \in X$, jestliže pro každé okolí N bodu $f(x)$ je také $f^{-1}(N)$ okolím bodu x.

dú 2 **Cvičení 3.5.** Dokažte, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité, právě když je spojité v každém bodě $x \in X$.

Definice 3.6. Řekneme, že systém $\mathcal{N}$ okolí bodu x je *bází okolí* bodu x, jestliže každé okolí bodu x obsahuje jako podmnožinu nějaký prvek $\mathcal{N}$. (Dělal jsem později u regulárních.)

Příklad 3.7. V metrickém prostoru tvoří otevřené koule $B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, se středem v x bázi okolí bodu x. Alternativně tvoří bázi okolí koule $B_{1/n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Tato množina je spočetná. Proto každý metrizovatelný prostor, tj. takový prostor, jehož topologie je zadána nějakou metrikou, musí mít spočetnou bázi okolí každého bodu – je tzv. „first countable“.

nd **Cvičení 3.8.**

1. Spojitost v bodě $x \in X$ stačí ověřovat na okolích $f(x)$ z nějaké (libovolné) báze okolí.
2. Zobrazení $f : M \to N$ mezi metrickými prostory je spojité, právě když splňuje ε-δ-definici spojitosti.

Důkaz. Část 1. je elementární. Část 2. plyne z toho, že otevřené koule $B_\delta(x)$, $\delta > 0$, tvoří bázi okolí x a $B_\varepsilon(f(x))$, $\varepsilon > 0$, tvoří bázi okolí $f(x)$. □

$**$ **Cvičení 3.9.** Dokažte, že zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi předuspořádanými množinami X, Y je spojité, právě když je izotonní.

$**$ **Lemma 3.10.** *Následující podmínky na zobrazení $f\colon X \to Y$ jsou ekvivalentní*

1. *f je spojité,*
2. *$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ pro libovolnou podmnožinu $B \subseteq Y$,*
3. *$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq X$.*

Poslední podmínka je zobecněným vyjádřením toho, že $x_n \to x$ implikuje $f(x_n) \to f(x)$ (pro obecné topologické prostory však posloupnosti nemusí být dostačující).

Důkaz. Ukážeme prvně ekvivalenci 1. a 2. Jelikož $f^{-1}(\overline{B})$ je uzavřená podmnožina obsahující $f^{-1}(B)$, musí obsahovat i $\overline{f^{-1}(B)}$. V opačném směru pro uzavřenou $F \subseteq Y$ platí $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F)$ a tedy $f^{-1}(F)$ je uzavřená.

Nyní ukážeme 2. ⇒ 3. Chceme $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, přitom zjevně platí $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ a tedy

$$\overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(f(A))} \overset{2.}{\subseteq} f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Zbývá ukázat 3. ⇒ 2. Chceme $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{B}$, přitom zjevně platí $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ a tedy

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \overset{3.}{\subseteq} \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}.$$ □

Definice 3.11. Zobrazení $f\colon X \to Y$ se nazývá *homeomorfismus*, jestliže je f bijekce a obě zobrazení f, f^{-1} jsou spojitá.

Příklad 3.12.

1. Interval $(0, 1)$ je homeomorfní $\mathbb{R}$; homeomorfismus $(0, 1) \to \mathbb{R}$ je například zobrazení $t \mapsto \operatorname{tg}(\pi t - \pi/2)$.
2. Zobrazení $\mathrm{id}\colon X_{\mathrm{disc}} \to X_{\mathrm{triv}}$ je spojitá bijekce, ale jeho inverze $\mathrm{id}\colon X_{\mathrm{triv}} \to X_{\mathrm{disc}}$ spojitá není; viz další příklad.
3. nd Rozmyslete si, kdy je zobrzení $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{X}_0) \to (X, \mathcal{X}_1)$ spojité.
4. Zobrazení $[0, 1) \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ je spojitá bijekce, ale jeho inverze spojitá není.
5. Ve skutečnosti neexistuje homeomorfismus $[0, 1) \xrightarrow{\cong} S^1$. To se nejlépe ukáže tak, že se najde nějaký „invariant“, který tyto dva prostory odliší. V tomto případě lze například říct (časem to budeme schopni formulovat přesně), že vyjmutím jakéhokoliv bodu z S^1 se prostor nerozpadne, zatímco vyjmutím bodu $t \neq 0$ z $[0, 1)$ se tento interval rozpadne. Dalším takovým invariantem je kompaktnost.

6. Pro $m \neq n$ neexistuje homeomorfismus $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$. Pro $n = 1$ to lze vidět, podobně jako v předchozím příkladě, pomocí odstraňování bodů a souvislosti. Pro vyšší n je potřeba „vyšší souvislost“.

cv **Příklad 3.13.** Popište spojitá zobrazení z triviálního prostoru a spojitá zobrazení do diskrétního prostoru.

Poznámka. Topologie je nealgebraická (spojitá bijekce není nutně homeomorfismus). Z jednoho z příkladů vidíme, že úplnost metrického prostoru není topologický pojem, tj. existují homeomorfní prostory, z nichž jeden tuto vlastnost splňuje a druhý ne. Na druhou stranu kompaktnost je topologický pojem, později ji charakterizujeme čistě v řeči otevřených množin.

4. Podprostory, součiny

Definice 4.1. Nechť X je topologický prostor a $A \subseteq X$ jeho podmnožina. Definujeme na A *topologii podprostoru* jako

$$\{A \cap U \mid U \subseteq X \text{ otevřená}\}.$$

Množinu A společně s topologií podprostoru nazveme *podprostorem* X.

Důležitou vlastností podprostoru je, že vložení $i\colon A \to X$ je spojité a má následující univerzální vlastnost: zobrazení $f\colon T \to A$ je spojité, právě když je spojité $if\colon T \to X$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "if"'] & A \arrow[d, hook, "i"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

(obojí plyne z toho, že $A \cap U = i^{-1}(U)$). Důkaz lze shrnout do pozorování: topologie podprostoru je nejmenší taková, pro kterou je inkluze i spojitá.

dú 3 **Lemma 4.2.** *Pro podmnožinu $B \subseteq A$ platí*

$$\operatorname{cl}_A B = A \cap \overline{B},$$

kde $\operatorname{cl}_A B$ značí uzávěr B v podprostoru A.

Poznámka. Nic podobného neplatí pro vnitřek.

Definice 4.3. Systém $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ množin se nazývá *pokrytí* prostoru X, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$.

cv **Cvičení 4.4.** Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí prostoru X. Dokažte, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité, právě když každé zúžení $f|_U\colon U \to Y$, $U \in \mathcal{U}$, je spojité.
Podobně dokažte totéž pro *konečné* uzavřené pokrytí $\mathcal{F}$.

dú 4 **Cvičení 4.5.** Dokažte, že čtverec je homeomorfní kružnici.

Definice 4.6. Nechť X, Y jsou topologické prostory. Definujeme na $X \times Y$ *součinovou topologii* generovanou bází

$$\{U \times V \mid U \in \mathcal{X},\ V \in \mathcal{Y}\}.$$

Množinu $X \times Y$ společně se součinovou topologií nazveme *součinem* topologických prostorů X, Y.

Důležitou vlastností součinu je, že projekce $p\colon X \times Y \to X$, $q\colon X \times Y \to Y$ jsou spojité a mají následující univerzální vlastnost: zobrazení $f = (g,h)\colon T \to X \times Y$ je spojité, právě když jsou spojité jeho složky $pf = g\colon T \to X$ a $qf = h\colon T \to Y$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & X & & & & X \\
T \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[urr, bend left, "pf"] \arrow[drr, bend right, "qf"'] & X \times Y \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"] & & \equiv & T \arrow[r, dashed, "{(g,h)}"] \arrow[urr, bend left, "g"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & X \times Y \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"] & \\
 & & Y & & & & Y
\end{tikzcd}
$$

(obojí plyne z toho, že $U \times V = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$).

O něco složitější je součin nekonečně mnoha topologických prostorů, kde vodítkem ke správné definici je právě předchozí univerzální vlastnost a její důkaz. Označme

$$p_j\colon \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \to X_j$$

projekci na j-tou složku.

Definice 4.7. Nechť X_i, $i \in \mathcal{I}$, jsou topologické prostory. Definujeme na $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ *součinovou topologii* generovanou subbází

$$\{p_j^{-1}(U) \mid j \in \mathcal{I},\, U \subseteq \mathcal{X}_j \text{ otevřená}\}.$$

Množinu $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ společně se součinovou topologií nazveme *součinem* topologických prostorů X_i, $i \in \mathcal{I}$.

cv **Cvičení 4.8.** Dokažte, že součin $\prod_{i\in\mathcal{I}} F_i$ uzavřených množin $F_i \subseteq X_i$ je uzavřený.

konec 2. přednášky

5. Axiomy oddělitelnosti

Poznámka. Existuje axiom oddělitelnosti T_0.

Definice 5.1. Topologický prostor X se nazývá T_1, jestliže pro každé dva body $x, y \in X$, $x \neq y$ existuje otevřené okolí $U \ni x$ disjunktní s y, tj. $y \notin U$.

Lemma 5.2. *Topologický prostor X je T_1, právě když jsou všechny jeho jednobodové podmnožiny uzavřené.*

Důkaz. „$\Leftarrow$“: V definici stačí volit $U = X \setminus \{y\}$. „$\Rightarrow$“: Nechť $y \in X$. Pak pro libovolné $x \neq y$ existuje $U_x \ni x$ otevřená neobsahující y. Proto je $\bigcup_{x\neq y} U_x = X \setminus \{y\}$ otevřená a $\{y\}$ tedy uzavřená. $\square$

Definice 5.3. Topologický prostor X se nazývá *T_2 (Hausdorffův)*, jestliže pro každé dva body $x, y \in X$, $x \neq y$ existují disjunktní otevřená okolí $U \ni x$, $V \ni y$, tj. $U \cap V = \emptyset$.

cv **Příklad 5.4.** Prostor konečných doplňků je T_1, ale není Hausdorffův (pokud nosná množina není konečná).

Lemma 5.5. *Topologický prostor X je Hausdorffův, právě když $\Delta_X \subseteq X \times X$ je uzavřená podmnožina. Zde $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je „diagonála".*

Důkaz. „$\Rightarrow$": Ukážeme, že $X \times X \smallsetminus \Delta_X$ je otevřená. Nechť $(x,y) \in X \times X \smallsetminus \Delta_X$, tj. $x \neq y$. Podle definice existují $U \ni x$, $V \ni y$ disjunktní otevřené. Pak $(x,y) \in U \times V \subseteq X \times X \smallsetminus \Delta_X$, přičemž $U \times V$ je bázická otevřená.

„$\Leftarrow$": Analogicky; nechť $x, y \in X$, $x \neq y$, tj. $(x,y) \in X \times X \smallsetminus \Delta_X$. Protože je $X \times X \smallsetminus \Delta_X$ otevřená, existuje bázická otevřená podmnožina $U \times V$ s vlastností $(x,y) \in U \times V \subseteq X \times X \smallsetminus \Delta_X$. Proto $x \in U$, $y \in V$ a $U \cap V = \emptyset$. $\square$

nd Alternativně lze dokázat „$\Rightarrow$" pomocí $\Delta_X = \{(x,y) \mid p(x,y) = q(x,y)\}$.

Důsledek 5.6. *Nechť $f, g\colon X \to Y$ jsou dvě spojitá zobrazení a Y je Hausdorffův. Potom*

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

je uzavřená podmnožina X.

Důkaz. Zobrazení $(f,g)\colon X \to Y \times Y$ je spojité, přičemž

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f,g)^{-1}(\Delta_Y).$$ $\square$

cv **Příklad 5.7.** Ortogoální grupa $\mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$ je uzavřená. (podobně $\mathrm{SL}(n)$)

Věta 5.8.

1. *Podprostory Hausdorffových prostorů jsou Hausdorffovy.*
2. *Součiny Hausdorffových prostorů jsou Hausdorffovy.*

Důkaz. Nechť $x, y \in A$ jsou odděleny v X otevřenými množinami U, V. Potom $A \cap U$, $A \cap V$ jsou otevřené množiny v A oddělující x od y.

Nechť $(x_i), (y_i) \in \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ jsou různé body. Pak existuje index $j \in \mathcal{I}$ takový, že $x_j \neq y_j$. Protože je X_j Hausdorffův, existují $U \ni x_j$, $V \ni y_j$, $U \cap V = \emptyset$. Potom $p_j^{-1}(U)$, $p_j^{-1}(V)$ oddělují (x_i) od (y_i). $\square$

Definice 5.9. T_1-prostor X se nazývá *T_3 (regulární)*, jestliže pro každý jeho bod $x \in X$ a uzavřenou podmnožinu $F \subseteq X$ neobsahující x existují otevřená disjunktní okolí $U \ni x$, $V \supseteq F$, tj. $U \cap V = \emptyset$.

Lemma 5.10. *Topologický prostor X je regulární, právě když pro každý bod $x \in X$ tvoří uzavřená okolí x bázi okolí, tj. pro každé okolí $N \ni x$ existuje uzavřené okolí $F \ni x$ splňující $N \supseteq F$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$": Stačí pro každé otevřené okolí $W \ni x$ najít uzavřené podokolí. Podle definice lze oddělit x od $X \smallsetminus W$, tj. $x \in U$, $X \smallsetminus W \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$. Jinými slovy $x \in U \subseteq X \smallsetminus V \subseteq W$, tedy $X \smallsetminus V$ je uzavřené podokolí x.

„$\Leftarrow$": Nechť $x \notin F$, tj. $x \in X \smallsetminus F$ tvoří otevřené okolí. Podle předpokladu existuje $x \in G \subseteq X \smallsetminus F$, přičemž G je uzavřené okolí x, tj. $x \in U \subseteq G$, $F \subseteq X \smallsetminus G = V$. $\square$

Příklad 5.11. Každý metrický prostor M je regulární – uzavřené koule tvoří bázi okolí každého bodu. Za chvíli dokážeme jiným způsobem ještě silnější tvrzení.

Věta 5.12.

1. *Podprostory regulárních prostorů jsou regulární.*
2. *Součiny regulárních prostorů jsou regulární.*

Důkaz. Nechť $F \subseteq A$ je uzavřená neobsahující $x \in A$. Potom $A \cap \overline{F} = F$, takže $x \notin \overline{F}$ a lze je oddělit v X pomocí U, V; v A je pak lze oddělit pomocí $A \cap U$, $A \cap V$. Alternativní důkaz vede přes předchozí lemma.

Nechť $(x_i) \in \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, $(x_i) \in U$ otevřené okolí. Potom existují $j_1, \ldots, j_n \in \mathcal{I}$ a otevřené množiny $U_k \subseteq X_{j_k}$ takové, že

$$(x_i) \in p_{j_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_{j_n}^{-1}(U_n) \subseteq U.$$

Nechť $x_{j_k} \in F_k \subseteq U_k$ jsou uzavřená podokolí. Potom

$$(x_i) \in \underbrace{p_{j_1}^{-1}(F_1) \cap \cdots \cap p_{j_n}^{-1}(F_n)}_{\text{uzavřené okolí}} \subseteq U. \qquad \square$$

Definice 5.13. T_1-prostor X se nazývá *T_4 (normální)*, jestliže pro každé jeho dvě disjunktní uzavřené podmnožiny $F, G \subseteq X$ existují otevřená disjunktní okolí $U \supseteq F$, $V \supseteq G$.

Analogie předchozí věty neplatí – viz důkaz: pokud $F, G \subseteq A$ jsou disjunktní uzavřené podmnožiny, nemusí být nutně pravda, že $\overline{F}$, $\overline{G}$ jsou disjunktní (s výjimkou případu, kdy A je uzavřená). Nemělo by tedy být těžké uvěřit, že existují normální prostory, jejichž podprostory a součiny nejsou normální.

Příklad 5.14. Každý metrický prostor M je normální. To je proto, že pro libovolnou $A \subseteq M$ funkce $\operatorname{dist}(A, -)\colon M \to \mathbb{R}$ spojitá (nezkracuje vzdálenosti). Položíme-li nyní

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(F, x)}{\operatorname{dist}(F, x) + \operatorname{dist}(G, x)},$$

je tato funkce všude definovaná a spojitá, $\operatorname{im} f \subseteq [0, 1]$. Přitom $f(x) = 0$ na F a $f(x) = 1$ na G, takže lze volit

$$U = f^{-1}[0, 1/2), \quad V = f^{-1}(1/2, 1].$$

Fenomén z předchozího příkladu je oddělování pomocí spojitých funkcí. Vrátíme se k němu později.

6. Kompaktní prostory

Definice 6.1. Topologický prostor X se nazývá *kompaktní*, jestliže z libovolného jeho otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

V dalším budeme velmi často využívat následující interpretaci kompaktnosti podprostoru $A \subseteq X$. Je-li $\mathcal{U}$ systém otevřených množin v X takový, že $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, pak existuje konečně mnoho $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tak, že $A \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

cv **Příklad 6.2.** $\mathbb{R}$ není kompaktní.

cv **Příklad 6.3.** (a, b) není kompaktní (bez najití pokrytí).

Věta 6.4. *Uzavřený interval $[a, b]$ je kompaktní.*

Poznámka. Předchozí věta využívá úplnosti reálných čísel – neplatí totiž nad $\mathbb{Q}$. Interval $[a,b]_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cap [a,b]$ není kompaktní: nechť $c \in (a,b)$ je iracionální. Pak

$$[a,b]_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, c-1/n)_{\mathbb{Q}} \cup (c+1/n, b]_{\mathbb{Q}}.$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $[a,b]$. Uvažme

$$T = \{t \in [a,b] \mid \text{interval } [a,t] \text{ lze pokrýt konečně mnoha prvky } \mathcal{U}\}.$$

Zjevně $a \in T$ a tedy $T \neq \emptyset$. Můžeme tedy položit $t_0 = \sup T$.

Prvně ukážeme, že $t_0 \in T$. Existuje totiž $U \in \mathcal{U}$ tak, že $t_0 \in U$ a proto existuje nějaké $t_1 < t_0$ tak, že celý interval $[t_1, t_0] \subseteq U$. Protože $t_1 \in T$, platí $[a, t_1] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Proto $[a, t_0] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup U$.

Nyní ukážeme sporem, že $t_0 = b$. Kdyby $t_0 < b$, opět dostáváme $t_0 \in U \in \mathcal{U}$ a T obsahuje i nějaké $t_1 \in U$, $t_1 > t_0$. To je spor s $t_0 = \sup T$. □

Věta 6.5. *Uzavřený podprostor kompaktního prostoru je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $F \subseteq X$ je uzavřený a $\mathcal{U}$ je nějaké systém otevřených množin s vlastností $\bigcup \mathcal{U} \supseteq F$. Potom $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ je otevřené pokrytí X. Díky kompaktnosti X je

$$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup (X \setminus F)$$

a proto $F \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. □

konec 3. přednášky

Věta 6.6. *Kompaktní podprostor Hausdorffova prostoru je uzavřený.*

Důkaz. Nechť $C \subseteq X$ je kompaktní, $x \notin C$. Chceme najít nějaké $U \ni x$, $U \cap C = \emptyset$. Nechť $y \in C$. Potom existují disjunktní $U_y \ni x$, $V_y \ni y$. Systém $\{V_y \mid y \in C\}$ tvoří otevřené pokrytí C. Z kompaktnosti z něj lze vybrat konečné podpokrytí $C \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Potom

$$x \in U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n} = U$$

je otevřené okolí x a $U \cap C = \emptyset$, protože $U \cap V_{y_k} \subseteq U_{y_k} \cap V_{y_k} = \emptyset$. □

Důsledek 6.7. *V kompaktním Hausdorffovu prostoru jsou uzavřené množiny právě kompaktní.*

Věta 6.8 (o součinu)**.** *Součin $X \times Y$ dvou kompaktních prostorů X, Y je kompaktní.*

Větu dokážeme později.

Důsledek 6.9. *Podmnožina $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“: Uzavřenost plyne z Hausdorffovosti $\mathbb{R}^n$, ohraničenost plyne z pokrytí $B_k(0)$, $k \in \mathbb{N}$.

„$\Leftarrow$“: Z ohraničenosti $A \subseteq [-k,k]^n$, přičemž krychle $[-k,k]^n$ je kompaktní podle věty o součinu. Proto i její uzavřená podmnožina A je kompaktní. □

Věta 6.10. *Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní.*

Důkaz. Nechť f je spojité zobrazení $f : X \to Y$ z kompaktního prostoru X a nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $f(X)$. Potom $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ je otevřené pokrytí X a tedy $X = f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n)$, neboli $f(X) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. □

Věta 6.11. *Spojitá bijekce $f : X \to Y$ z kompaktního prostoru X do Hausdorffova prostoru Y je homeomorfismus.*

Důkaz. Stačí ukázat, že f^{-1} je spojité, tedy že pro uzavřenou $F \subseteq X$ je i $f(F) \subseteq Y$ uzavřená. Přitom je ale F kompaktní, tedy i $f(F)$ je kompaktní a proto uzavřená. □

Definice 6.12. Nechť X je topologický prostor a nechť $\sim$ je relace ekvivalence na X. Označme projekci $p \colon X \to X/{\sim}$. Definujme *kvocientovou (identifikační) topologii* na rozkladu $X/{\sim}$ jako

$$\{V \subseteq X/{\sim} \mid p^{-1}(V) \subseteq X \text{ otevřená}\}.$$

Rozklad $X/{\sim}$ společně s kvocientovou topologií nazveme *kvocientem* X podle relace $\sim$.

Základní vlastnost kvocientu je, že zobrazení $f \colon X/{\sim} \to Y$ je spojité, právě když je spojité $fp \colon X \to Y$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "fp"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/{\sim} \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Ve spojení s předchozí větou lze některé kvocienty popsat velice konkrétně.

Příklady 6.13.

cv 1. Popište topologii kvocientu $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ grupy $\mathbb{R}$ podle její podgrupy $\mathbb{Q}$. Není ani T_1 byť $\mathbb{R}$ je dokonce T_4.

cv 2. $([0,1] \times S^{n-1})/(\{0\} \times S^{n-1}) \cong D^n$; zde $X/A = X/{\sim}$, kde $a \sim a'$ pro libovolná $a, a' \in A$. (Potřebné zobrazení jsou „polární souřadnice“.)

cv 3. $D^n/S^{n-1} \cong S^n$. (Potřebné zobrazení je dané obíháním okolo S^n po hlavních kružnicích, pro něž je jednoduchá formulka.)

cv 4. $S^1 \times S^1 \cong [0,1]^2/{\sim}$ ($\cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ – zde jde o kvocient grup).

5. Obrázek ilustrující ostatní plochy jako kvocienty mnohoúhelníků; poznámka o hyperbolickém dláždění.

** 6. $SS^{n-1} \cong S^n$

** 7. Přímka s dvojnásobným počátkem $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}/{\sim}$, kde $(x, -1) \sim (x, 1)$ kdykoliv $x \neq 0$ – není Hausdorffův, byť je „lokálně Hausdorffův“.

nd 8. Každý retrakt je zároveň kvocientem a podprostorem.

dú 5 9. $\mathbb{R}^2/{\sim}$, $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$, je homeomorfní $\mathbb{R}_{\geq 0}$

Nyní dokážeme větu o součinu. Prvně uveďme lemma.

Lemma 6.14 (tube lemma)**.** *Nechť X je kompaktní prostor, Y libovolný, $W \subseteq X \times Y$ otevřená množina obsahující $X \times \{y\}$. Potom existuje otevřené okolí $V \ni y$ takové, že $X \times V \subseteq W$.*

Důkaz. Z definice součinové topologie existují pro každé (x, y) otevřená okolí $U_x \ni x$ a $V_x \ni y$ tak, že $U_x \times V_x \subseteq W$. Z pokrytí $\{U_x \mid x \in X\}$ lze vybrat konečné podpokrytí $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Položme $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$. Pak

$$U_{x_i} \times V \subseteq U_{x_i} \times V_{x_i} \subseteq W$$

a tedy také $X \times V = \bigcup U_{x_i} \times V \subseteq W$. □

dú 6 **Příklad 6.15.** Dokažte, že lemma je ekvivalentní následujícímu tvrzení: projekce $X \times Y \to Y$ je *uzavřená*, tj. obraz uzavřené množiny je uzavřený.

Důkaz věty o součinu. Nechť $\mathcal{W}$ je otevřené pokrytí $X \times Y$. Pro každé $y \in Y$ uvažme podprostor $X \times \{y\}$, který je homeomorfní X a tedy kompaktní. Protože je $\mathcal{W}$ jeho otevřené pokrytí, lze vybrat $W_{1,y}, \dots, W_{n,y} \in \mathcal{U}$ pokrývající $X \times \{y\}$. Podle lemmatu obsahuje $W_{1,y} \cup \dots \cup W_{n,y}$ podmnožinu tvaru $X \times V_y$. Vidíme tedy, že stačí pokrýt Y konečně mnoha V_y, protože je každé $X \times V_y$ pokryto konečně mnoha prvky $\mathcal{W}$. Protože je ale $\{V_y \mid y \in Y\}$ otevřené pokrytí Y, plyne toto z kompaktnosti Y. □

Naším dalším cílem bude důkaz Tichonovovy věty o nekonečných součinech kompaktních prostorů. Dokážeme k tomu prvně tzv. Alexanderovo lemma.

Lemma 6.16 (Alexander)**.** *Nechť X je topologický prostor. Pokud existuje subbáze $\mathcal{S}$ taková, že z každého otevřeného pokrytí $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ lze vybrat konečné podpokrytí, pak X je kompaktní.*

Důkaz. Důkaz je založen na axiomu výběru, konkrétně na principu maximality, či jak se to česky jmenuje. Předpokládejme, že X není kompaktní a vyberme maximální otevřené pokrytí
dú 7 $\mathcal{U}$, které nemá konečné podpokrytí (předpoklady Zornova lemmatu se ověří jednoduše).

Nechť $x \in X$ je libovolný bod. Jelikož je $\mathcal{U}$ pokrytí, existuje $x \in U \in \mathcal{U}$. Protože je $\mathcal{S}$ subbáze, existují pak $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tak, že

$$x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U.$$

Ukážeme nyní sporem, že nějaké S_i je prvkem $\mathcal{U}$. Kdyby $S_i \notin \mathcal{U}$, podle maximality $\mathcal{U}$ existuje konečná $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}$ tak, že $\{S_i\} \cup \mathcal{U}_i$ je pokrytí, tj. $\mathcal{U}_i$ pokrývá $X \smallsetminus S_i$. Potom ale $\mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$ pokrývá

$$(X \smallsetminus S_1) \cup \dots \cup (X \smallsetminus S_n) = X \smallsetminus (S_1 \cap \dots \cap S_n) \supseteq X \smallsetminus U$$

a tedy $\{U\} \cup \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$ pokrývá X, což je spor.

Označíme-li příslušné $S_i \in \mathcal{U}$ jako S_x, máme $x \in S_x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{U}$. Protože je ale $\{S_x \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{S}$ otevřené pokrytí prvky $\mathcal{S}$, lze z něj podle předpokladu vybrat konečné podpokrytí. To bude ale zároveň konečným podpokrytím $\mathcal{U}$, spor. □

Věta 6.17 (Tichonov)**.** *Součin libovolného množství kompaktních prostorů je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $X = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$, kde X_i je kompaktní. Ukážeme, že subbáze

$$\{p_j^{-1}(U_j) \mid j \in \mathcal{I},\, U_j \subseteq X_j \text{ otevřená}\}$$

splňuje podmínky Alexandrova lemmatu. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí subbazickými množinami. Definujme $\mathcal{U}_j$ jako množinu těch otevřených $U_j \subseteq X_j$, že $p_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{U}$. Předpokládejme, že žádné $\mathcal{U}_j$ není pokrytí. Potom existuje, pro každé $j \in \mathcal{I}$, bod $x_j \in X_j$ tak, že $x_j \notin \bigcup \mathcal{U}_j$. Potom ale bod se složkami $(x_j)_{j \in \mathcal{I}}$ neleží v $\bigcup \mathcal{U}$, což je spor s tím, že $\mathcal{U}$ je pokrytí.

Proto je nějaké $\mathcal{U}_j$ pokrytí a díky kompaktnosti z něj lze vybrat konečné podpokrytí $U_1, \dots, U_n$. Potom zřejmě $p_j^{-1}(U_1), \dots, p_j^{-1}(U_n)$ je konečné podpokrytí $\mathcal{U}$. □

konec 4. přednášky

Věta 6.18. *Kompaktní Hausdorffův prostor je normální.*

Důkaz. Nechť $F \subseteq X$ je uzavřená, $x \notin F$. Pro libovolný $y \in F$ existují $U_y \ni x$, $V_y \ni y$ otevřené disjunktní. Protože je F kompaktní, existuje konečně mnoho $y_1, \dots, y_n \in F$ takových, že

$$F \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}, \quad x \in U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n};$$

ty jsou otevřené a disjunktní.

dú 8 Implikace $T_3 \Rightarrow T_4$ je za domácí úkol. □

Hromadný bod posloupnosti (x_n) je takový bod x, že pro každé otevřené okolí $U \ni x$ existuje nekonečně mnoho členů $x_n \in U$. Naším cílem bude nyní ukázat, že metrický prostor je kompaktní, právě když má každá posloupnost hromadný bod. Říkejme této vlastnosti prozatím sekvenční kompaktnost. Definujme průměr $\operatorname{diam} A = \sup\{\operatorname{dist}(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Věta 6.19 (Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí (sekvenčně) kompaktního metrického prostoru M. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že každá podmnožina $A \subseteq M$ průměru $\operatorname{diam} A \le \varepsilon$ leží v nějakém $U \in \mathcal{U}$.*

Číslu z věty říkáme *Lebesgueovo číslo* pokrytí $\mathcal{U}$.

Důkaz. Zjevně stačí najít ε takové, že každá uzavřená koule o poloměru ε leží v nějakém $U \in \mathcal{U}$. Předpokládejme, že žádné takové ε neexistuje a zvolme, pro každé $n \in \mathbb{N}$, kouli $B_{1/n}(x_n)$, která se nevejde do žádné $U \in \mathcal{U}$. Přechodem k podposloupnosti můžeme předpokládat, že $x_n \to x$. Protože je $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí, existuje $\delta > 0$ tak, že $B_{2\delta}(x) \subseteq U \in \mathcal{U}$. Pro $n \gg 0$ je $\operatorname{dist}(x_n, x) < \delta$ a $1/n < \delta$ a proto $B_{1/n}(x_n) \subseteq B_{2\delta}(x) \subseteq U$, spor. □

Věta 6.20. *Metrický prostor je kompaktní, právě když je sekvenčně kompaktní.*

Důkaz. Směr „$\Rightarrow$" je jednoduchý. Nechť x_n je posloupnost, která nemá žádný hromadný bod. Potom pro každé $x \in M$ existuje nějaká koule $B_{\varepsilon_x}(x)$ obsahující pouze konečný počet členů posloupnosti. Výběrem konečného podpokrytí dostaneme, že v celém prostoru je pouze konečně mnoho bodů posloupnosti, spor.

Pro opačný směr „$\Leftarrow$" nechť $\varepsilon > 0$ je Lebesgueovo číslo $\mathcal{U}$. Protože se každá koule o poloměru ε vejde do nějaké $U \in \mathcal{U}$, stačí M pokrýt konečně mnoha koulemi poloměru ε. Volme postupně posloupnost bodů, které jsou navzájem vzdáleny alespoň o ε. Taková posloupnost musí být nutně konečná, protože žádná její podposloupnost není cauchyovská a nemůže tedy konvergovat; označme ji $x_1, \dots, x_n$. Potom $M = B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n)$. □

? *Otázka.* Říct něco o sítích, jejich konvergenci a ekvivalenci kompaktnosti s existencí konvergentní podsítě? Říct něco o filtrech, ultrafiltrech a ekvivalenci kompaktností s tím, že každý ultrafiltr konverguje (k alespoň jednomu bodu)?

7. Souvislost

Klasicky se prázdný topologický prostor považuje za souvislý, z různých důvodů je ale výhodnější ho za souvislý nepovažovat. Tomuto dilematu se vyhneme tím, že se omezíme na neprázdné prostory.

Definice 7.1. Nechť X je neprázdný topologický prostor. Řekneme, že X je *souvislý*, jestliže jediné podmnožiny $A \subseteq X$, které jsou zároveň otevřené a uzavřené, jsou $\emptyset$ a X.

Podmnožiny z definice (tj. ty, které jsou jak otevřené, tak uzavřené) se nazývají *obojetné*, anglicky clopen. Je-li U obojetná a $V = X \smallsetminus U$ její doplněk, pak celý prostor X je disjunktním sjednocením $X = U \sqcup V$. V části o oddělovacích axiomech jsme pomocí disjunktních otevřených množin oddělovali podmnožiny X a tento rozklad pak odpovídá tomu, že celý prostor se skládá za dvou oddělených částí.

cv **Lemma 7.2.** *Neprázdný prostor X je souvislý, právě když každé spojité zobrazení $\chi\colon X \to \{0,1\}$ je konstantní.*

Věta 7.3. *Uzavřený interval $[a,b]$ je souvislý.*

Poznámka. Tato vlastnost intervalu závisí, stejně jako kompaktnost, na úplnosti reálných čísel. Konkrétně $[a,b]_{\mathbb{Q}}$ není souvislý: zvolme libovolné iracionální c s vlastností $a < c < b$, pak $[a,b]_{\mathbb{Q}} = [a,c)_{\mathbb{Q}} \cup (c,b]_{\mathbb{Q}}$.

Důkaz. Předpokládejme, že $U \subseteq [a,b]$ je obojetná, $\emptyset, X \neq U$. Případným přejítím k doplňku můžeme předpokládat, že $a \in U$. Označme

$$T = \{t \in [a,b] \mid [a,t] \subseteq U\}$$

Chceme $b \in T$. Zjevně $a \in T$ a proto existuje $t_0 = \sup T$. Z uzavřenosti U dostáváme $t_0 \in T$, z otevřenosti pak $t_0 + \varepsilon \in T$ s výjimkou případu $t_0 = b$. To je spor s $U \neq X$.

(Jinak: pokud by spojité zobrazení $\chi\colon X \to \{0,1\}$ nabývalo hodnot 0 a 1, muselo by nabývat i hodnoty 1/2, spor.) $\square$

Věta 7.4. *Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý.*

Důkaz. Nechť $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení, kde X je souvislý. Nechť $\chi\colon f(X) \to \{0,1\}$ je libovolná spojitá funkce. Potom je také $\chi f\colon X \to \{0,1\}$ spojitá a tedy konstantní. Protože je $f\colon X \to f(X)$ surjektivní, je také χ konstantní.

(Jinak: je-li $U \subseteq f(X)$ obojetná, je obojetná i $f^{-1}(U) \subseteq X$.) $\square$

Věta 7.5. *Uzávěr souvislé podmnožiny je souvislý.*

Důkaz. Je-li $\chi\colon \overline{A} \to \{0,1\}$ spojitá funkce, pak její zúžení na A je konstantní, řekněme $\chi|_A = 0$. Přitom $\chi^{-1}(0)$ je uzavřená množina obsahující A a tedy $\chi^{-1} = \overline{A}$, tedy χ je konstantní. $\square$

Věta 7.6. *Nechť $\mathcal{M}$ je systém souvislých podmnožin v X takový, že $A \cap B \neq \emptyset$ pro každé dvě $A, B \in \mathcal{M}$. Potom $\bigcup \mathcal{M}$ je souvislý.*

Důkaz. Nechť $f\colon \bigcup \mathcal{M} \to \{0,1\}$ je spojité zobrazení. Potom její zúžení na každé $A \in \mathcal{M}$ je konstantní, díky souvislosti A. Přitom musí být tato konstantní hodnota stejná pro všechna $A \in \mathcal{M}$, díky neprázdnosti průniků. Tedy f je konstantní. $\square$

Důsledek 7.7. *Reálná osa $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n,n]$ je souvislá.*

cv **Příklad 7.8.** Intervaly $[a,b]$, $[a,b)$, (a,b) jsou souvislé – dokažte. Pomocí odebírání bodů dále dokažte, že nejsou homeomorfní.

** **Příklad 7.9.** Dokažte, že prostor

$$\{(x, \sin\tfrac{\pi}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

je souvislý, ale nikoliv obloukově souvislý.

Definice 7.10. *Komponenta* neprázdného prostoru X je maximální souvislá podmnožina.

Věta 7.11. *Libovolný topologický prostor je disjunktním sjednocením svých komponent. Tyto komponenty jsou uzavřené.*

Důkaz. Nechť $x \in X$ a uvažme systém $\mathcal{M} = \{A \subseteq X \mid A \text{ souvislá}, x \in A\}$. Potom $\bigcup \mathcal{M}$ je souvislá podmnožina obsahující x, zjevně maximální. Kdyby dvě různé komponenty měly neprázdný průnik, bylo by jejich sjednocení souvislé, což by byl spor s maximalitou. Uzavřenost plyne z toho, že uzávěr souvislé podmnožiny je souvislý a z maximality. □

Definice 7.12. Řekneme, že topologický prostor X je *totálně nesouvislý*, jestliže jeho komponenty jsou jednobodové.

dú 9 **Příklad 7.13.** Dokažte, že $\mathbb{Q}$ je totálně nesouvislý.

Množina obojetných množin společně s inkluzí, $(\mathrm{Ob}(X), \subseteq)$, tvoří Booleovu algebru (obojetné množiny jsou uzavřené na konečné sjednocení, konečné průniky a komplementy). Takto dostaneme všechny Booleovy algebry (až na izomorfismus). Po zúžení na kompaktní Hausdorffovy totálně nesouvislé prostory, tzv. Stoneovy prostory, dostáváme jednoznačnou korespondenci, tzv. *Stoneovu dualitu.*

nd Nechť naopak B je Booleova algebra. Uvažujme množinu $S(B)$ všech homomorfismů Booleových algeber $\varphi\colon B \to 2$.[1] Můžeme tedy $S(B) \subseteq 2^B$ vybavit topologií podprostoru, kde 2^B má topologii součinu (2 má diskrétní topologii). Jako podprostor součinu Hausdorffových totálně nesouvislých je Hausdorffův a totálně nesouvislý. Nyní ukážeme, že $S(B)$ je uzavřený, tedy kompaktní. Nechť $\varphi\colon B \to 2$ není homomorfismus Booleových algeber. Předpokládejme například, že $\varphi(b) = 0 = \varphi(c)$, ale $\varphi(b \wedge c) = 1$. Označíme-li projekci $2^B \to 2$ na b-tou složku jako p_b, pak $\varphi \in p_b^{-1}(0) \cap p_c^{-1}(0) \cap p_{b\wedge c}^{-1}(1)$, přičemž žádné zobrazení z tohoto otevřeného okolí neleží v $S(B)$.

nd **Věta 7.14** (Stone)**.** *Výše uvedené kontrukce zadávají (kontravariantní) ekvivalenci mezi Stoneovými prostory a Booleovými algebrami.*

nd Kontravariantnost znamená, že homomorfismům algeber $B \to B'$ odpovídají spojitá zobrazení $S(B') \to S(B)$.

** *Důkaz.* Homeomorfismus $X \to S(\mathrm{Ob}(X))$ posílá bod $x \in X$ na zobrazení $U \mapsto (x \in U)$, kde $x \in U$ je potřeba chápat jako logickou hodnotu, tedy prvek 2.

Izomorfismus $B \to \mathrm{Ob}(S(B))$ posílá prvek $b \in B$ na obojetnou množinu

$$p_b^{-1}(1) = \{\varphi \in S(B) \mid \varphi(b) = 1\} \subseteq S(B).$$ □

Lemma 7.15. *Označme C_x sjednocení všech souvislých podmnožin obsahujících x, tj. komponentu bodu x. Dále označme Q_x průnik všech obojetných podmnožin obsahujících x, tj. kvazikomponentu bodu x. Na závěr označme O_x průnik všech otevřených podmnožin obsahujících x. Platí*

$$C_x \subseteq Q_x \supseteq O_x$$

[1]Alternativní charakterizace takových homomorfismů je pomocí $\varphi^{-1}(0)$ – to jsou právě maximální ideály – nebo pomocí $\varphi^{-1}(1)$ – to jsou právě ultrafiltry. (Filtr v B je nahoru uzavřená množina $F \subseteq B$, uzavřená na konečná suprema. Ultrafiltr je maximální filtr neobsahující 0.)

přičemž $O_x = \{x\}$ právě když X je T_1, druhá inkluze je rovnost pokud topologie X je generována obojetnými množinami a prní inkluze je rovnost pokud X je kompaktní Hausdorffův (nebo taky pokud X je lokálně souvislý).

Zejména kompaktní Hausdorffův prostor je totálně nesouvislý ($C_x = \{x\}$), právě když je totalně separovaný ($Q_x = \{x\}$), právě když je nula-rozměrný (topologie generovaná obojetnými množinami).

Důkaz. První inkluze plyne z toho, že každá souvislá podmnožina obsahující x je obsažena v každé obojetné podmnožině obsahující x, druhá z toho, že každá obojetná podmnožina je otevřená. První dvě charakterizace jsou snadné (druhá plyne z toho, že v případě nula-rozměrného X tvoří obojetná okolí bodu bázi okolí tohoto bodu).

** Poslední bod je výrazně těžší: Ukážeme, že Q_x je souvislá podmnožina. Nechť tedy $Q_x = F \sqcup G$ a řekněme $F \ni x$. Protože je X normální, lze tyto dvě uzavřené podmnožiny F a G (jedná se o uzavřené podmnožiny Q_x, který je sám uzavřený) oddělit otevřenými množinami $F \subseteq U$, $G \subseteq V$, přičemž $U \cap V = \emptyset$ a zejména tedy $F = Q_x \cap U$, $G = Q_x \cap V$. Označme $H = X \smallsetminus (U \cup V)$, přičemž jakožto uzavřená podmnožina kompaktního prostoru se jedná o kompaktní prostor. Protože průnik všech obojetných podmnožin obsahujících x je roven Q_x a má tedy nulový průnik s H, existuje konečný podsystém, jehož průnik A (opět obojetná podmnožina) má nulový průnik s H, tedy je obsažen v $U \cup V$:

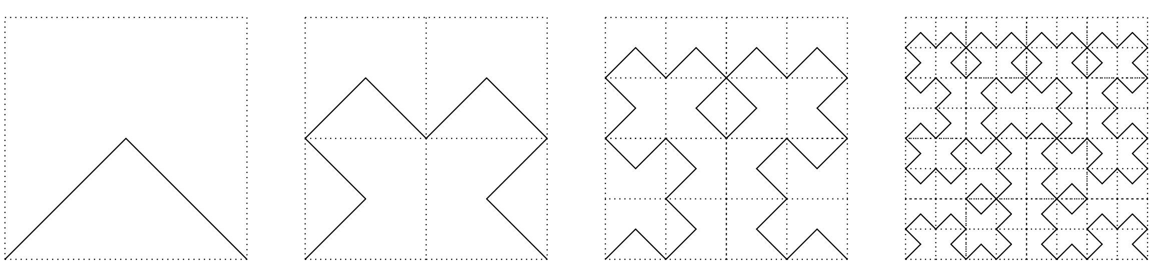
$$Q_x \subseteq A \subseteq U \cup V.$$

Potom $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ a obě tyto jsou obojetné (obě jsou otevřené, stejně jako $X \smallsetminus A$). Protože $A \cap U \ni x$, musí být $Q_x \subseteq A \cap U$ a dostáváme tak $Q_x = F$ a Q_x je opravdu souvislý.

Zbývá ještě ukázat, že totálně separovaný kompaktní Hausdorffův prostor je nula-rozměrný. Nechť $X \supseteq U \ni x$ je okolí. Protože $Q_x = \{x\}$, je průnik všech obojetných okolí x prázdný v kompaktním $X \smallsetminus U$, takže opět už nějaký konečný průnik, tj. nějaké objetné okolí x, je obsažené v U. □

konec 5. přednášky

Příklad 7.16 (Cesta vyplňující čtverec)**.** Začněme s cestou znázorněnou v prvním obrázku, kterou procházíme konstantní rychlostí, označme ji γ_1. V dalších krocích nahradíme všechny úseky γ_n, které vypadají jako γ_1, odpovídajícími úseky vypadajícími jako γ_2. Všechny cesty jsou procházeny konstantní rychlostí.



γ_1 γ_2 γ_3 γ_4

Položme $\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$. Jelikož $\gamma_{n+1}(t)$ a $\gamma_n(t)$ leží v témže čtverci o straně $(1/2)^{n-1}$, je tato posloupnost stejnoměrně konvergentní a proto je γ spojitá. Zbývá ukázat, že je surjektivní. Nechť x je libovolný bod čtverce a napišme ho jako průnik posloupnosti čtverců o stranách

$(1/2)^{n-1}$ znázorněných v obrázcích. V každém takovém čtverci leží nějaký bod $\gamma_n(t_n)$ a proto je $x = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t_n)$. Přejítím ke konvergentní podposloupnosti můžeme předpokládat $t_n \to t$ a pak $\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma(t_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t_n) = x$ ze stejnoměrné konvergence.

(Jinak $0, x_1x_2x_3x_4 \ldots \mapsto (0, x_1x_3 \ldots ; 0, x_2x_4 \ldots)$.)

Věta 7.17. *Součin dvou souvislých prostorů je souvislý.*

Důkaz. Nechť $f\colon X \times Y \to \{0,1\}$ je spojité zobrazení a nechť (x,y) a (x',y') jsou dva body $X \times Y$. Potom $f(x,y) = f(x',y)$ ze souvislosti $X \times \{y\} \cong X$ a $f(x',y) = f(x',y')$ ze souvislosti $\{x'\} \times Y \cong Y$. Je tedy f konstantní. $\square$

Příklad 7.18. Prostory $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$, kde $n > 1$, nejsou homeomorfní – opět pomocí odebírání bodů. K tomu je potřeba dokázat, že $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ je souvislý. Lze ho napsat jako sjednocení souvislých množin tvaru $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}^j$, kde $\mathbb{R}_\pm$ je buď množina kladných nebo záporných čísel a $i + 1 + j = n$. Tyto množiny sice nemají neprázdné průniky, ale to nastane pouze pro dvojice $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^j$ a $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^j$ a ty mají neprázdný průnik s kteroukoliv jinou množinou ze systému $(n > 1)$.

Věta 7.19. *Libovolný součin souvislých prostorů je souvislý.*

Důkaz. Nechť opět $f : \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to \{0,1\}$ a nechť $x = (x_i) \in f^{-1}(0)$. Protože je f spojité, nabývá hodnoty 0 také na nějakém okolí $p_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \cdots \cap p_{j_n}^{-1}(U_{j_n})$ bodu x. Zejména f nabývá hodnoty 0 na všech bodech y splňujících $x_{j_1} = y_{j_1}, \ldots, x_{j_n} = y_{j_n}$. V předchozím důkazu jsme ukázali, že f má stejné hodnoty na bodech lišících se v konečně mnoha komponentách. Dohromady je f konstantní. $\square$

Od teď budeme značit $I = [0,1]$.

Definice 7.20. *Cesta* v X je spojité zobrazení $\gamma\colon I \to X$. Říkáme, že γ spojuje body $\gamma(0)$, $\gamma(1)$.

Definice 7.21. Neprázdný prostor X se nazývá *cestově souvislý* (tradičně *obloukově souvislý*), jestliže lze každé dva jeho body spojit cestou.

Věta 7.22. *Libovolný cestově souvislý prostor je souvislý.*

Důkaz. Je-li γ_x cesta spojující nějaký vybraný bod $x_0 \in X$ s bodem x, pak $X = \bigcup_{x\in X} \operatorname{im} \gamma_x$, přičemž každý $\operatorname{im} \gamma_x$ je souvislý (jako obraz I) a všechny se protínají v x_0. $\square$

V opačném směru věta neplatí vždy, ale pouze za jistých omezujících podmínek. Řekneme, že prostor X je *lokálně cestově souvislý*, jestliže cestově souvislá okolí tvoří bázi okolí v každém bodě, tj. jestliže pro každé okolí $N \ni x$ existuje cestově souvislé okolí O splňující $N \supseteq O \ni x$.

cv **Příklad 7.23.** Otevřené podmnožiny eukleidovských prostorů jsou lokálně cestově souvislé. Obecné podmnožiny lokálně cestově souvislé být nemusí (viz Příklad 7.9).

Lemma 7.24. *Pokdu lze spojit cestou x s y a y se z, pak také x lze spojit cestou se z.*

cv *Důkaz.* Nechť γ je cesta spojující x s y a δ cesta spojující y se z. Položme

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \delta(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Protože intervaly $[0,1/2]$ a $[1/2,1]$ tvoří konečné uzavřené pokrytí a na každém je $\gamma * \delta$ spojité, je spojité na celém $[0,1]$. Přitom $(\gamma * \delta)(0) = \gamma(0) = x$ a $(\gamma * \delta)(1) = \delta(1) = z$. $\square$

Věta 7.25. *Je-li X souvislý a lokálně cestově souvislý, pak je cestově souvislý.*

Důkaz. Nechť $x \in X$ a uvažme $C(x) = \{y \in X \mid x$ lze spojit cestou s $y\}$. Podle předpokladu lokální cestové souvislosti je $C(x)$ otevřená – kdykoliv lze x spojit s y a O je libovolné cestově souvislé okolí y, pak lze x spojit s kterýmkoliv bodem O. Jelikož je X disjunktním sjednocením $C(x)$, kde $x \in X$, je i doplněk $C(x)$ otevřený a proto je $C(x)$ obojetná. Přitom $x \in C(x)$, takže ze souvislosti plyne $C(x) = X$, a tedy x lze spojit s každým bodem X. □

dú 10 *Poznámka.* Pro obecný prostor X se množina $C(x)$ z předchozího důkazu nazývá cestová komponenta a podobně lze ukázat, že pro lokálně cestově souvislý X se jeho komponenty shodují s cestovými komponentami.

? *Otázka.* Zmínit lokálně souvislé prostory, to že jejich komponenty jsou otevřené? Říct něco o kontinuech (kompaktní, souvislé metrické prostory) a Hahnově–Mazurkiewiczově větě (spojité obrazy intervalu jsou právě lokálně souvislá kontinua)?

8. Lokálně kompaktní prostory

Definice 8.1. Hausdorffův prostor X se nazývá *lokálně kompaktní* (Hausdorffův), jestliže kompaktní okolí tvoří bázi okolí každého bodu, tj. pokud každé okolí $N \ni x$ obsahuje kompaktní podokolí $N \supseteq C \ni x$.

? *Otázka.* Důsledně říkat lokálně kompaktní *Hausdorffův.*

Příklad 8.2.

1. Každý kompaktní Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní, protože je regulární (uzavřená okolí tvoří bázi okolí) a uzavřená=kompaktní.
2. Každý eukleidovský prostor je lokálně kompaktní – uzavřené koule tvoří bázi okolí a jsou kompaktní.
3. Diskrétní prostory jsou lokálně kompaktní.
4. Racionální čísla $\mathbb{Q}$ nejsou lokálně kompaktní – žádné okolí není kompaktní.

Následující asi přeskočit, ten důkaz je dost o ničem; jinak samozřejmě pomůže obrázek - používal jsem konevnci kulaté=otevřené, hranaté=uzavřené.

$**$ **Věta 8.3.** *Má-li každý bod Hausdorffova prostoru X nějaké kompaktní okolí, pak je lokálně kompaktní.*

Důkaz. Nechť C je kompaktní okolí bodu x a N libovolné jeho okolí. Potom $C \cap N$ je okolí x v kompaktním Hausdorffově prostrou C. Proto existuje kompaktní podokolí $x \in D \subseteq C \cap N$. Protože je D okolím x v C a C je okolím x v X, je D také okolím x v X. □

Věta 8.4. *Součin dvou lokálně kompaktních prostorů je lokálně kompaktní.*

Důkaz. Zjevně stačí najít kompaktní okolí $(x, y) \in X \times Y$, které se vejde do $U \times V \ni (x, y)$. Nechť $U \supseteq C \ni x$ a $V \supseteq D \ni y$. Potom $C \times D$ je ono hledané kompaktní okolí. □

Konstrukce 8.5 (jednobodová kompaktifikace)**.** Nechť X je lokálně kompaktní prostor a $\infty \notin X$. Položme $X^+ = X \cup \{\infty\}$. Definujme na X^+ topologii následujícím způsobem: $U \subseteq X^+$ je otevřená, právě když

- $\infty \notin U$ a U je otevřená v X nebo

- $\infty \in U$ a $X \smallsetminus U$ je kompaktní.

Tento prostor se nazývá *jednobodová kompaktifikace* prostoru X.

dú 11 **Příklad 8.6.** Dokažte, že se jedná opravdu o topologii (k tomu budete potřebovat dokázat, že konečné sjednocení kompaktních podmnožin je kompaktní).

Věta 8.7. *Prostor X^+ je kompaktní Hausdorffův prostor, jehož je X podprostorem.*

Důkaz. Zjevně všechny „stopy“ $X \cap U$ otevřených $U \subseteq X^+$ jsou otevřené (k tomu je potřeba Hausdorffovost), takže je vskutku X podprostorem X^+.

Nechť $\mathcal{U}$ je libovolné otevřené pokrytí X^+. Pak nějaké $U_0 \in \mathcal{U}$ obsahuje ∞ a z otevřenosti je $X \smallsetminus U_0$ kompaktní. Proto lze z $\mathcal{U}$ vybrat konečně mnoho $U_1, \dots, U_n$ pokrývajících $X \smallsetminus X_0$. Dohromady $U_0, U_1, \dots, U_n$ pokrývají X^+.

Body X lze oddělit otevřenými podmnožinami v X. Zbývá tedy oddělit $x \in X$ a ∞. Díky lokální kompaktnosti existuje kompaktní okolí $C \ni x$. Z definice okolí $C \supseteq U \ni x$ a potom $U \ni x$ a $X^+ \smallsetminus C \ni \infty$ jsou hledané oddělující otevřené množiny. □

cv **Příklad 8.8.** Výše uvedenými požadavky je topologie na X^+ jednoznačně určena.

cv **Příklad 8.9.** Popište jednobodovou kompaktifikaci $\mathbb{R}^n$. (popsat stereografickou projekci $S^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{x-e_0}{x_0-1}$, ukázat, že je spojitá společně se svou inverzí $v \mapsto \frac{-1+|v|^2}{1+|v|^2} \cdot e_0 + \frac{2}{1+|v|^2} \cdot v$ – obě jsou dány vzorečkem (moje univerzální zdůvodňování) – a použít předchozí příklad). Vzoreček pro inverzi lze nechat za DÚ s tím, že bych jim odvodil, že musí být tvaru $e_0 + k(v - e_0)$.

dú 12 **Příklad 8.10.** Popište jednobodovou kompaktifikaci kompaktního Hausdorffova prostoru.

——— konec 6. přednášky ———

Tvrzení 8.11. *Spojitá bijekce $f\colon X \to Y$ mezi lokálně kompaktními prostory je homeomorfismus, právě když je „řádné“ (proper, tj. vzor kompaktní množiny je kompaktní).*

Důkaz. Podle definice topologie na jednobodové kompaktifikaci je $f^+\colon X^+ \to Y^+$ spojité, právě když je f řádné. Potom se ale jedná o spojitou bijekci mezi kompaktními Hausdorffovými prostory a tedy o homeomorfismus. Jeho zúžení f pak musí být také homeomorfismus. □

To lze (možná) použít na příklad stereografické projekce $S^n \smallsetminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n$ – je však potřeba dokázat řádnost.

Věta 8.12. *Lokálně kompaktní prostory jsou právě otevřené podprostory kompaktních Hausdorffových prostorů.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“: každý lokálně kompaktní prostor X je otevřeným podprostorem X^+.

„$\Leftarrow$“: každý kompaktní Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní a tyto jsou zjevně uzavřené na otevřené podprostory. □

Poznámka. Platí také, že uzavřená podmnožina lokálně kompaktního podprostoru X je lokálně kompaktní: kompaktní okolí x v F lze dostat jako průniky F s kompaktními okolími x v X.

** Ještě obecněji platí, že podmnožina $A \subseteq X$ je lokálně kompaktní, právě když je průnikem otevřené a uzavřené podmnožiny (konkrétně je A otevřená v $\overline{A}$).

9. Reálné funkce

Definice 9.1. *Kompaktifikace* prostoru X je vložení $X \hookrightarrow K$ prostoru X do nějakého kompaktního Hausdorffova prostoru K jako podprostoru takové, že platí $\overline{X} = K$.

Základním příkladem je výše zmiňovaná jednobodová kompaktifikace. Opačným extrémem je tzv. Stoneova-Čechova kompaktifikace, která naopak přidá bodů co nejvíce. Tato kompaktifikace funguje pro libovolné úplně regulární prostory – těmi se budeme zabývat v této kapitole.

Definice 9.2. Nechť X je T_1 topologický prostor. Řekneme, že X je *$T_{3\frac{1}{2}}$ (úplně regulární)*, jestliže pro každý jeho bod $x \in X$ a uzavřenou podmnožinu $F \subseteq X$ neobsahující x existuje spojitá funkce $f\colon X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$ a $f|_F = 1$.

? *Otázka.* Cvičení: každý lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je úplně regulární (ono to plyne taky z jednobodové kompaktifikace).

Příklad 9.3. Každý metrický prostor je úplně regulární. Dokázali jsme dokonce, že je „úplně normální“, tj. že lze oddělit funkcí libovolné dvě uzavřené množiny. Za chvíli uvidíme, že tato podmínka je ekvivalentní normalitě.

Věta 9.4. *Úplně regulární prostory jsou uzavřené na podprostory a součiny.*

Důkaz. Je-li $A \subseteq X$ libovoný podprostor a $x \in A$, $F \subseteq A$ uzavřená v A a neobsahující x, tak potom x a $\overline{F}$ jsou také disjunktní v X. Proto existuje $f\colon X \to [0,1]$ oddělující x od $\overline{F}$. Její zúžení na A odděluje x od F.

Nechť nyní X_i jsou úplně regulární, $i \in \mathcal{I}$, a uvažme součin $X = \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Je-li $x \in X$ a $F \subseteq X$ uzavřená neobsahující x, potom $x \in X \setminus F$ (otevřená) a podle definice topologie součinu

$$x \in p_{j_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_{j_n}^{-1}(U_n) \subseteq X \setminus F$$

pro nějaké otevřené $U_k \subseteq X_{j_k}$. Přechodem k doplňkům $F_k = X_{j_k} \setminus U_k$ dostáváme

$$p_{j_1}^{-1}(F_1) \cup \cdots \cup p_{j_n}^{-1}(F_n) \supseteq F$$

a uzavřená množina nalevo stále neobsahuje x. Stačí ji proto od x oddělit. Zvolme spojité funkce $f_k\colon X_{j_k} \to [0,1]$ oddělující $p_{j_k}(x)$ od F_k a položme

$$f(x) = \max\{f_1(p_{j_1}(x)), \ldots, f_n(p_{j_n}(x))\}. \qquad \square$$

cv **Cvičení 9.5.** Dokažte, že pro spojité funkce $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ je spojitá i $\max\{f,g\}$.

Věta 9.6. *Úplně regulární prostory jsou právě podprostory krychlí $[0,1]^S$.*

Důkaz. Každý podprostor $[0,1]^S$ je úplně regulární podle předchozí věty.

Nechť tedy naopak X je úplně regulární a položme $S = \{f : X \to [0,1] \mid f \text{ je spojité}\}$. Komponenty $t \in [0,1]^S$ budeme psát jako $t_f = p_f(t)$. Definujme zobrazení $h\colon X \to [0,1]^S$ pomocí jeho komponent

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "f"'] & {[0,1]^S} \arrow[d, "p_f"] \\ & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

tedy $h(x) = (f(x))_{f \in S}$. Podle univerzální vlastnosti součinu je h spojité. Dále ukážeme, že je injektivní a na závěr, že je homeomorfismem na svůj obraz.

Nechť $x, y \in X$ jsou dva různé body a nechť $f\colon X \to [0,1]$ je spojitá funkce oddělující x od y. Potom $(h(x))_f = 0$ a $(h(y))_f = 1$, proto $h(x) \neq h(y)$. Zbývá ukázat, že obraz uzavřené množiny $F \subseteq X$ je uzavřený v $h(X)$. Zvolme proto libovolný bod $h(x) \notin h(F)$ a hledejme jeho okolí disjunktní s $h(F)$. Díky injektivitě platí $x \notin F$ a proto existuje $f : X \to [0,1]$ oddělující x od F. Potom ale $(h(x))_f = 0$, zatímco $p_f|_{h(F)} = 1$. Proto $(p_f)^{-1}[0,1)$ je hledané otevřené okolí $h(x)$ disjunktní s $h(F)$. □

Důsledek 9.7. *Topologický prostor má kompaktifikaci, právě když je úplně regulární.*

Důkaz. Pokud má X kompaktifikaci, je podprostorem kompaktního Hausdorffova prostoru, o kterém jsme dokázali, že je normální. Za chvíli uvidíme, že $\mathrm{T}_4 \Rightarrow \mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$(Uryshohnova věta).

Nechť naopak X je úplně regulární. Potom zobrazení $h\colon X \to \overline{h(X)}$ z předchozího důkazu je kompaktifikace. □

Definice 9.8. Pro vložení $h : X \to [0,1]^S$ z předchozího důkazu položme $\beta(X) = \overline{h(X)}$. Jedná se o kompaktifikaci prostoru X a říká se jí *Stoneova-Čechova kompaktifikace.*

Poznámka. Stoneova-Čechova kompaktifikace má následující univerzální vlastnost: je-li $X \hookrightarrow K$ libovolná kompaktifikace, pak existuje jediné spojité rozšíření $\beta(X) \to K$ (jednoduše se rozšíří na zobrazení $\beta(X) \to \beta(K) \cong K$). Z tohoto důvodu se jedná o „největší“ možnou kompaktifikaci.

nd *Poznámka.* Spojité funkce $f\colon \beta(X) \to \mathbb{R}$ jsou v jednoznačné korespondenci s *ohraničenými* spojitými funkcemi $X \to \mathbb{R}$. Z kompaktnosti $\beta(X)$ je totiž $f(\beta(X))$ ohraničená a tím spíš $f(X)$. Naopak, je-li $g : X \to \mathbb{R}$ libovolná ohraničená funkce, pak ji můžeme chápat jako $g\colon X \to [a,b]$ a dostaneme $f\colon \beta(X) \to \beta([a,b]) \cong [a,b]$.

? *Otázka.* Je-li X diskrétní topologický prostor, pak $\beta(X)$ má být množina všech ultrafiltrů na X (je jasné, že každý ultrafiltr určuje jeden bod $\beta(X)$; proč ale nemůžou dva ultrafiltry zadávat stejný bod?). To má souvislost se Stoneovou dualitou, viz někde jinde.

∗ **Věta 9.9.** *Úplně regulární topologický prostor se spočetnou bází topologie je metrizovatelný.*

Důkaz. Analýzou důkazu věty o vložení do krychle lze jednoduše dospět k následujícímu pozorování. Nechť $S_0 \subseteq S = \{f : X \to I \text{ spojité}\}$. Potom zobrazení $h_0 : X \to I^{S_0}$ s komponentami $h_0 = (f)_{f \in S_0}$ je vložení, jestliže pro každou uzavřenou množinu F a bod $x \notin F$ existuje $f \in S_0$ taková, že $f(x) = 0$, $f|_F = 1$.

V dalším nalezneme spočetnou množinu S_0 s touto vlastností. Potom $h_0\colon X \hookrightarrow I^\omega$ a na I^ω existuje metrika

$$\operatorname{dist}(x,y) = \sum \tfrac{1}{2^n} |x_n - y_n|.$$

dú 13 Dokažte, že tato metrika zadává na I^ω součinovou topologii $I^\omega = \prod_{n=1}^{\infty} I$. Metrika na $X \cong h_0(X)$ se pak dostane zúžením metriky na I^ω.

Zbývá nalézt S_0. Nechť $U \subseteq V$ jsou bazické otevřené množiny. Pokud existuje nějaká spojitá $f\colon X \to I$ s vlastností $f|_U = 0$, $f|_{X \smallsetminus V} = 1$, tak nějakou takovou zvolme a označme $F_{U,V}$. Položme

$$S_0 = \{f_{U,V} \mid U \subseteq V \text{ bazické takové, že } f_{U,V} \text{ existuje}\}.$$

Je potřeba ověřit podmínku. Nechť $x \notin F$, tedy $x \in X \smallsetminus F$. Podle definice báze topologie existuje bázická V s vlastností $x \in V \subseteq X \smallsetminus F$. Díky úplné regularitě pak existuje $f\colon X \to I$ taková, že $f(x) = 0$ a $f|_{X \smallsetminus V} = 1$. Vhodnou reparamterizací

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

dostaneme funkci φf, která je nulová na okolí $f^{-1}[0, \frac{1}{2}) \ni x$. Opět existuje bazická U s vlastností $f^{-1}[0, \frac{1}{2}) \supseteq U \ni x$. Proto funkce $f_{U,V}$ existuje; sice nemusí být rovna φf, ale nicméně libovolné $f_{U,V}$ odděluje x od F tak, jak požadujeme. $\square$

nd Zejména je kompaktní Hausdorffův prostor metrizovatelný, právě když má spočetnou bázi topologie. Viděli jsme totiž v důkazu Věty 6.20, že každý kompaktní metrický prostor X lze pro každé $n \in \mathbb{N}$ pokrýt konečným systémem $\mathcal{B}_n$ koulí o poloměru $1/n$. Jednoduše se pak ukáže, že $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ tvoří bázi topologie: je-li U otevřená a $x \in U$, pak lze najít $B_{2/n}(x) \subseteq U$. V $\mathcal{B}_n$ pak lze najít kouli obsahující x a ta bude nutně ležet v $B_{2/n}(x)$.

* **Věta 9.10** (Urysohn)**.** *Nechť X je normální prostor a $F, G \subseteq X$ dvě jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojité $f\colon X \to [0,1]$ takové, že $f|_F = 0$ a $f|_G = 1$.*

Důkaz. Položme $F_0 = F$, $U_1 = X \smallsetminus G$. Hledáme tedy funkci f s vlastnostmi $f|_{U_0} = 0$, $f|_{X \smallsetminus U_1} = 1$. Z normality existují $F_0 \subseteq U_{1/2} \subseteq F_{1/2} \subseteq U_1$ (neboť $X \smallsetminus F_{1/2}$ je okolí $X \smallsetminus U_1$ disjunktní s $U_{1/2}$).

V dalším kroku dostáváme

$$F_0 \subseteq U_{1/4} \subseteq F_{1/4} \subseteq U_{1/2} \subseteq F_{1/2} \subseteq U_{3/4} \subseteq F_{3/4} \subseteq U_1.$$

a induktivně pak systém otevřených množin $U_{m/2^n}$ a uzavřených množin $F_{m/2^n}$ splňující $U_r \subseteq F_r$ a pro $r < s$ také $F_r \subseteq U_s$.

Položme $f(x) = \inf\{r = m/2^n \in [0,1] \mid x \in U_r\}$, přičemž $f(x) = 1$, pokud x neleží v žádném U_r. Zejména tedy $f|_{X \smallsetminus U_1} = 1$; zřejmě také $f|_{F_0} = 0$. Spojitost zobrazení f plyne z jednoduše ověřitelného vzorečku $f^{-1}(a,b) = \bigcup_{a<r<s<b}(U_s \smallsetminus F_r)$. $\square$

** **Věta 9.11** (Tietze)**.** *Nechť $F \subseteq X$ je uzavřená podmnožina normálního prostoru X. Potom libovolné $g\colon F \to [0,1]$ lze rozšířit na $f\colon X \to [0,1]$.*

Důkaz. O něco symetričtější je případ funkce s hodnotami v intervalu $[-1,1]$. Definujme postupné aproximace rozšíření f, přičemž bude $f = \lim_n f_n$. Uvažme uzavřené množiny $F = g^{-1}[-1,-1/3]$ a $G = g^{-1}[1/3,1]$ a zvolme libovolnou funkci $f_1 : X \to [-1/3, 1/3]$ tak, aby $f_1|_F = -1/3$ a $f_1|_G = 1/3$. Potom $|g(x) - f_1(x)| \leq 2/3$. V dalším kroku se podobně snažíme aproximovat funkci

$$g - f_1\colon F \to [-2/3, 2/3]$$

a opět se nám podaří najít $f_2\colon X \to [-2/3^2, 2/3^2]$ tak, že $|(g(x) - f_1(x)) - f_2(x)| \leq 2^2/3^2$... Obecně pak $f_n\colon X \to [-2^{n-1}/3^n, 2^{n-1}/3^n]$ a $|g(x) - f_1(x) - \ldots - f_n(x)| \leq 2^n/3^n$. Protože je posloupnost částečných součtů $f_1 + \cdots + f_n$ stejnoměrně konvergentní, je součet $f_1 + f_2 + \cdots$ spojitá funkce a podle odhadů se na F shoduje s g. $\square$

** Podobně lze rozšiřovat zobrazení do $\mathbb{R}$. To jednoduše plyne z předchozích dvou vět a homeomorfismu $\mathbb{R} \cong (-1,1)$, díky němuž stačí rozšířit $g\colon A \to (-1,1)$ na X. Nechť $f\colon X \to [-1,1]$ je rozšíření z Tietzeho věty. Potom $f^{-1}(\{-1,1\})$ je uzavřená množina disjunktní s A a lze tedy najít funkci $\lambda\colon X \to [0,1]$ takovou, že $\lambda = 0$ na $f^{-1}(\{-1,1\})$ a $\lambda = 1$ na A. Hledané rozšíření je pak $\lambda \cdot f$.

10. Homotopie, fundamentální grupa, nakrytí

Definice 10.1. Nechť X, Y jsou topologické prostory, $f_0, f_1 : X \to Y$ spojitá zobrazení. Řekneme, že f_0, f_1 jsou *homotopická*, jestliže existuje spojité zorazení $h : [0,1] \times X \to Y$ takové, že $h(0,x) = f_0(x)$, $h(1,x) = f_1(x)$. Značíme $f_0 \sim f_1$, případně $h \colon f_0 \sim f_1$. Zobrazení h se nazývá *homotopie* mezi f_0 a f_1.

cv **Příklad 10.2.** Každá dvě zobrazení $f_0, f_1 : X \to \mathbb{R}^n$ jsou homotopická. To samé platí pro libovolnou konvexní podmnožinu $\mathbb{R}^n$.

Příklad 10.3 (důkaz později)**.** Vložení $S^1 \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ není homotopické s žádným konstantním zobrazením. V dalším víceméně ukážeme, že homotopické třídy zobrazení $S^1 \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ jsou v bijekci s $\mathbb{Z}$, přičemž číslo odpovídající zobrazení f je tzv. navíjecí číslo f, tj. počet oběhů f okolo počátku.

Věta 10.4. *Homotopie je relace ekvivalence na množině spojitých zobrazení.*

Důkaz. Pro reflexivitu $f \sim f$ stačí vzít homotopii $(t,x) \mapsto f(x)$ („konstantní homotopie“). Pro symetrii $h : f_0 \sim f_1 \Rightarrow \overline{h} : f_1 \sim f_0$ stačí vzít $\overline{h}(t,x) = h(1-t,x)$. Je-li $h : f_0 \sim f_1$ a $k \colon f_1 \sim f_2$, pak

$$(h * k)(t,x) = \begin{cases} h(2t,x), & t \leq \frac{1}{2} \\ k(2t-1,x), & \frac{1}{2} \leq t \end{cases}$$

je homotopie $f_0 \sim f_2$. Její spojitost plyne z toho, že $[0, \frac{1}{2}] \times X$ a $[\frac{1}{2}, 1] \times X$ tvoří konečné uzavřené pokrytí $I \times X$. □

Věta 10.5. *Jsou-li $f_0 \sim f_1 \colon X \to Y$ a $g_0 \sim g_1 \colon Y \to Z$, potom také $g_0 f_0 \sim g_1 f_1 \colon X \to Z$.*

Důkaz. Nechť h je homotopie $f_0 \sim f_1$ a k homotopie $g_0 \sim g_1$. Potom $k(t, h(t,x))$ je homotopie mezi $k(0, h(0,x)) = g_0 f_0(x)$ a $k(1, h(1,x)) = g_1 f_1(x)$. □

konec 7. přednášky

Definice 10.6. Prostory X, Y se nazývají *homotopicky ekvivalentní*, jestliže existují spojitá zobrazení $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to X$ taková, že $gf \sim \mathrm{id}_X$, $fg \sim \mathrm{id}_Y$. Značíme $X \simeq Y$. Zobrazení f a g se nazývají *homotopické ekvivalence.*

cv **Příklad 10.7.** Platí $\mathbb{R}^n \simeq \{*\}$, tj. $\mathbb{R}^n$ je stažitelný; $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \simeq S^{n-1}$.

Fundamentální grupa (Poincaré). Nechť $x_0, x_1, x_2 \in X$ jsou pevně zvolené body. Tak jako v důkazu tranzitivity definujme pro cestu γ z x_0 do x_1 a cestu δ z x_1 do x_2 jejich *navázání*

$$\beta * \gamma(t) = \begin{cases} \beta(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Tato operace je „skoro asociativní“, konkrétně asociativní až na homotopii. Definujeme *homotopii cest* mezi γ_0 a γ_1 jako homotopii $h \colon [0,1] \times [0,1] \to X$ splňující

$$h(0,x) = \gamma_0(x), \quad h(1,x) = \gamma_1(x), \quad h(t,0) = x_0, \quad h(t,1) = x_1.$$

(Jinými slovy všechny cesty mezi γ_0 a γ_1 začínají a končí v týchž bodech x_0, x_1.)

Speciálním případem cest jsou smyčky v x_0, tj. cesty z x_0 do x_0. V takovém případě se homotopie cest nazývá *homotopií smyček*. Definujeme

$$\pi_1(X, x_0) = \{\text{smyčky v } x_0\}/\text{homotopie smyček}.$$

Na $\pi_1(X, x_0)$ definujeme operaci $[\beta] \cdot [\gamma] = [\beta * \gamma]$.

nd *Poznámka.* Ekvivalentně lze smyčky chápat jako spojitá zobrazení $S^1 \cong I/\{0,1\} \to X$, která posílají $1 \mapsto x_0$. Homotopie smyček pak odpovídají homotopiím zobrazení $S^1 \to X$, které celou dobu posílají $1 \mapsto x_0$. Mluvíme o zobrazeních a homotopiích prostorů s vybraným bodem $(S^1, 1) \to (X, x_0)$.

Věta 10.8. *Výše uvedená operace je dobře definovaná a zadává na $\pi_1(X, x_0)$ strukturu grupy.*

Důkaz. Je-li h homotopie smyček $\beta_0 \sim \beta_1$ a k homotopie smyček $\gamma_0 \sim \gamma_1$, pak

$$(h * k)(t, s) = \begin{cases} h(2t, s), & t \leq \frac{1}{2} \\ k(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \leq t \end{cases}$$

je homotopie smyček $\beta_0 * \gamma_0 \sim \beta_1 * \gamma_1$.

Asociativita: definujme $\alpha * \beta * \gamma$, smyčku, která projde všechny tři smyčky α, β, γ třikrát rychleji. Obě $\alpha * (\beta * \gamma)$, $(\alpha * \beta) * \gamma$ jsou nějaké reparametrizace, konkrétně

$$\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta * \gamma) \circ \varphi_r, \quad (\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha * \beta * \gamma) \circ \varphi_l,$$

kde $\varphi_r, \varphi_l \colon I \to I$ jsou konkrétní spojitá zobrazení, viz obrázek. Protože je I konvexní, máme $\varphi_r \sim \varphi_l$ a proto také $\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma$.

dú 14 Proč je to homotopie smyček?

Jednotka je konstantní cesta $\varepsilon(t) = x_0$, opět $\varepsilon * \gamma$ a $\gamma * \varepsilon$ jsou „reparametrizace" smyčky γ. Inverze je dána smyčkou $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$.

dú 15 Ukažte, že se jedná vskutku o inverzi. □

Příklad 10.9. Platí $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{e\}$.

cv **Příklad 10.10.** Pokud lze $x_0, x_1 \in X$ spojit cestou, pak $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$. Tento isomorfismus závisí na volbě cesty – identifikujte jej pro smyčku (tj. pro $x_0 = x_1$).

cv **Příklad 10.11.** Dokažte $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Definice 10.12. *Disjunktní sjednocení* topologických prostorů X, Y je množina

$$X \sqcup Y = (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$$

společně s topologií

$$\{W \subseteq X \sqcup Y \mid X \cap W \subseteq X \text{ otevřená}, Y \cap W \subseteq Y \text{ otevřená}\}$$

Poznámka. Alternativně je topologie dána $\{U \sqcup V \mid U \subseteq X \text{ otevřená}, V \subseteq Y \text{ otevřená}\}$.

? *Otázka.* Používat jiné značení pro disjunktní sjednocení, například $X + Y$?

Označíme-li inkluze $i\colon X \to X \sqcup Y$, $j\colon Y \to X \sqcup Y$, má disjunktní sjednocení následující univerzální vlastnost

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "fi"] & & \\
& X \sqcup Y \arrow[r, dashed, "f"] & Z \\
Y \arrow[ur, "j"'] \arrow[urr, bend right, "fj"'] & &
\end{tikzcd}$$

tj. zobrazení $f\colon X \sqcup Y \to Z$ je spojité, právě když obě zúžení $fi\colon X \to Z$, $fj\colon Y \to Z$ jsou spojitá. To je proto, že $X \cap U = i^{-1}(U)$, $Y \cap U = j^{-1}(U)$. Zobrazení f značíme též $f = [g, h]$, kde $g = fi$, $h = fj$ jsou jeho zúžení na podprostory X, Y.

cv **Příklad 10.13.** Dokažte, že topologický prostor je nesouvislý, právě když je homeomorfní disjunktnímu sjednocení dvou neprázdných prostorů. Je-li $Z = X \sqcup Y$ jako množina, pak Z má topologii disjunktního sjednocení, právě když X, Y jsou obojetné.

Poznámka. Pokud mají X, Y metriku, dodefinujme ji na metriku na $X \sqcup Y$ pomocí $\operatorname{dist}(x, y) = 1$. To zadává na $X \sqcup Y$ topologii disjunktního sjednocení.

Definice 10.14. Nechť X_i, $i \in \mathcal{I}$, jsou topologické prostory. Definujeme disjunktní sjednocení jako $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} X_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{i\} \times X_i$ spolu s topologií

$$\{U \subseteq \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} X_i \mid \forall i \in \mathcal{I} : X_i \cap U \subseteq X_i \text{ otevřená}\}$$

Topologický prostor $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ má opět univerzální vlastnost a opět je každé X_i otevřený a uzavřený podprostor.

Definice 10.15. Spojité zobrazení $p\colon Y \to X$ se nazývá *nakrytí*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje otevřené okolí $U \ni x$ a homeomorfismus $\varphi\colon \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} U \xrightarrow{\cong} p^{-1}(U)$ takový, že komutuje

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "{[\mathrm{id}]}"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

kde $[\mathrm{id}]\colon \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} U \to U$ je zobrazení, které je na každém sčítanci identita, tedy $p\varphi(i, x) = x$.

cv **Příklad 10.16.** Dokažte, že $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ je nakrytí.

Věta 10.17 (zvedání cest)**.** *Nechť $p : Y \to X$ je nakrytí a $\gamma : I \to X$ cesta. Pro každé $y_0 \in p^{-1}(\gamma(0))$ existuje jediná cesta $\widetilde{\gamma} : I \to Y$ taková, že $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$, $p\widetilde{\gamma} = \gamma$. Říkáme jí* zvednutí *cesty γ začínající v y_0.*

Důkaz. Z definice nakrytí je X pokryto otevřenými množinami U takovými, že $p^{-1}(U) \cong \bigsqcup U$; toto pokrytí označme $\mathcal{U}$. Dále uvažme $\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \{\gamma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$, otevřené pokrytí I. Podle Lebesgueova lemmatu existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že každý interval $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ leží v nějakém $\gamma^{-1}(U) \in \gamma^{-1}(\mathcal{U})$, tj. $\gamma[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \subseteq U$. Definujme $\widetilde{\gamma}$ postupně na intervalech $[\frac{0}{n}, \frac{1}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}]$. Nechť při homeomorfismu $\varphi : \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} U \cong p^{-1}(U)$ je $\varphi^{-1}(y_0) \in \{i\} \times U$. Protože $\widetilde{\gamma}[\frac{0}{n}, \frac{1}{n}]$ je souvislý a musí obsahovat y_0, musí ležet v $\varphi(\{i\} \times U)$.

dú 16 dokázat poslední tvrzení

Protože je $p\colon \varphi(\{i\} \times U) \xrightarrow{\cong} U$ homeomorfismus, jsme nuceni položit

$$\widetilde{\gamma}(t) = (p|_{\varphi(\{i\}\times U)})^{-1}\gamma(t).$$

Tím je určeno zúžení $\widetilde{\gamma}$ na $[\frac{0}{n}, \frac{1}{n}]$ a zejména $\widetilde{\gamma}(\frac{1}{n})$, počáteční bod zvednutí $\gamma|_{[\frac{1}{n},1]}$. $\square$

Věta 10.18 (zvedání homotopií). *Nechť $p\colon Y \to X$ je nakrytí, $h\colon I \times P \to X$ homotopie a $\widetilde{h}_0\colon P \to Y$ (částečné zveduntí) takové, že $p(\widetilde{h}_0(z)) = h(0, z)$. Potom existuje jediná homotopie $\widetilde{h}\colon I \times P \to Y$ taková, že $\widetilde{h}(0, z) = \widetilde{h}_0(z)$, $p\widetilde{h}(t, z) = h(t, z)$. Říkáme jí* zvednutí *homotopie h začínající v $\widetilde{h}_0$.*

konec 8. přednášky

** *Důkaz.* Podle přechozí věty pro každé $z \in P$ existuje jediné spojité zvednutí $h(-, z)$ začínající v $\widetilde{h}_0(z)$, označme jej $\widetilde{h}(-, z)$. Tím je dokázána jednoznačnost $\widetilde{h}$, zbývá ukázat jeho spojitost.

Nechť $z_0 \in P$ je pevné a zvolme $U_1, \dots, U_n \subseteq X$ otevřené tak, že $h(-, z_0)[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \subseteq U_k$. Nechť $\varphi_k\colon p^{-1}(U_k) \cong \bigsqcup U_k$ je lokální trivializace a i_k takový index, že

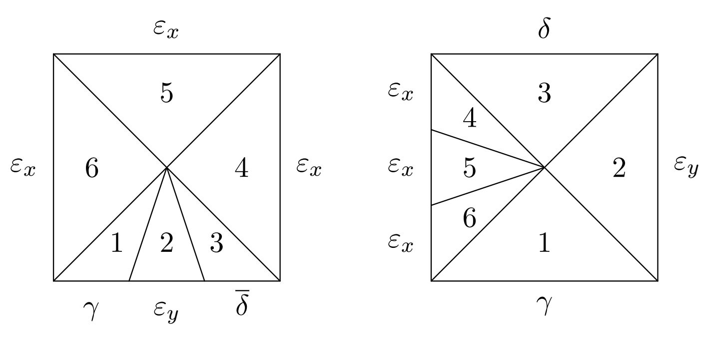
$$\varphi_k\widetilde{h}(-, z_0)[\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}] \subseteq \{i_k\} \times U_k.$$

Jednoduše se ukáže, že na nějakém okolí $N \ni z_0$ platí tytéž vztahy (použitím tube lemma). To ale znamená, že pro $t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ a $z \in N$ platí $\varphi_k\widetilde{h}(t, z) = (i_k, h(t, z))$. Protože je φ_k homeomorfismus, je $\widetilde{h}|_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\times N}$ spojitá. Díky tomu, že jsou intervaly uzavřené a je jich konečně mnoho, je i $\widetilde{h}|_{I\times N}$ spojitá a tedy i $\widetilde{h}$. $\square$

Definice 10.19. Topologický prostor X se nazývá *jednoduše souvislý* (1-souvislý), jestliže je cestově souvislý a $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$ pro každé/nějaké $x_0 \in X$.

Lemma 10.20. *Je-li X jednoduše souvislý a $x, y \in X$, potom existuje cesta z x do y, jediná až na homotopii cest.*

Důkaz. Nechť γ, δ jsou dvě cesty z x do y. Potom $\gamma * \varepsilon_y * \overline{\delta}$ je smyčka v x. Díky jednoduché souvislosti je homotopická triviální smyčce. Tato homotopie lze „přeskládat“ na homotopii mezi γ a δ, viz



$\square$

Věta 10.21. *Nechť $p\colon Y \to X$ je nakrytí, kde Y je jednoduše souvislý. Potom existuje bijekce mezi $\pi_1(X, x_0)$ a $p^{-1}(x_0)$.*

Důkaz. Zafixujme $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Definujme zobrazení

$$p^{-1}(x_0) \to \pi_1(X, x_0), \quad y \mapsto [p\gamma_y],$$

kde γ_y je libovolná cesta z y_0 do y. Podle definice je jednoznačná až na homotopii cest a tedy $p\gamma_y$ je jednoznačná až na homotopii smyček ($p(y_0) = x_0 = p(y)$).

Inverzní zobrazení je

$$\pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0), \quad [\gamma] \mapsto \widetilde{\gamma}(1),$$

kde $\widetilde{\gamma}$ je zvednutí γ začínající v y_0. Nechť $[\gamma] = [\delta]$, tj. $\gamma \sim \delta$ jako smyčky, a nechť h je nějaká taková homotopie smyček. Podle věty o zvedání homotopií existuje jediné zvednutí $\widetilde{h}$ začínající v $\widetilde{h}(0, s) = y_0$, musí tedy být $\widetilde{h}(t, 0) = \widetilde{\gamma}(t)$, $\widetilde{h}(t, 1) = \widetilde{\delta}(t)$ a proto $\widetilde{h}(1, s)$ je cesta z $\widetilde{\gamma}(1)$ do $\widetilde{\delta}(1)$ ležící v $p^{-1}(x_0)$. Protože je však $p^{-1}(x_0)$ diskrétní (z lokální trivializace nakrytí), musí být tato cesta konstantní a $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\delta}(1)$; proto je zobrazení dobře definované.

Zbývá ověřit, že výše uvedená zobrazení jsou vzájemně inverzní. To je ale jasné vhodnou volbou dat, pomocí kterých se definují. □

Definice 10.22. Nechť $p\colon Y \to X$ je libovolné spojité zobrazení, $y_0 \in Y$ libovolný bod a $x_0 = p(y_0) \in X$ jeho obraz. Definujeme *indukované zobrazení*

$$p_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0), \quad [\gamma] \mapsto [p\gamma].$$

Protože $p(\gamma * \delta) = (p\gamma) * (p\delta)$, jedná se o homomorfismus grup.

dú 17 **Příklad 10.23.** Dokažte, že pro nakrytí $p\colon Y \to X$ je indukované zobrazení p_* injektivní.

** **Věta 10.24.** *Nechť $p\colon Y \to X$ je nakrytí, Y cestově souvislý. Potom existuje bijekce mezi $p_*\pi_1(Y, y_0)\backslash\pi_1(X, x_0)$ a $p^{-1}(x_0)$ (připomeňme, že kvocient $H\backslash G$ je množina tříd Hg, $g \in G$).*

cv **Příklad 10.25.** Spočtěte fundamentální grupu kružnice $\pi_1(S^1, 1)$ a popište reprezentanty všech homotopických tříd. (Podle předchozí věty je v bijekci se $\mathbb{Z}$; dokažte, že je to ve skutečnosti isomorfismus grup. Reprezentanti jsou dáni zobrazeními $z \mapsto z^n$.)

** **Příklad 10.26.** Fundamentální grupa $S^1 \vee S^1$, jeho nekonečné nakrytí a nekonečně generovaná volná podgrupa volné grupy na dvou generátorech.

Nechť $f\colon X \to X$ je zobrazení X do sebe. Řekneme, že $x \in X$ je *pevný bod* f, jestliže $f(x) = x$.

Věta 10.27 (Brouwerova věta v dimenzi 2)**.** *Každé spojité zobrazení $f\colon D^2 \to D^2$ má pevný bod.*

Důkaz. Důkaz zredukujeme na následující tvrzení: neexistuje retrakce D^2 na S^1, tj. spojité zobrazení $r\colon D^2 \to S^1$ takové, že $r|_{S^1} = \mathrm{id}$. Kdyby r existovalo, dostali bychom

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, hook] & D^2 \arrow[r] & S^1 \\
\pi_1(S^1,1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(D^2,1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1(S^1,1) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} & \{e\} & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

přičemž podle definice retrakce je složení rovno id, a tedy $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ by se faktorizovala přes $\{e\}$, což nelze.

Zbývá ukázat, jak z neexistence retrakce plyne Brouwerova věta – opět sporem. Kdyby existovalo spojité zobrazení $f\colon D^2 \to D^2$ bez pevného bodu, vyrobíme z něj retrakci r tak, že $r(x)$ bude průsečík S^1 s (otevřenou) polopřímkou vedenou z $f(x)$ bodem x. Jednoduše lze pro r odvodit formulku, která dokazuje, že je to spojité zobrazení. □

Věta 10.28 (Základní věta algebry)**.** *Každý nekonstantní polynom nad $\mathbb{C}$ má kořen.*

Důkaz. Základní myšlenkou důkazu je, že lze spočítat počet kořenů (počítaných podle své násobnosti) uvnitř daného kruhu. Ukážeme si to prvně na triviálním příkladu polynomu $f_n(z) = z^n$. Zabývejme se smyčkou $\gamma(t) = Re^{2\pi it}$, která ohraničuje kruh o poloměru R. Složení $f_n\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ je dáno předpisem $f_n(\gamma(t)) = Re^{2\pi int}$ a oběhne počátek právě n-krát; proto v grupě $\pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}, 1) \cong \mathbb{Z}$ reprezentuje prvek n. Hlavní ideou důkazu pak bude, že to samé platí pro libovolný polynom g stupně n – pokud všechny jeho kořeny leží uvnitř kruhu o poloměru R, pak $g\gamma$ je smyčka reprezentující prvek n.

Nechť $g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$. Prvně omezíme možné kořeny tohoto polynomu. Nechť $R > |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$, $R \geq 1$. Potom pro $|z| = R$ platí

$$\begin{aligned} |g(z)| &\geq |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0| \\ &\geq R^n - \big(|a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_1|R + |a_0|\big) \\ &\geq R^{n-1}\big(R - (|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)\big) > 0 \end{aligned}$$

a tedy g má všechny své kořeny uvnitř kruhu o poloměru R.

Ze stejného důvodu má pro $t \in I$ polynom $z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0)$ kořeny pouze uvnitř kruhu o poloměru R. Uvážíme opět smyčku $\gamma(t) = Re^{2\pi it}$. Pak výše uvedená homotopie polynomů určuje homotopii $g\gamma \sim f_n\gamma$ smyček v $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. Spočítali jsme, že druhá smyčka reprezentuje prvek $n \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}, 1)$ a to samé tedy platí pro $g\gamma$.

Předpokládejme nyní, že g nemá žádné kořeny. Pak libovolná homotopie $h : \gamma \sim \varepsilon$ s konstantním smyčkou zadává homotopii smyček $g\gamma \sim \varepsilon$ v $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. To je ale možné pouze pro $n = 0$. □

Poznámka. V důkazu jsme „počítali“ pouze kořeny uvnitř dostatečně velkého kruhu. Stejně lze počítat kořeny g uvnitř libovolné oblasti omezené křivkou $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ jakožto homotopickou třídu smyčky $g\gamma$ v $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$. Z tohoto principu plyne i „spojitá závislost“ kořenů na polynomu. Je-li z_0 kořen polynomu g a g' je polynom blízký g, potom g' má kořen blízký z_0.

——— konec 9. přednášky ———

cv **Příklad 10.29.** Dokažte, že $\pi_1(S^n) = \{e\}$ pro každé $n > 1$. (Nápověda: každou cestu rozsekejte na navázání cest, které leží v doplňku severního/jižního pólu a každou pozměňte homotopií na cestu s „malým obrazem“.)

cv **Příklad 10.30.** Uvažujme na $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ topologii kvocientu $S^n/{\sim}$, $x \sim -x$. Dokažte, že zobrazení $S^n \to \mathcal{P}_n$, $x \mapsto [x]$, je nakrytí a spočtěte $\pi_1(P_n)$, $n > 1$. (Nápověda: leží-li otevřená množina U uvnitř jedné hemisféry, pak pro kanonickou projekci $p\colon S^n \to \mathcal{P}_n$ platí, že $p\colon U \xrightarrow{\cong} p(U)$; důvodem je, že p je otevřené.)

dú 18 **Příklad 10.31.** Předchozí zobecnit na „properly discontinuous“ akce (viz Bredon, ale název nesedí s klasickou definicí), tj. akce splňující: pro každý bod $x \in X$ existuje okolí $U \ni x$ takové, že $gU \cap U = \emptyset$ pro $g \neq e$. V takovém případě je projekce $X \to G\backslash X$ nakrytí a pokud je X jednoduše souvislé, pak $\pi_1(G\backslash X) \cong G$.

dú 19 **Příklad 10.32.** Popište fundamentální grupu Kleinovy láhve jakožto $G\backslash\mathbb{R}^2$.

$**$ **Příklad 10.33.** Dokažte, že pro cestově souvislý prostor X platí $[S^1, X] \cong \pi_1(X)/\mathrm{conj}$.

11. Simpliciální komplexy, Brouwerova věta, invariance dimenze

V dalším dokážeme Brouwerovu větu v obecné dimenzi.

Věta 11.1 (Brouwerova věta)**.** *Každé spojité zobrazení $D^n \to D^n$ má pevný bod.*

Prvně si rozmysleme, co říká v dimenzi 1. Máme $D^1 = [-1, 1]$ a tedy tvrdíme, že každé zobrazení $f\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ má pevný bod. To ale plyne z toho, že $f(-1) \geq -1$, $f(1) \leq 1$ a tedy někde v intervalu $[-1, 1]$ musí být $f(x) = x$.

Brouwerovu větu budeme dokazovat kombinatoricky. Proto prvně potřebujeme nahradit disk D^n nějakým kombinatorickým objektem. K tomu nám poslouží následující věta, ve které $\partial X = \overline{X} \smallsetminus \mathring{X}$ je hranice X.

Věta 11.2. *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní konvexní podmnožina s neprázdným vnitřkem. Potom existuje homeomorfismus $h\colon D^n \to X$ takový, že $h(S^{n-1}) = \partial X$.*

Důkaz. Nejprve můžeme případným posunutím X, které je homeomorfismus, dosáhnout toho, že počátek 0 je vnitřním bodem X.

Definujme zobrazení $d\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ jako

$$d(v) = \max\{t \in \mathbb{R}_+ \mid tv \in X\}.$$

Protože je 0 vnitřním bodem, je výše uvedená množina neprázdná a díky kompaktnosti také ohraničená a uzavřená; proto maximální prvek existuje.

Důležitým krokem bude ukázat spojitost zobrazení d. Potom definujeme

$$h'\colon I \times S^{n-1} \to X, \quad h'(t, v) = td(v)v;$$

to zřejmě posílá $\{0\} \times S^{n-1}$ na 0 a indukuje tak zobrazení

$$h\colon D^n \cong (I \times S^{n-1})/(\{0\} \times S^{n-1}) \to X,$$

které je spojité a podle definice také bijekce mezi kompaktními Hausdorffovými prostory. To je onen hledaný homeomorfismus.

Ukážeme prvně, že pro $t \in \mathbb{R}_+$ a $v \in S^{n-1}$ platí $tv \in \mathring{X}$, právě když $t < d(v)$. To přesně odpovídá podmínce $h(S^{n-1}) = \partial X$. Zjevně pro vnitřní bod tv je $t < d(v)$. Naopak stejnolehlost se středem v $d(v)v$ převádějící 0 na tv posílá nějakou kouli $B_\varepsilon(0) \subseteq X$ na nějakou kouli $B_{\varepsilon'}(tv) \subseteq X$ a proto je tv vnitřní.

Nyní dokážeme spojitost zobrazení d. Nechť $v_n \to v$ je konvergentní posloupnost. Protože je $d(S^{n-1})$ omezená, stačí dokázat, že každá konvergentní podposloupnost $d(v_n)$ konverguje k $d(v)$. Předpokládejme pro jednoduchost, že sama $d(v_n)$ konverguje k nějakému t. Protože

$$d(v_n)v_n \to tv$$

a posloupnost vlevo leží v X, musí také $tv \in X$ a proto $t \leq d(v)$. Předpokládejme nyní, že $t < d(v)$. Potom tv je vnitřní bod X a proto také $d(v_n)v_n$ je vnitřní bod pro $n \gg 0$. Podle předchozího odstavce se ale jedná o hraniční body, spor. $\square$

Nyní popíšeme náš kombinatorický model disku D^n.

Řekneme, že body $A_0, \dots, A_k \in \mathbb{R}^n$ jsou *afinně nezávislé*, jestliže $A_1 - A_0, \dots, A_k - A_0$ jsou lineárně nezávislé vektory. *Simplexem* dimenze k (také k-simplex) nazveme konvexní obal

$$s = [A_0, \dots, A_k] = \{\xi_0 A_0 + \cdots \xi_k A_k \mid \xi_i \geq 0,\, \xi_0 + \cdots + \xi_k = 1\},$$

afinně nezávislých bodů $A_0, \dots, A_k$.

Příklad 11.3. Standardní simplex Δ^k dimenze k je definovaný jako konvexní obal $\Delta^k = [e_0, \dots, e_k]$ vektorů standardní báze $\mathbb{R}^{n+1}$. Je-li $s = [A_0, \dots, A_k]$ libovolný jiný k-rozměrný simplex, pak existuje jediné afinní zobrazení $\Delta^k \to s$ posílající e_i na A_i a jedná se o homeomorfismus. Libovolné dva simplexy dimenze k jsou tedy homeomorfní.

Podle předchozí věty je libovolný simplex dimenze n homeomorfní D^n – protože jsou každé dva simplexy dimenze n homeomorfní, plyne to z případu konvexního obalu n-tice afinně nezávislých bodů v $\mathbb{R}^n$ (ten má neprázdný vnitřek).

Stěna simplexu s je $[A_{i_0}, \dots, A_{i_\ell}]$, kde $0 \leq i_0, \dots, i_\ell \leq k$ (a můžeme předpokládat, že jsou tyto indexy navzájem různé a uspořádané). Kombinatorický *vnitřek* s je

$$\operatorname{int}_c s = \{\xi_0 A_0 + \cdots \xi_k A_k \mid \xi_i > 0,\, \xi_0 + \cdots + \xi_k = 1\}$$

a kombinatorická *hranice* pak $\partial_c s = s \smallsetminus \operatorname{int}_c s$.

Simpliciální komplex K v $\mathbb{R}^n$ je konečná množina simplexů taková, že

- každá stěna simplexu z K leží v K,
- jsou-li s, t dva simplexy z K, pak $s \cap t$ je jejich společná stěna.

Tělesem komplexu K je množina $|K| = \bigcup K = \bigcup_{s \in K} s$. Podmnožina $P \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *polyedrem*, jestliže existuje simpliciální komplex K takový, že $P = |K|$. Simpliciální komplex K se pak nazývá *triangulací* polyedru P.

Příklad 11.4. Čtverec má triangulaci sestávající se ze dvou trojúhelníků. Složitější je krychle – ta má triangulaci sestávající se z šesti čtyřstěnů.

Podrozdělení L komplexu K je simpliciální komplex takový, že $|L| = |K|$ a každý simplex $s \in L$ leží v nějakém simplexu $t \in K$, tj. $s \subseteq t$. *Barycentrické podrozdělení* $\operatorname{sd} K$ je definováno následovně: $\operatorname{sd}[A_0, \dots, A_k]$ je dáno všemi stěnami k-simplexů

$$[A_{i_0}, \tfrac{1}{2}(A_{i_0} + A_{i_1}), \dots, \tfrac{1}{k+1}(A_{i_0} + \cdots + A_{i_k})],$$

kde $i_0, \dots, i_k$ je libovolná permutace $0, \dots, k$; barycentrické podrozdělění $\operatorname{sd} K$ je sjednocením všech $\operatorname{sd} s$, $s \in K$.

Jemnost triangulace K je $\mu(K) = \max\{\operatorname{diam} s \mid s \in K\} = \max\{\operatorname{dist}(A, B) \mid [A, B] \in K\}$, tj. největší průměr simplexu K nebo, ekvivalentně, největší vzdálenost bodů spojených hranou.

Lemma 11.5. *$\mu(\operatorname{sd} K) \leq \frac{\dim K}{\dim K + 1} \mu(K)$.*

Důkaz. V důkazu několikrát využijeme následující pozorování: největší vzdálenost bodu od bodu simplexu se vždy realizuje v nějakém vrcholu tohoto simplexu.[2]

[2] Největší vzdálenost bodu X od s je stejná jako největší vzdálenost X' od s, kde X' je projekce X do lineárního podprostoru L generovaného s. Podle důkazu předchozí věty (s má neprázdný vnitřek uvnitř L) je tato maximální pro body z hranice. Dále se použije indukce.

Tvrzení zřejmě stačí dokázat pro simplex $s = [A_0, \dots, A_k]$. Nechť t je simplex jeho barycentrického podrozdělení. Průměr t je maximální délka hrany mezi jeho vrcholy. Pokud tato hrana neobsahuje $\frac{1}{k+1}(A_0 + \cdots + A_k)$, jedná se o simplex barycentrického podrozdělení nějaké stěny s a můžeme použít indukci vzhledem k dimenzi k.

Maximální vzdálenost $\frac{1}{k+1}(A_0 + \cdots + A_k)$ od vrcholů barycentrického podrozdělení nastane pro některý vrchol A_i a tedy

$$\mu(\operatorname{sd} s) \leq \max\{\operatorname{dist}(A_i, \tfrac{1}{k+1}(A_0 + \cdots + A_k)) \mid i = 0, \dots, k\},$$

přičemž $\operatorname{dist}(A_i, \frac{1}{k+1}(A_0 + \cdots + A_k)) = \frac{k}{k+1} \operatorname{dist}(A_i, \frac{1}{k}(A_1 + \cdots \widehat{A_i} \cdots + A_k))$ a toto je omezeno $\frac{k}{k+1}$-násobky vzdáleností A_i od některého z vrcholů A_j, $j \neq i$. $\square$

Věta 11.6 (Spernerovo lemma)**.** *Nechť T je triangulace simplexu $[A_0, \dots, A_n]$ a nechť φ je zobrazení množiny vrcholů T do množiny $\{0, \dots, n\}$ takové, že pro $B \in [A_{i_0}, \dots, A_{i_k}]$ je $\varphi(B) \in \{i_0, \dots, i_k\}$. Potom počet simplexů $[B_0, \dots, B_n] \in T$ takových, že $\varphi\{B_0, \dots, B_n\} = \{0, \dots, n\}$ je lichý.*

konec 10. přednášky

Důkaz. Indukcí vzhledem k n. Označme

- S_0 množinu n-simplexů, jejichž vrcholy jsou označeny právě všemi $0, \dots, n-1$, $p_0 = \#S_0$;
- S_1 množinu n-simplexů, jejichž vrcholy jsou označeny právě všemi $0, \dots, n$, $p_1 = \#S_1$;
- R množinu $(n-1)$-simplexů, jejichž vrcholy jsou označeny právě všemi $0, \dots, n-1$, $x = \#R$.

Počítejme dvěma způsoby počet dvojic (s, r), kde s je n-simplex a r jeho stěna dimenze $n-1$ s vlastností $r \in R$.

Prvně se zabývejme tím, kolika způsoby lze vybrat s. Ten zjevně leží buď v S_0 nebo v S_1. V prvním případě lze stěnu r vyrbat právě dvěma způsoby, v druhém právě jedním způsobem. Proto je počet dvojic (s, r) roven $2p_0 + p_1$.

Nyní rozdělme tentýž počet podle možností na výběr simplexu r. Ten lze vybrat právě x způsoby, přičemž každý takový simplex leží právě ve dvou[3] n-simplexech s s výjimkou těch r, které leží na hranici simplexu $[A_0, \dots, A_n]$. Díky podmínce na označení vrcholů ve stěnách pak r leží ve stěně $[A_0, \dots, A_{n-1}]$ a podle indukčního předpokladu je počet y takových simplexů lichý. Počet dvojic je tedy roven

$$2p_0 + p_1 = 2x - y$$

a tedy $p_1 = 2(x - p_0) - y$ je liché. $\square$

Důkaz Brouwerovy věty. Podle dříve provedené redukce stačí ukázat neexistenci retrakce D^n na S^{n-1}. Díky $\Delta^n \cong D^n$, převádějící $\partial_c \Delta^n$ na S^{n-1}, pak stačí ukázat neexistenci retrakce $r \colon \Delta^n \to \partial_c \Delta^n$. Z případné retrakce zkonstruujeme označení vrcholů $\operatorname{sd}^N \Delta^n$, $N \gg 0$, které

[3] Formálně to plyne z toho, že každý n-simplex s mající r za stěnu leží právě v jednom z poloprostorů určených r. Pokud tedy existuje takový s jediný, nemůže r ležet uvnitř $[A_0, \dots, A_n]$. V případě, že dva takové n-simplexy s, s' leží v témž poloprostoru, tak se protínají v nějakém vnitřním bodě; tato možnost tedy nemůže v simpliciálním komplexu nastat.

bude v rozporu se Spernerovým lemmatem. Označení $\varphi(B)$ vrcholu $B \in \operatorname{sd}^N \Delta^n$ je dáno indexem i libovolného takového e_i, pro nějž ve vyjádření

$$r(B) = \xi_0 e_0 + \cdots + \xi_n e_n$$

je ξ_i největší ze všech (těch může být víc – v takovém případě vybereme libovolný z nich; vrchol e_i je nejblíž k bodu $r(B)$). Myšlenkou důkazu pak je, že při dostatečně jemné triangulaci budou obrazy simplexů malé a nebudou moct mít vrcholy označené všemi $0, \dots, n$.

Nyní definujeme otevřené pokrytí $U_0, \dots, U_n$ hranice $\partial_c \Delta^n$ předpisem

$$U_i = \{\xi_0 e_0 + \cdots \xi_n e_n \mid \xi_i < \tfrac{1}{n+1}\}$$

Protože jsou ξ_j nezáporná a jejich součet je 1, je jediným bodem Δ^n nepatřícím do $U_0 \cup \cdots \cup U_n$ barycentrum $\frac{1}{n+1}(e_0 + \cdots + e_n)$, které ovšem neleží na hranici. Zároveň je také zřejmé, že pro $r(B) \in U_i$ není e_i nejbližší vrchol k $r(B)$. Podle Lebesgueova lemmatu existuje $\varepsilon > 0$ takové, že každá podmnožina průměru ε leží v některé z $r^{-1}(U_0), \dots, r^{-1}(U_n)$. Zvolme $N \gg 0$ tak, aby $\mu(\operatorname{sd}^N \Delta^n) \leq \varepsilon$. Potom pro $s \in \operatorname{sd}^N \Delta^n$ bude platit $r(s) \subseteq U_i$ pro nějaké i a zejména všechny vrcholy s budou ohodnoceny čísly z množiny $\{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Ke sporu se Spernerovým lemmatem pak stačí ověřit hraniční podmínku. Nechť tedy $B \in \operatorname{sd}^N \Delta^n$ je vrchol ležící ve stěně $[e_{i_0}, \dots, e_{i_k}]$. Potom $r(B) = B = \xi_0 e_0 + \cdots + \xi_n e_n$ s koeficienty $\xi_j = 0$ pro všechna $j \notin \{i_0, \dots, i_k\}$; zejména $\varphi(B) \in \{i_0, \dots, i_k\}$. □

Věta 11.7 (o invarianci dimenze)**.** *Pokud $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ jsou homeomorfní, potom $n = m$.*

Začneme s jednoduchou redukcí. Pokud $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, budou homeomorfní i jednobodové kompaktifikace, $S^n \cong S^m$. V dalším ukážeme, že sféry různých dimenzí nejsou dokonce ani homotopicky ekvivalentní.

Řekneme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je *nepodstatné*, je-li homotopické konstantnímu zobrazení. V opačném případě řekneme, že je *podstatné*.

Věta 11.8. *Nechť Y je topologický prostor. Spojité zobrazení $f : S^n \to Y$ je nepodstatné, právě když lze spojitě rozšířit na D^{n+1}.*

cv *Důkaz.* Pokud lze f rozšířit na $g : D^{n+1} \to Y$, homotopie f s konstantním zobrazením je třeba $h(t, x) = g(tx)$; je totiž $h(0, x) = g(0) = \text{const}$ a $h(1, x) = g(x) = f(x)$.

Nechť naopak $h\colon I \times S^n \to Y$ je homotopie mezi konstantním zobrazením a f. Jelikož je $h(0, x)$ nezávislé na x, dostáváme z univerzální vlastnosti kvocientu spojité zobrazení

$$h'\colon D^{n+1} \cong (I \times S^n)/{\sim} \to Y,$$

kde $(0, x) \sim (0, x')$. To je hledané rozšíření. □

Věta 11.9. *Každý homeomorfismus $f\colon S^n \to Y$ je podstatný.*

Důkaz. To je přímý důsledek Brouwerovy věty a předchozí věty. Případné rozšíření $g\colon D^{n+1} \to Y$ by dávalo retrakci

$$D^{n+1} \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f^{-1}} S^n. \qquad \square$$

Zejména platí, že žádná sféra S^n není stažitelná, tj. homotopicky ekvivalentní jednobodovému prostoru. To je totiž ekvivalentní tomu, že identita je nepodstatná.

* **Příklad 11.10.** Dokažte, že každá homotopická ekvivalence $f\colon S^n \to Y$ je podstatná.

V dalším ukážeme, že každé zobrazení $f : S^n \to S^m$, $n < m$, je nepodstatné. Podle předchozího pak nemůže být homeomorfismus, což dokazuje větu o invarianci dimenze.

Definice 11.11. Nechť K, L jsou dva simpliciální komplexy. Řekneme, že zobrazení $f : |K| \to |L|$ je *simpliciální* vzhledem k triangulacím K, L, jestliže pro libovolný simplex $s = [A_0, \dots, A_k] \in K$ platí $[f(A_0), \dots, f(A_k)] \in L$ a na s je f afinní, tj. platí $f(\xi_0 A_0 + \cdots + \xi_k A_k) = \xi_0 f(A_0) + \cdots + \xi_k f(A_k)$.

Zdůrazněme, že vrcholy $f(A_0), \dots, f(A_k)$ nemusí být různé, dostáváme tak simpliciální zobrazení z trojúhelníku na úsečku. To příliš nekoresponduje s kombinatorickou definicí simpliciálního komplexu jako množiny simplexů různých dimenzí, které něco splňují – dalo by se předpokládat, že simpliciální zobrazení bude posílat k-simplexy na k-simplexy. Míra obecnosti definice je však potřeba – jinak by neexistovalo žádné simpliciální zobrazení netriviálního polyedru do bodu.[4]

Věta 11.12. *(o simpliciální aproximaci) Nechť K, L jsou dva simpliciální komplexy a nechť $f\colon |K| \to |L|$ je spojité zobrazení. Potom existuje podrozdělení K' triangulace K takové, že f je homotopické zobrazení $g\colon |K'| \to |L|$, které je simpliciální vzhledem k triangulacím K', L.*

Před vlastním důkazem věty o simpliciální aproximaci dokažme větu o invarianci dimenze.

Důkaz věty o invarianci dimenze. Jak již bylo řečeno, stačí ukázat, že každé zobrazení $f : S^n \to S^m$, $n < m$, je nepodstatné. Díky homeomorfismům $S^n \cong \partial\Delta^{n+1}$, $S^m \cong \partial\Delta^{m+1}$ pak stačí, že každé zobrazení $f' : \partial\Delta^{n+1} \to \partial\Delta^{m+1}$, $n < m$, je nepodstatné. Podle věty o simpliciální aproximaci je f' homotopické simpliciálnímu zobrazení $g' : |K| \to |L|$. Protože je g' na každém simplexu afinní, je jeho obraz sjednocením simplexů dimenzí nejvýše n a zejména není g' surjektivní (protože má L větší dimenzi). Zpětným přechodem ke sférám je f homotopické zobrazení g, které není surjektivní a tedy

$$g\colon S^n \to S^m \smallsetminus \{P\} \hookrightarrow S^m.$$

Protože je $S^m \smallsetminus \{P\} \cong \mathbb{R}^m$ stažitelný, je první zobrazení homotopické konstantnímu a to stejné tedy platí i pro kompozici g. □

Nyní se vrátíme k důkazu věty o simpliciální aproximaci. Označme pro vrchol A triangulace K jeho *otevřenou hvězdu*

$$\operatorname{st}(A) = \bigcup_{[A, A_1, \dots, A_k] \in K} \operatorname{int}_c[A, A_1, \dots, A_k],$$

tj. sjednocení vnitřků všech simplexů obsahujících A.

dú 20 Dokažte, že $\operatorname{st}(A) \subseteq |K|$ je otevřené okolí bodu A.

Protože je $\bigcap_{i=0}^k \operatorname{st}(A_i)$ sjednocením vnitřků těch simplexů, které obsahují všechny vrcholy $A_0, \dots, A_k$, je tento průnik neprázdný, právě když $[A_0, \dots, A_k] \in K$. To se nám bude hodit v důkazu.

[4] Formálně lze tento „problém“ obejít tak, že uvážíme také formální „degenerované“ k-simplexy $[A_0, \dots, A_k]$ u nichž nepožadujeme, aby vrcholy byly různé (stále ale chceme, aby množina $\{A_0, \dots, A_k\}$ byla afinně nezávislá). Tyto úvahy vedou na tzv. simpliciální množiny.

Důkaz věty o simpliciální aproximaci. Simpliciální zobrazení g je jednoznačně určeno svými hodnotami na vrcholech triangulace K', která bude násobným barycentrickým podrozdělením, $K' = \mathrm{sd}^N K$. Homotopie mezi f a g bude lineární – potřebujeme tedy, aby pro každý $x \in |K|$ ležely $f(x)$, $g(x)$ v témž simplexu L.

Nechť $N \gg 0$ je takové, aby se otevřená hvězda každého vrcholu $A \in K' = \mathrm{sd}^N K$ zobrazila pomocí f do otevřené hvězdy nějakého vrcholu $B \in L$. To je možné proto, že $\{\mathrm{st}(B) \mid B \in L\}$ je otevřené pokrytí $|L|$, tedy $\mathcal{U} = \{f^{-1}(\mathrm{st}(B)) \mid B \in L\}$ otevřené pokrytí $|K|$, a $\mathrm{st}(A) \subseteq B_{\mu(K')}(A)$. Stačí tedy zvolit N tak, aby jemnost $\mu(K')$ byla menší než Lebesgueovo číslo otevřeného pokrytí $\mathcal{U}$.

Nyní můžeme definovat $g(A)$. Zvolme vrchol $B \in L$ libovolně tak, aby $f(\mathrm{st}(A)) \subseteq \mathrm{st}(B)$ a položme $g(A) = B$. Nechť $[A_0, \ldots, A_k] \in K'$. Potom

$$f(\mathrm{int}_c[A_0, \ldots, A_k]) \subseteq \bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{st}(g(A_i))$$

a průnik napravo je tedy neprázdný; to ale znamená, že $[g(A_0), \ldots, g(A_k)] \in L$ a g je opravdu simpliciální. Nechť x leží uvnitř $[A_0, \ldots, A_k]$. Podle předchozího pak $f(x)$ leží ve vnitřku nějakého simplexu s obsahujícího $g(A_0), \ldots, g(A_k)$. Protože $g(x)$ leží uvnitř simplexu $[g(A_0), \ldots, g(A_k)]$, který je stěnou s, leží úsečka spojující $f(x)$, $g(x)$ v $s \subseteq |L|$ a lineární homotopie mezi f a g má opravdu hodnoty v $|L|$. □

konec 11. přednášky

12. Jordan curve theorem

Věta 12.1. *Let X be a compact Hausdorff space and $f\colon X \to S^2 \setminus \{a, b\}$ a continuous map. If a and b lie in the same path component of $S^2 \setminus f(X)$ then f is nullhomotopic.*

Důkaz. We may assume that $S^2 = (\mathbb{R}^2)^+$ and that $b = \infty$ and $a = 0$ (this follows from 2-homogeneity of S^2; alternatively one can derive versions of the formulas below for the case of a general a). Since $f(X) \subseteq \mathbb{R}^2$ is bounded, it lies in an R-ball $B_R(0)$ around zero. Clearly, any point c outside of this ball lies in the same component of $S^2 \setminus f(X)$ as $b = \infty$ and thus, we may find a path $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2 \setminus f(X)$ connecting $a = 0$ and c. It induces homotopy

$$h\colon I \times X \to \mathbb{R}^2 \setminus 0, \qquad h(t, x) = f(x) - \gamma(t)$$

from f to $f - c$ (it avoids 0 since $f(x) \neq \gamma(t)$). Since the image of $f - c$ lies in $B_R(-c)$ disjoint from the origin, we may contract it inside this ball using the homotopy

$$k\colon I \times X \to \mathbb{R}^2 \setminus 0, \qquad h(t, x) = t \cdot f(x) - c$$

(again, it avoids 0 since $t \cdot f(x) \neq c$). □

Assume now that $f\colon S^1 \to S^2$ is an embedding, i.e. a homeomorphism with a subspace $C \subseteq S^2$, usually thus called a simple closed curve. We want to prove that C separates S^2 into two components, i.e. that the set of path components $\pi_0(S^2 \setminus C)$ has exactly two elements. We will first show that it has more than one component, i.e. that C separates. We decompose S^1

into two arcs meeting at their common boundary and correspondingly decompose $C = A \cup B$ with $A \cap B = \{a, b\}$. Passing to the complements, we obtain

$$S^2 \smallsetminus \{a, b\} = (S^2 \smallsetminus A) \cup (S^2 \smallsetminus B)$$

with intersection $S^2 \smallsetminus C$. We will now show that the fundamental group of the union is generated by the fundamental groups of the subspaces, at least if the intersection is path connected. This will be the main ingredient of the Jordan separation theorem.

Věta 12.2. *Suppose that a space $X = U \cup V$ is a union of two open subspaces with $U \cap V$ path connected. Then $\pi_1(U \cup V, x)$ is generated by the images of $\pi_1(U, x)$ and $\pi_1(V, x)$.*

Much more can be said about how exactly it is generated – see Seifert–van Kampen theorem in Algebraic topology.

Důkaz. Let $\gamma\colon I \to X = U \cup V$ be a path and split I into intervals of length at most the Lebesgue number of the cover $\{\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)\}$. Then the image of each of the smaller intervals lies either in U or in V and γ is thus homotopic to a concatenation of paths lying either in U or in V. By concatenating neighbours that correspond to the same open subset U or V, we may reduce this to a concatenation of paths whose endpoints lie in $U \cap V$. By joining these endpoints with x inside $U \cap V$, we may further replace this by a concatenation of loops that lie either in U or in V. □

Věta 12.3 (Jordan separation theorem)**.** *Let $C \subseteq S^2$ be a simple closed curve. Then C separates S^2.*

Důkaz. Suppose that C does not separate, i.e. that $S^2 \smallsetminus C$ is path connected. Then the previous theorem applies to the decommposition

$$S^2 \smallsetminus \{a, b\} = (S^2 \smallsetminus A) \cup (S^2 \smallsetminus B)$$

thus showing that $\pi_1(S^2 \smallsetminus \{a, b\})$ is generated by the images of $\pi_1(S^2 \smallsetminus A)$ and $\pi_1(S^2 \smallsetminus B)$. Any element in the image of $\pi_1(S^2 \smallsetminus A)$ is represented by a continuous map

$$S^1 \to S^2 \smallsetminus A \subseteq S^2 \smallsetminus \{a, b\}$$

and since a and b are joined by the arc A disjoint from the image, they lie in the same path component and thus this composition is nullhomotopic, admitting an extension to the contractible D^2 and thus inducing the trivial map on π_1. In particular, these images are trivial and thus so is the group $\pi_1(S^2 \smallsetminus \{a, b\})$ generated by these images. This is a contradiction with $\pi_1(S^2 \smallsetminus \{a, b\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus 0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. □

nd **Konstrukce 12.4.** Suppose that $X = U \cup V$ is a union of two open subspaces such that $U \cap V$ is decomposed into a disjoint union of two open subspaces A and B. Think of the example of S^1 written as a union of two open arcs. We will now construct a covering of X out of this data, giving as a particular case the universal covering $\exp\colon \mathbb{R} \to S^1$. We organize the construction in the (colimit) diagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots & & U & & V & & U & & \cdots \\
\cdots & A \arrow[ur, hook] & & B \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] & & A \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] & & B \arrow[ul, hook'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

We take a countable collection of copies of U, indexed say by even integers and a countable colllection of copies of V, indexed say by odd integers, thus obtaining $2\mathbb{Z} \times U + (2\mathbb{Z}+1) \times V$. Now we identify $\{2k-1\} \times A$ with $\{2k\} \times A$ and symmetrically $\{2k\} \times B$ with $\{2k+1\} \times B$. We will call the result Γ. The projection $p\colon \Gamma \to X$ onto the second component is easily seen to be a covering (it is a local homeomorphism and a bijection on each $\{2k\} \times U$ and on each $\{2k+1\} \times V$).

Now let α be a path in U from $x \in A$ to $z \in A$ and β a path in V from z to x. Then the concatenation $\alpha * \beta$ admits a lifting to a path from $(0, x)$ to $(0, x)$ and thus lies in the image of $p_*\colon \pi_1(\Gamma, (0, x)) \to \pi_1(X, x)$.

Conversely, let γ be a path in U from $x \in A$ to $y \in B$ and δ a path in V from y to x. Then the concatenation $\gamma * \delta$ admits a lifting to a path from $(0, x)$ to $(2, x)$ and thus is non-trivial, even modulo the image of p_*, and the same applies to any power $(\gamma * \delta)^n$ for $n \neq 0$.

In particular, if both U and V are path connected and both A and B non-empty, $\pi_1(X, x)$ contains an infinite cyclic subgroup.

We summarize this in the following lemma.

nd **Lemma 12.5.** *Suppose that $X = U \cup V$ is a union of two open path connected subspaces whose intersection is not path connected. Then X is not simply connected.*

We remark that this, again, is a consequence of the general Seifert–van Kampen theorem.

nd **Věta 12.6.** *Let $D \subseteq S^2$ be an arc, i.e. the image of an embedding $f\colon I \to S^2$. Then D does not separate S^2.*

Důkaz. Assume for contradiction that $S^2 \setminus D$ is not path connected, say that x and y lie in different path components. Write $D = D_0 \cup D_1$ as a union of two arcs meeting at their common endpoint $D_0 \cap D_1$. Similarly to the above proof we have

$$S^2 \setminus (D_0 \cap D_1) = (S^2 \setminus D_0) \cup (S^2 \setminus D_1)$$

with intersection $S^2 \setminus D$. If x and y lied in different path components of both $S^2 \setminus D_0$ and $S^2 \setminus D_1$, the above lemma would imply that $S^2 \setminus (D_0 \cap D_1)$ is not simply connected, contrary to $S^2 \setminus (D_0 \cap D_1) \cong \mathbb{R}^2$. Thus, x and y cannot be joined in one of the $S^2 \setminus D_i$. Continuing in this way, we obtain a nested sequence of arcs that separate x from y, whose intersection consists of a single point a (it is non-empty by compactness and has at most one element since the lengths of the intervals tend to 0). Since $S^2 \setminus a \cong \mathbb{R}^2$ is path connected, x and y can be joined by a path in $S^2 \setminus a$, which necessarilly lies in the complement of one of the arcs, a contradiction. □

nd **Věta 12.7.** *Let $C \subseteq S^2$ be a simple closed curve. Then C separates S^2 into exactly two components.*

Důkaz. We already know that C separates. For contradiction, suppose that

$$S^2 \setminus C = U \sqcup V \sqcup W \sqcup \cdots .$$

We will use again the decomposition

$$S^2 \setminus \{a, b\} = (S^2 \setminus A) \cup (S^2 \setminus B)$$

with both summands path connected by the previous theorem and with the intersection $S^2 \smallsetminus C$. Decomposing the intersection first as

$$A = U \sqcup V, \qquad B = W \sqcup \cdots$$

we obtain a covering $p\colon \Gamma \to S^2 \smallsetminus C$. If α is a path from $x \in U$ to $y \in V$ and β a path from y to x, γ a path from $x \in U$ to $z \in W$ and δ a path from z to x, then $\alpha * \beta$ lies in the image of p_*, while $\gamma * \delta$ has infinite order modulo the image of p_*. Since $\pi_1(S^2 \smallsetminus \{a, b\} \cong \mathbb{Z}$, the latter easily implies that $\gamma * \delta$ is nonzero and the image of p_* is zero so that $\alpha * \beta$ is zero. Now use the symmetric decomposition

$$C = U \sqcup W, \qquad D = V \sqcup \cdots$$

to obtain a covering $q\colon \Delta \to S^2 \smallsetminus C$. Now $\alpha * \beta$ is nonzero and $\gamma * \delta$ is zero, thus yielding a contradiction. □

By studying the proof closely, we obtain the following generalization:

nd **Věta 12.8.** *Assume that $C = A \cup B \subseteq S^2$ is a compact subspace expressed as a union of two compact subspaces intersecting in exactly two points and such that $S^2 \smallsetminus A$ and $S^2 \smallsetminus B$ are both path connected (e.g. both arcs). Then C separates S^2 into exactly two components.*

We will also use the following addendum to the classical version.

nd **Věta 12.9.** *Let $C \subseteq S^2$ be a simple closed curve. Then the closure of the component U of $S^2 \smallsetminus C$ is exactly $\overline{U} = U \cup C$.*

Důkaz. Since $S^2 = C \sqcup U \sqcup V$, we easily obtain $\overline{U} \subseteq U \cup C$ (it is closed as a complement of the open set V). Thus let $x \in C$ and we want to prove that $x \in \overline{U}$ so let N be any open neighbourhood of x. Decompose $C = A \cup B$ into a union of two arcs meeting at their boundary points with B so small that $B \subseteq N$. Now $S^2 \smallsetminus A$ is path connected so there exists a path joining U and V inside $S^2 \smallsetminus A$. Since these cannont be joined in $S^2 \smallsetminus C$, this path must intersect B and it is then easy to see that $\overline{U}$ intersects B (if $t \in U$ is the smallest for which $\gamma(t) \notin U$ then $B \ni \gamma(t) = \lim \gamma(t - 1/n) \in \overline{U}$) and thus N; since N was arbitrary, $x \in \overline{U}$. □

We will now give an application of the generalized version that will be used for an application to graphs.

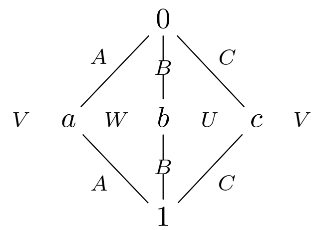
Důsledek 12.10. *Let $X \subseteq S^2$ be a union $X = A \cup B \cup C$ of three arcs meeting exactly at their endpoints. Then $S^2 \smallsetminus X$ has exactly three components U, V and W and such that $\overline{U} = U \cup B \cup C$ etc.*

Důkaz. The simple closed curve $B \cup C$ separates S^2 into two components and it is easy to see that exactly one of them is disjoint from A, call it U, while the other contains the interior of A, call it U'. Now $\overline{U} \cup A$ qualifies for the generalization of the Jordan curve theorem (the complement of $\overline{U}$ is U' while A is an arc), so

$$S^2 \smallsetminus (A \cup \underbrace{B \cup C \cup U}_{\overline{U}}) = V \cup W$$

and finally $S^2 \smallsetminus (A \cup B \cup C) = U \cup V \cup W$. The rest follows from the symmetry. □

Now we present an application to graphs; namely, we will prove non-embeddability of the graph $K_{3,3}$ into S^2 (or equivalently into $\mathbb{R}^2$), a part of the famous Kuratowski theorem. Start with any embedding of $K_{3,2}$ with vertices a, b, c, 0, 1; its image is exactly the space X from the previous corollary.



The last vertex 2 must belong to one of the components of the complement $S^2 \smallsetminus X$, by symmetry we may assume that it belongs to U. But then it cannot be joined with a since $a \in U'$.

13. Covering dimension

Definice 13.1. The order of an open cover $\mathcal{U}$ is the smallest number $m+1$ such that all $(m+2)$-tuple intersections of elements of $\mathcal{U}$ are empty, i.e. $\forall U_0, \ldots, U_{m+1} \in \mathcal{U}$, all distinct: $U_0 \cap \cdots \cap U_{m+1} = \emptyset$ (and there exists a nonempty $(m+1)$-tuple intersection).

Definice 13.2. The covering dimension of X is the smallest integer m such that any open cover of X admits an open refinement of order at most $m+1$.

Příklad 13.3. Let $\mathcal{A}$ be the following open cover of $\mathbb{R}^m$: Consider the decomposition of $\mathbb{R}^m$ into cubes with vertices lying on the integer lattice $\mathbb{Z}^m$. We consider cubes of all dimensions (thus making $\mathbb{R}^m$ into an infinite cubical complex). For each k-dimensional cube C, we consider the open set U_C of points having distance from C strictly smaller than from any other k-dimensional cube. Denote by $\mathcal{A}_k$ the collection of all the U_C's for all k-dimensional cubes C. Then $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_m$ is an open cover of order $m+1$: first of all each U_C is an intersection

$$\bigcap_D \{x \mid \operatorname{dist}(x, C) < \operatorname{dist}(x, D)\}$$

of open sets that is essentially finite (cubes D far from C do not contribute), second of all each x lies in the interior of exactly one cube C and thus lies in U_C; finally, $U_C \cap U_D = \emptyset$ if C, D have equal dimensions.

We note for later purposes that the diameters of all the open sets U_C are bounded, and it is not difficult to see that they are in fact bounded by 1.

Věta 13.4. *The covering dimension of any compact subset $K \subseteq \mathbb{R}^m$ is at most m.*

Důkaz. Let $\mathcal{U}$ be an open cover of K with Lebesgue number ε. Consider the ε-scaled version of $\mathcal{A}$ and denote it $\varepsilon\mathcal{A}$. Then any element of $\varepsilon\mathcal{A}$ lies in some element of $\mathcal{U}$ and is thus a refinement of $\mathcal{U}$ of order at most $m+1$. □

Věta 13.5. *Let $X = Y \cup Z$ be a union of two finite subspaces of covering dimension at most m. Then the covering dimension of X is at most m.*

Důkaz. We will say that $\mathcal{A}$ has order at most $m+1$ at Y if each $(m+2)$-tuple intersection of elements of $\mathcal{A}$ is disjoint from Y, i.e. if the corresponding open cover

$$\mathcal{A}|_Y = \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

of Y has order at most $m+1$. Let now $\mathcal{U}$ be any open cover of X. We will first find an open refinement that has order at most $m+1$ at Y. For that purpose choose an open refinement $\mathcal{V}$ of $\mathcal{U}|_Y$ of order at most $m+1$. For each $V \in \mathcal{V}$ choose $U_V \in \mathcal{U}$ such that $V \subseteq Y \cap U_V$ and also choose $W_V \subseteq X$ open such that $V = Y \cap W_V$. Then clearly

$$\mathcal{W} = \{X \smallsetminus Y\} \cup \{U_V \cap W_V \mid V \in \mathcal{V}\}$$

is an open refinement of $\mathcal{U}$ such that

$$\mathcal{W}|_Y = \{Y \cap U_V \cap W_V \mid V \in \mathcal{V}\} = \{V \mid V \in \mathcal{V}\} = \mathcal{V}$$

and as such has order at most $m+1$, as required.

Now start with an arbitrary open cover $\mathcal{U}$ of X and let $\mathcal{V}$ be an open refinement of order at most $m+1$ at Y and let $\mathcal{W}$ be an open refinement of $\mathcal{V}$ of order at most $m+1$ at Z. We will now build out of these refinements an open refinement of $\mathcal{U}$ of order at most $m+1$ everywhere. To this end, for each $W \in \mathcal{W}$, choose some $V_W \in \mathcal{V}$ such that $W \subseteq V_W$ and for each $V \in \mathcal{V}$ consider the union

$$O_V = \bigcup_{V=V_W} W,$$

clearly an open set. We claim that the collection $\mathcal{O} = \{O_V \mid V \in \mathcal{V}\}$ is the wanted refinement. Clearly, $O_V \subseteq V$ so $\mathcal{O}$ is a refinement of $\mathcal{V}$ and thus also of $\mathcal{U}$. Since $\bigcup O_V = \bigcup W = X$ it covers X. It remains to show that $\mathcal{O}$ has order at most $m+1$, so let $x \in O_{V_0} \cap \cdots \cap O_{V_k}$. Since $O_{V_i} \subseteq V_i$ we also have

$$x \in V_0 \cap \cdots \cap V_k.$$

Moreover, for each i, we must have $x \in W_i \subseteq O_{V_i}$ for some W_i with $V_i = V_{W_i}$. Thus

$$x \in W_0 \cap \cdots \cap W_k.$$

Since for $x \in Y$, the first can only happen when $k \leq m$ and, for $x \in Z$, the second can only happen when $k \leq m$, the open refinement $\mathcal{O}$ indeed has order at most $m+1$. $\square$

Důsledek 13.6. *Any compact manifold M of dimension m has covering dimension at most m.*

Důkaz. This follows since M is a finite union of compact balls that have covering dimension at most m. $\square$

Our next goal is to prove that every compact metrizable space X of covering dimension at most m embeds into $\mathbb{R}^{2m+1}$. In fact, we will show that almost every continuous map $X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ is an emebedding. To make this statement precise, we will endow the set $C(X, \mathbb{R}^{2m+1})$ of continuous maps from X to $\mathbb{R}^{2m+1}$ with a metric and the precise claim will then be that the embeddings form a dense subset (more sharply a residual subset).

Definice 13.7. A subset $A \subseteq X$ is *residual* if it contains a countable intersection of open dense subsets.

Further, X is said to be *Baire* if every residual subset of X is dense.

Věta 13.8. *Every complete metric space is Baire.*

Důkaz. Let $U_0, U_1, \dots$ be open dense subsets. In order to show that $\bigcap U_n$ is dense, we have to show that it has nonempty intersection with any nonempty open subset U, i.e. that

$$U \cap U_0 \cap U_1 \cap \cdots \neq \emptyset.$$

By density of U_0, the intersection $U \cap U_0$ is nonempty and since it is also open, it contains a closed ball $\overline{B}_{\varepsilon_0}(x_0) \subseteq U \cap U_0$. Now the intersection $B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap U_1$ is also nonempty open and thus contains a closed ball

$$\overline{B}_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap U_1 \subseteq U \cap U_0 \cap U_1.$$

Continuing in this way, we find a nested sequence of balls and since each ε_n could have been chosen arbitrarily small, we may assume that $\varepsilon_n \to 0$. Then the sequence x_n is cauchy and thus converges to a point $x \in X$. Since the sequence eventually lies in each of the closed balls $\overline{B}_{\varepsilon_n}(x_n)$, the same must be true for the limit and thus $x \in U \cap U_0 \cap \cdots$. □

We will now apply this theorem to the function space $C(X, Y)$. Let X be compact and Y metric. We define on $C(X, Y)$ the metric of uniform convergence:

$$\operatorname{dist}(f, g) = \max\{\operatorname{dist}(f(x), g(x)) \mid x \in X\};$$

since the function $\operatorname{dist}(f(x), g(x))$ is continuous on a compact space X, the maximum is indeed achieved. Clearly, $f_n \to f$ iff the sequence of maps f_n converges uniformly to f. It is easy to observe that if Y is a complete metric space, the same is true of $C(X, Y)$: if f_n is cauchy then so is each $f_n(x)$ and thus converges to some $f(x)$; since the convergence is not just pointwise but uniform, f is continuous and as such is the limit of f_n.

Důsledek 13.9. *Let X be compact and Y complete metric. Then so is $C(X, Y)$ and as such is also Baire.*

Finally, we will need the so called partition of unity. We will only cover the compact case which is much simpler (any compact Hausdorff space is paracompact).

Definice 13.10. Let $\mathcal{U}$ be an open cover of X. A partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$ is a collection of functions $\lambda_i \colon X \to [0, 1]$ with the following properties:

- Each λ_i has support in some $U \in \mathcal{U}$, where $\operatorname{supp} \lambda_i$ is the closure of the set $\lambda^{-1}(\mathbb{R} \smallsetminus 0)$ of points where λ_i is nonzero.
- The collection is locally finite, i.e. each point admits a neighbourhood where only a finite number of the functions is nonzero.
- The functions add up to one, i.e. $\sum \lambda_i = 1$ (by the previous point, the sum is locally finite and as such is well defined and continuous).

We present now a useful reorganization of the collection of functions: for each λ_i we choose some $U_i \in \mathcal{U}$ that contains $\operatorname{supp} \lambda_i$ and then we write

$$\lambda_U = \sum_{U = U_i} \lambda_i$$

i.e. we partially sum the functions according to their supports. This clearly produces another partition of unity, this time indexed by the open cover $\mathcal{U}$ itself.

Clearly, if $\mathcal{V}$ is a refinement of $\mathcal{U}$ and λ_i is a partition of unity subordinate to $\mathcal{V}$ then it is at the same time subordinate to $\mathcal{U}$. For a compact Hausdorff space we may thus restrict our attention to finite open covers.

Věta 13.11. *Let X be compact Hausdorff. Then a partition of unity exists subordinate to any open cover.*

Důkaz. Let $\mathcal{U}$ be an open cover of X. Let $x \in X$ and choose $U_x \in \mathcal{U}$ containing x. Since X is regular, we may find an open neighbourhood $V_x \ni x$ such that $x \in \overline{V}_x \subseteq U_x$. Since X is completely regular, we may find a function $\lambda_x \colon X \to [0,1]$ such that $\lambda_x(x) = 1$ and such that $\lambda_x|_{X \smallsetminus V_x} = 0$. Then the support of λ_x is contained in $\overline{V}_x$ and thus in U_x. The cover of X by the open sets $\lambda_x^{-1}(0,1]$ admits a finite subcover

$$X = \lambda_{x_1}^{-1}(0,1] \cup \cdots \cup \lambda_{x_k}^{-1}(0,1]$$

and thus $\lambda = \lambda_{x_1} + \cdots + \lambda_{x_k}$ is positive on X. Finally, replace each λ_{x_i} by λ_{x_1}/λ to obtain a partition of unity. $\square$

We are now ready to prove the embeddability theorem. We recall that an embedding is a map $f \colon X \to Y$ that is a homeomorphism onto its image $f \colon X \cong f(X)$. When X is compact and Y is Hausdorff, this is equivalently an injective continuous map.

Věta 13.12. *Let X be a compact metric space of covering dimension m. Then X embeds into $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Důkaz. Consider the function space $C(X, \mathbb{R}^{2m+1})$, which is a Baire space according to our assumptions, and its subspaces

$$\mathfrak{X}_n = \{f \colon X \to \mathbb{R}^{2m+1} \mid f(x) = f(y) \Rightarrow \operatorname{dist}(x,y) < 1/n\}.$$

Clearly $\bigcap \mathfrak{X}_n$ is the subspace of injective maps, i.e. embeddings. It remains to show that each $\mathfrak{X}_n$ is open dense since then the embeddings will form a dense subset, hence nonempty (since the full space is nonempty).

We start by showing that $\mathfrak{X}_n$ is open. Thus let $f \in \mathfrak{X}_n$. Since the function

$$\{(x,y) \mid \operatorname{dist}(x,y) \geq 1/n\} \to (0,\infty), \qquad (x,y) \mapsto \operatorname{dist}(f(x), f(y))$$

has compact domain and hence also compact image, we have

$$\operatorname{dist}(x,y) \geq 1/n \Rightarrow \operatorname{dist}(f(x), f(y)) \geq 2\varepsilon$$

for some $\varepsilon > 0$. Now if $g \in B_\varepsilon(f)$ then both pairs $f(x)$, $g(x)$ and $f(y)$, $g(y)$ are closer than ε and thus $g(x) \neq g(y)$, showing that $B_\varepsilon(f) \subseteq \mathfrak{X}_n$.

It remains to show density of $\mathfrak{X}_n$. Let $f \colon X \to \mathbb{R}^{2m+1}$ and $\varepsilon > 0$ be arbitrary, we want to find some $g \in B_\varepsilon(f) \cap \mathfrak{X}_n$. First we find a finite open cover $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ of X with the following properties:

- Each U_i has diameter smaller than $1/n$.
- Each image $f(U_i)$ is contained in a ball $B_\varepsilon(z_i)$.
- The points z_i are in general position, i.e. any $(k+1)$-tuple of them with $k \leq 2m+1$ is affine independent.

- $\mathcal{U}$ has order at most $m+1$.

For the first point, it is enough if $\mathcal{U}$ is any refinement of a cover by balls of diameter smaller than $1/n$, for the second point, it is enough if $\mathcal{U}$ is any refinement of the cover $\{f^{-1}(B_\varepsilon(z)) \mid z \in \mathbb{R}^{2m+1}\}$; thus, we may cover X by the intersections of these two types of open sets and take any finite refinement of order at most $m+1$. Finally, a small perturbation of the centres z_i does not spoil the second condition and satisfies the third.[5]

Now let λ_i be a partition of unity subordinate to this open cover. We define

$$g(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x) \cdot z_i.$$

This is clearly a continuous map. If $x \in X$ has $\lambda_i(x) > 0$ then $x \in U_i$ and thus $z_i \in B_\varepsilon(f(x))$ so that also $g(x) \in B_\varepsilon(f(x))$ since the ball is convex. This shows that $g \in B_\varepsilon(f)$ and it remains to show that $g \in \mathfrak{X}_n$. Thus, assume that $g(x) = g(y)$ so

$$g(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x) \cdot z_i = \sum_{i \in I} \lambda_i(y) \cdot z_i = g(y).$$

Since at most $m+1$ of the $\lambda_i(x)$ are nonzero and at most $m+1$ of the $\lambda_i(y)$ are nonzero, we are in fact speaking of the equality of affine combinations of at most $2m+2$ points. Since these are affine independent, the coefficients must be equal and thus some $\lambda_i(x) = \lambda_i(y) \neq 0$ and so $x, y \in U_i$. By the condition on the diameter of U_i, we have $\operatorname{dist}(x,y) < 1/n$ and indeed $g \in \mathfrak{X}_n$. □

Důsledek 13.13. *Compact subsets of euclidean spaces are exactly the compact metrizable spaces of finite covering dimension.*

One can also treat non-compact spaces. However, since partitions of unity are used, such spaces are required to be paracompact (we did not speak about them in the course). In addition, a countable basis of topology is required.

14. Compact-open topology

This is an alternative to the chapter on compactly generated Hausdorff spaces. We first generalize the function spaces to the case where Y is not metric. Of course, one should then expect $C(X,Y)$ to be a topological space rather than a metric space. We still restrict our attention to the case of a compact Hausdorff space X.

Definice 14.1. Let X be compact and Y arbitrary. For an open subset $U \subseteq X \times Y$ we define

$$O(U) = \{f \in C(X,Y) \mid \operatorname{gr} f \subseteq U\}$$

[5] For any $(k+1)$-tuple $z_0, \dots, z_k$ consider the $(2m+1) \times k$ matrix $A = (z_1 - z_0, \dots, z_k - z_0)$. Since the minors are polynomial functions in the entries of the matrix, the affine independent $(k+1)$-tuples form an open subset; it is also dense: One can find invertible matrices P, Q such that $A = P \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$. The required small perturbation is $A' = P \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \varepsilon E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ (this requires $k \leq 2m+1$). Since the number of tuples is finite, the intersection in question will still be (open) dense.

where $\operatorname{gr} f$ denotes the graph of f.

Since $O(U) \cap O(V) = O(U \cap V)$ it is a basis of topology on $C(X,Y)$ called the *compact-open topology.* The set $C(X,Y)$ equipped with this topology is the *function space.*

Věta 14.2. *When Y is a metric space, the compact-open topology is the topology associated with the uniform convergence metric.*

Důkaz. For $f \in C(X,Y)$, we will be using the following continuous function $d_f \colon X \times Y \to [0,\infty)$:

$$d_f(x,y) = \operatorname{dist}(f(x), y).$$

Now any ball is open according to $B_\varepsilon(f) = O(d_f^{-1}[0,\varepsilon))$. Conversely, if $f \in O(U)$ then it can be showed that d_f achieves[6] its minimum on the complement of U: For any $x \in X$ we get $V'_x \times B_{2\varepsilon_x}(f(x)) \subseteq U$ for some $V'_x \ni x$ and we may then replace $V_x = V'_x \cap f^{-1}(B_{\varepsilon_x}(f(x)))$ to obtain a bound $d_f \geq \varepsilon_x$ on $V_x \times Y \smallsetminus U$. Now take a finite subcover and define ε as the minimum of the corresponding ε_x's to obtain a bound $d_f \geq \varepsilon$ on $X \times Y \smallsetminus U$ or equivalently $B_\varepsilon(f) \subseteq O(U)$. □

Traditionally, the compact-open topology is given by a subbasis. For $C \subseteq X$ compact and $W \subseteq Y$ open, we introduce

$$M(C,W) = O((X \times W) \cup (X \smallsetminus C) \times Y) = \{f \in C(X,Y) \mid \forall x \in C \colon f(x) \in W\}.$$

Thus, each $M(C,W)$ is open. In the opposite direction, let $f \in O(U)$ and cover $\operatorname{gr} f$ by a finite number of rectangles $C_i \times U_i$; then

$$f \in \bigcap M(C_i, U_i) \subseteq O(U).$$

Poznámka. For X non-compact, the two topologies – the one generated by the $M(C,W)$ and the one generated by the $O(U)$ – are different. The first is the compact-open topology (or weak topology), usually considered for locally compact Hausdorff X, and the second is the strong topology, usually considered for paracompact X (for Y metric the corresponding convergence notions for sequences $f_n \to f$ are the uniform convergence on compact subsets and the same but with f_n eventually constant outside of some compact subset).

Věta 14.3. *Let X be compact Hausdorff. A map $f \colon Z \times X \to Y$ is continuous if and only if the corresponding map $g \colon Z \to C(X,Y)$ is continuous.*

Poznámka. The same theorem holds for X locally compact Hausdorff in the compact-open topology.

Důkaz. To prove g continuous, we show that $g^{-1}(M(C,W))$ is open. Thus let $z \in g^{-1}(M(C,W))$, i.e. $f(z \times C) \subseteq W$. By the tube lemma, we get $V \ni z$ such that $f(V \times C) \subseteq W$, i.e. $z \in V \subseteq g^{-1}(M(C,W))$.

To prove f continuous, we show that $f^{-1}(W)$ is open. Thus let $(z,x) \in f^{-1}(W)$. Since $g(z) = f(z,-)$ is continuous and maps x to W, there is a compact neighbourhood $C \ni x$ such that $g(z)(C) \subseteq W$, i.e. $g(z) \in M(C,W)$. By continuity of g, we get $V \ni z$ such that $g(V) \subseteq M(C,W)$, i.e. $(z,x) \in V \times C \subseteq f^{-1}(W)$. □

[6] Taking minimum over y yields a lower semi-continuous function $X \to [0,\infty)$ on a compact space and any such achieves its minimum.

Důsledek 14.4. *Quotient maps are closed under muliplication by a compact Hausdorff space X, i.e. if $Z \to Z/{\sim}$ is a quotient map then so is $Z \times X \to Z/{\sim} \times X$.*

Důkaz. We verify the universal property:

$$\begin{tikzcd} Z \times X \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ Z/{\sim} \times X \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & C(X,Y) \\ Z/{\sim} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

The dashed map in the left hand side diagram exists (is continuous) if and only if the one on the right exists and that is guaranteed by the universal property. □

Důsledek 14.5. *A homotopy $I \times (Z/{\sim}) \to Y$ is continuous if and only if the homotopy before taking the quotient $I \times Z \to Y$ is continuous.*

Důkaz. Take $X = I$. □

This means for example that since $I/\partial I = S^1$, a homotopy $I \times S^1 \to Y$ is continuous if and only if the corresponding homotopy $I \times I \to Y$ is continuous, i.e. homotopy of loops equals homotopy of maps from a circle (fixing the special point 1).

15. Kompaktně generované Hausdorffovy prostory

Definice 15.1. Topologický prostor X se nazývá *kompaktně generovaný Hausdorffův (CGH)*, jestliže je Hausdorffův a pro podmnožinu $A \subseteq X$ platí: je-li pro každou kompaktní $C \subseteq X$ průnik $C \cap A$ otevřený v C, pak A je otevřená.

V dalším budeme množinu A, pro níž je $C \cap A \subseteq C$ otevřená, nazývat *kompaktně otevřená*. Analogicky se definuje *kompaktně uzavřená* množina. Je tedy X kompaktně generovaný, jestliže každá kompaktně otevřená množina je otevřená.

Příklad 15.2. Každý lokálně kompaktní Hausdorffův prostor X je kompaktně generovaný: nechť U je kompaktně otevřená a $x \in U$. Existuje kompaktní okolí $C \ni x$ a díky definici kompaktní otevřenosti je $C \cap U \subseteq C$ otevřená, tedy průnikem $C \cap V$ s otevřenou množinou $V \subseteq X$. Protože jsou obě C, V okolími x, je také $C \cap U = C \cap V$ okolím x a tím spíš $U \supseteq C \cap U$.

Nechť X je Hausdorffův prostor. Označme kX množinu X společně s topologií danou systémem kompaktně otevřených podmnožin.

cv **Cvičení 15.3.** Zobrazení $f\colon kX \to Y$ je spojité, právě když $f\colon X \to Y$ je spojité na každé kompaktní podmnožině.

Lemma 15.4. *Prostor kX je kompaktně generovaný Hausdorffův prostor.*

Důkaz. Protože je v kX víc otevřených množin, je to zřejmě Hausdorffův prostor. Ukážeme, že má stejné kompaktní podprostory. Identické zobrazení $kX \to X$ je spojité a proto každý kompaktní podprostor kX je kompaktní i v X. Nechť naopak $C \subseteq X$ je kompaktní. Podle cvičení je složení $C \to X \to kX$ spojité (neboť $\mathrm{id}\colon kX \to kX$ je spojitá), takže jeho obraz je kompaktní množina. Dvě možné topologie na C, jako podprostoru X a jako podprostoru kX, jsou totožné, protože obě identity na C jsou spojité. Kompaktně otevřené množiny X a kX jsou tedy stejné a proto je kX kompaktně generovaný (kompaktně otevřená podmnožina kX je kompaktně otevřená v X, tedy otevřená v kX). □

Definice 15.5. Nechť Y, Z jsou topologické prostory. Na množině spojitých zobrazení

$$Z^Y = \{f: Y \to Z \mid f \text{ spojité}\}$$

definujme *compact-open* topologii pomocí subbáze

$$M(C, U) = \{f \in Z^Y \mid f(C) \subseteq U\},$$

kde $C \subseteq Y$ je kompaktní a $U \subseteq Z$ otevřená.

* **Příklad 15.6.** Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor a Z metrický prostor. Definujme *metriku stejnoměrné konvergence* na Z^Y pomocí předpisu

$$\operatorname{dist}(f, g) = \max\{\operatorname{dist}(f(y), g(y)) \mid y \in Y\}.$$

Tato metrika zadává na Z^Y přesně compact-open topologii.

O něco obecněji pro lokálně kompaktní Hausdorffův prostor Y je compact-open topologie na Z^Y dána stejnoměrnou konvergencí na kompaktních podmnožinách.

Pro zobrazení $f: X \times Y \to Z$ definujme $f^\flat: X \to Z^Y$, $f^\flat(x)(y) = f(x, y)$. Naopak, pro $g: X \to Z^Y$ definujme $g^\sharp: X \times Y \to Z$, $g^\sharp(x, y) = g(x)(y)$.

Definujeme $X \times_k Y = k(X \times Y)$. Důležitost této konstrukce spočívá v následující větě.

Věta 15.7 (o adjunkci)**.** *Nechť X, Y jsou kompaktně generované Hausdorffovy prostory a Z libovolný prostor. Potom zobrazení $f: X \times_k Y \to Z$ je spojité, právě když je spojité zobrazení $f^\flat: X \to Z^Y$.*

Důkaz. Spojitost $f^\flat$ stačí ověřit na každé kompaktní podmnožině $C \subseteq X$ a lze vyjádřit následovně. Nechť $M(D, U)$ je subbazická množina. Pak

$$\{x \in C \mid \forall y \in D: f(x, y) \in U\}$$

je otevřená v C. To plyne ze spojitosti $f: X \times Y \to Z$ na $C \times D$ a z kompaktnosti D s použitím „tube lemma“.

Spojitost f je ekvivalentní spojitosti $f: X \times Y \to Z$ na každé kompaktní množině $C \times D \subseteq X \times Y$. Nechť $U \subseteq Z$ je otevřená a nechť $f(x, y) \in U$. Protože je $f(x, -): Y \to Z$ spojité a $D \subseteq Y$ lokálně kompaktní, existuje kompaktní okolí $y \in D' \subseteq D$ takové, že $f(x, D') \subseteq U$. To znamená, že $x \in (f^\flat)^{-1}(M(D', U))$ a ze spojitosti $f^\flat$ existuje okolí $x \in C' \subseteq C$ takové, že $f^\flat(C') \subseteq M(D', U)$, tj. $f(C' \times D') \subseteq U$. Tedy f je spojité na $C \times D$. □

Poznámka. Spojitost $f^\flat$ je ekvivalentní spojitosti $f^\flat: X \to k(Z^Y)$. To znamená, že kategorie kompaktně generovaných Hausdorffových prostorů je kartézsky uzavřená (neboť $X \times_k Y$ je součin v této kategorii a $k(Z^Y)$ je objekt funkcí).

Nechť $\sim$ je relace ekvivalence na kompaktně generovaném Hausdorffově prostoru X taková, že $X/\sim$ je opět Hausdorffův. Pak je kompaktně generovaný Hausdorffův. To plyne z toho, že projekce $X \to X/\sim$ indukuje spojité zobrazení $X = kX \to k(X/\sim)$. Protože je ale $X/\sim$ největší topologie, pro kterou je toto zobrazení spojité, a $k(X/\sim)$ má víc otevřených množin, musí být $k(X/\sim) = X/\sim$, tj. $X/\sim$ je kompaktně generovaný Hausdorffův.

Důsledek 15.8. *Nechť $\sim$ je relace ekvivalence na kompaktně generovaném Hausdorffově prostoru X taková, že $X/\sim$ je také Hausdorffův. Pak existuje homeomorfismus*

$$(X \times_k Y)/\sim \;\cong (X/\sim) \times_k Y.$$

Důkaz. Spojité zobrazení $(X \times_k Y)/\!\sim\, \to (X/\!\sim) \times_k Y$ je ekvivalentně zadáno jako $X \times_k Y \to (X/\!\sim) \times_k Y$ respektující relaci. Stačí tedy vzít $p \times \mathrm{id}$, kde $p\colon X \to X/\!\sim$ je kanonická projekce. Ze spojitosti pak plyne, že také $(X \times_k Y)/\!\sim$ je Hausdorffův prostor.

V opačném směru, spojité zobrazení $(X/\!\sim) \times_k Y \to (X \times_k Y)/\!\sim$ je ekvivalentně zadáno jako $X/\!\sim\, \to ((X \times_k Y)/\!\sim)^Y$, tedy jako zobrazení $X \to ((X \times_k Y)/\!\sim)^Y$ respektující relaci, a tedy jako zobrazení $X \times_k Y \to (X \times_k Y)/\!\sim$ respektující relaci. Stačí vzít kanonickou projekci. $\square$

Důležitým speciálním případem je, když Y je lokálně kompaktní.

Tvrzení 15.9. *Nechť X je kompaktně generovaný Hausdorffův, Y lokálně kompaktní Hausdorffův. Pak $X \times_k Y = X \times Y$.*

Důkaz. Nechť $A \subseteq X \times Y$ je kompaktně otevřená a $(x_0, y_0) \in A$. Potom také $(\{x_0\} \times Y) \cap A$ je komapktně otevřená v $\{x_0\} \times Y \cong Y$ a díky kompaktní generovanosti Y otevřená. Existuje tedy kompaktní okolí $y_0 \in D \subseteq Y$ s vlastností $\{x_0\} \times D \subseteq A$. Uvažme množinu

$$U = \{x \in X \mid \{x\} \times C \subseteq A\} \subseteq X.$$

Ukážeme, že U je kompaktně otevřená, tedy otevřená – je-li $C \subseteq X$ kompaktní, je $(C \times D) \cap A$ otevřená v $C \times D$; $C \cap U$ je pak otevřená podle „tube lemma“. Proto $(x_0, y_0) \in U \times D \subseteq A$. Protože bylo (x_0, y_0) libovolné, je A otevřená.

Alternativní důkaz spočívá v následujícím: zobrazení $\mathrm{in}\colon\ X \to (X \times_k Y)^Y$ je spojité podle věty o adjunkci a evaluace $\mathrm{ev}\colon\ Z^Y \times Y \to Z$, $(f, y) \mapsto f(y)$, je spojitá díky velice jednoduchému argumentu (je-li $U \ni f(y)$ otevřená, tak ze spojitosti f a lokální kompaktnosti Y existuje kompaktní okolí $C \ni y$; pak $M(C, U) \times C$ je okolí (f, y), které se zobrazí do U). Proto je spojitá i kompozice

$$X \times Y \xrightarrow{\mathrm{in} \times \mathrm{id}_Y} (X \times_k Y)^Y \times Y \xrightarrow{\mathrm{ev}} X \times_k Y$$

a proto je $X \times Y$ kompaktně generovaný. $\square$

16. Algebry spojitých funkcí

Připomeňme, že (asociativní, s jednotkou) $\mathbb{C}$-*algebra* A je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ společně s bilineárním zobrazením $A \times A \to A$, které dělá z A okruh. Zobrazení $\mathbb{C} \to A$, $z \mapsto z1$, je potom homomorfismus okruhů. Naopak, každý homomorfismus okruhů $\iota\colon \mathbb{C} \to A$ zadává na A strukturu vektorového prostoru nad $\mathbb{C}$ pomocí $za = \iota(z) \cdot a$. Jednoduše se ověří, že se jedná o $\mathbb{C}$-algebru, právě když obraz ι leží v centru okruhu A. Zejména komutativní $\mathbb{C}$-algebra je přesně homomorfismus okruhů $\mathbb{C} \to A$.

Homomorfismus $\mathbb{C}$-*algeber* $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus okruhů, který je zároveň lineární. Ekvivalentně komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A \arrow[rr, "\Phi"'] & & B \end{tikzcd}$$

Nechť X je kompaktní Hausdorffův prostor. Definujme

$$C(X) = \{f\colon X \to \mathbb{C} \text{ spojitá}\}.$$

Společně se sčítáním a násobením funkcí se jedná o okruh. Vložení konstantních funkcí je homomorfismus $\mathbb{C} \to C(X)$ a jedná se tedy o $\mathbb{C}$-algebru.

Věta 16.1. *Existuje přirozená bijekce mezi body X a maximálními ideály $C(X)$.*

Důkaz. Prvně popíšeme maximální ideály odpovídající bodům X. Nechť $x \in X$. Definujeme

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}.$$

Protože je $\mathfrak{m}_x$ jádrem surjektivního homomorfismu $\mathbb{C}$-algeber (zejména okruhů)

$$\mathrm{ev}_x \colon C(X) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(x)$$

a $\mathbb{C}$ je těleso, je $\mathfrak{m}_x = \ker \mathrm{ev}_x$ opravdu maximální ideál.

dú 21 Ukažte, že přiřazení $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ je injektivní.

Zbývá ukázat, že každý maximální ideál je tvaru $\mathfrak{m}_x$ pro nějaké $x \in X$. Předpokládejme sporem, že $I \subseteq C(X)$ je maximální ideál různý od $\mathfrak{m}_x$. Potom existuje $f_x \in I \smallsetminus \mathfrak{m}_x$. Vynásobením komplexně sdruženou funkcí $\overline{f_x}$ dostáváme nezápornou funkci $g_x = \overline{f_x} f_x \in I$ s vlastností $g_x(x) > 0$. Položme $U_x = \{y \in X \mid g_x(y) > 0\}$. Dostáváme tak otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in X\}$. Díky kompaktnosti

$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$$

a funkce $g = g_{x_1} + \cdots + g_{x_n}$ je kladná na celém X. Proto g^{-1} existuje a I obsahuje $1 = g^{-1}g$ a nemůže být maximální. □

Poznámka. Předchozí věta neplatí bez podmínky kompaktnosti X. Ideál

$$I = \{f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \exists C \text{ kompaktní: } f = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n \smallsetminus C\}$$

neleží v žádném maximálním ideálu $\mathfrak{m}_x$. Musí tedy ležet v nějakém maximálním ideálu různém od $\mathfrak{m}_x$ a zejména takové maximální ideály $\mathfrak{m}$ existují. Poznamenejme ještě, že dimenze $C(X)/\mathfrak{m}$
** bude vždy nekonečná. (Předpokládejme, že je tato dimenze konečná a položme $f(x) = |x|$. Potom $[1, f, f^2, \ldots]$ má nekonečnou dimenzi – $\sum a_n f^n(x) = 0$ pouze pro $f(x)$ kořenem $\sum a_n z^n$, těch je konečně mnoho a nemůže tedy rovnost platit pro všechna x. Proto musí být nějaké $h = \sum a_n f^n \in \mathfrak{m}$ a množina nul $Z(h)$ je kompaktní; dále postupujeme jako v důkazu věty.)

Z algebry $C(X)$ lze tedy zrekonstruovat X jako množinu; ukažme si nyní, jak lze zrekonstruovat topologii. Je-li $I \subseteq C(X)$ libovolný ideál, je množina

$$Z(I) = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(0) = \{x \in X \mid \forall f \in I \colon f(x) = 0\}$$

uzavřená (jedná se o množinu společných nul ideálu I).

dú 22 Ukažte, že každá uzavřená množina vznikne tímto způsobem z nějakého ideálu.

Věta 16.2. *Existuje přirozená bijekce mezi spojitými zobrazeními $\varphi \colon X \to Y$ a homomorfismy $\mathbb{C}$-algeber $\Phi \colon C(Y) \to C(X)$.*

Důkaz. Nechť $\varphi: X \to Y$ je spojité zobrazení. Definujme homomorfismus $\mathbb{C}$-algeber $\varphi^*: C(Y) \to C(X)$ předpisem $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Ukážeme nyní, že každý homomorfismus $\mathbb{C}$-algeber $\Phi: C(Y) \to C(X)$ je tohoto tvaru. Nechť $x \in X$ a uvažme ideály $\mathfrak{m}_x \subseteq C(X)$, $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_x) \subseteq C(Y)$. Indukované zobrazení $C(Y)/\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_x) \to C(X)/\mathfrak{m}_x$ je zjevně injektivní. Oba kvocienty obsahují $\mathbb{C}$ jako podtěleso, a to je tímto zobrazením fixované. Protože je $C(X)/\mathfrak{m}_x$ rovno $\mathbb{C}$, jedná se o izomorfismus. Proto je $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ také maximální a $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{\varphi(x)}$ pro nějaké $\varphi(x) \in Y$. Tím je určeno zobrazení $\varphi: X \to Y$.

konec 12. přednášky

Zbývá ukázat, že φ je spojité, a že $\Phi = \varphi^*$. Nechť $x_0 \in X$, $y_0 = \varphi(x_0)$; potom $\mathfrak{m}_{y_0} = \Phi^{-1}(\mathfrak{m}_{x_0})$, tedy $\Phi(\mathfrak{m}_{y_0}) \subseteq \mathfrak{m}_{x_0}$. Počítejme

$$\Phi(f) = \Phi(\underbrace{f(y_0)}_{\text{konst}} + (f - f(y_0))) = f(y_0) + \Phi(\underbrace{f - f(y_0)}_{\in \mathfrak{m}_{y_0}}) \in f(y_0) + \mathfrak{m}_{x_0},$$

tj. $\Phi(f)(x_0) = \mathrm{ev}_{x_0} \Phi(f) = \mathrm{ev}_{x_0} f(y_0) = f(y_0) = f(\varphi(x_0)) = (\varphi^* f)(x_0)$. Protože bylo $x_0 \in X$ libovolné, máme $\Phi(f) = \varphi^* f$, tj. $\Phi = \varphi^*$.

Pro spojitost si stačí uvědomit, že $Z(I) = \{y \in Y \mid I \subseteq \mathfrak{m}_y\}$. Potom $Z(\Phi(I))$ je množina těch $x \in X$, pro něž

$$\Phi(I) \subseteq \mathfrak{m}_x \;\Leftrightarrow\; I \subseteq \Phi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{\varphi(x)} \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \in Z(I),$$

tedy $Z(\Phi(I)) = \varphi^{-1}(Z(I))$ a zejména je $\varphi^{-1}(Z(I))$ uzavřená. Protože je každá uzavřená množina tvaru $Z(I)$, je φ spojité. □

17. Topologické grupy, Pontryaginova dualita

Definice 17.1. Topologická grupa G je Hausdorffův topologický prostor a zároveň grupa takovým způsobem, že grupové operace

$$\mu: G \times G \to G, \quad \mu(x, y) = xy; \quad \nu: G \to G, \quad \nu(x) = x^{-1}$$

jsou spojité.

Definujme levou translaci $\lambda_y: x \mapsto yx$ a pravou translaci $\rho_y: x \mapsto xy$. Obě jsou homeomorfismy, protože $(\lambda_y)^{-1} = \lambda_{y^{-1}}$ a $(\rho_y)^{-1} = \rho_{y^{-1}}$. Podobně jsou homeomorfismy inverze ν a konjugace $x \mapsto yxy^{-1}$.

Lemma 17.2. *Každá otevřená podgrupa je zároveň uzavřená. Zejména podgrupa obsahující nějaké okolí jednotky e obsahuje celou komponentu jednotky.*

Důkaz. Doplněk uzavřené podgrupy $H \subseteq G$ je sjednocením $G \smallsetminus H = \bigcup_{x \notin H} xH$, přičemž $xH = \lambda_x(H)$ je otevřená – λ_x je homeomorfismus a H je otevřená; je tedy otevřená i $G \smallsetminus H$ a H je skutečně uzavřená.

Komponenta jednotky G_e je souvislá uzavřená podgrupa – obrazy $G_e \cdot G_e = \mu(G_e \times G_e)$, $G_e^{-1} = \nu(G_e)$ jsou také souvislé a obsahují e, proto musí ležet v G_e. Je-li $H \subseteq G$ libovolná podgrupa obsahující nějaké okolí $U \ni e$, pak je zjevně otevřená – s každým $x \in H$ obsahuje i nějaké okolí $xU \ni x$. Proto je průnik $G_e \cap H$ otevřená podgrupa souvislé grupy G_e a musí být tedy rovný G_e. □

Lemma 17.3. *Uzávěr podgrupy je podgrupa. Uzávěr normální podgrupy je normální podgrupa.*

Důkaz. Je-li $H \subseteq G$ podgrupa, platí $H \times H \subseteq \mu^{-1}(H)$. Není těžké se přesvědčit[7], že $\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H}$ a proto také $\overline{H} \times \overline{H} \subseteq \mu^{-1}(\overline{H})$, tj. $\overline{H} \cdot \overline{H} \subseteq \overline{H}$. Společně s $\overline{H} \subseteq \nu^{-1}(\overline{H})$, tj. $\overline{H}^{-1} \subseteq \overline{H}$, to znamená, že $\overline{H}$ je grupa. Normálnost plyne podobným způsobem pomocí konjugací. □

Příklad 17.4.

dú 23 1. Dokažte, že Hausdorffovost topologické grupy plyne ze slabšího požadavku T_1, ve skutečnosti z uzavřenosti $\{e\}$. (Nápověda: jsou-li U, V dvě okolí e a x, y dva body G, pak $xU \cap yV = \emptyset$, právě když $x^{-1}y \notin U \cdot V^{-1}$.)

** 2. Každá topologická grupa je regulární topologický prostor.

Tvrzení 17.5. *Kvocient G/H topologické grupy G podle uzavřené normální podgrupy $H \subseteq G$ je topologická grupa. (Zde G/H je vybaven topolgií kvocientu.)*

Důkaz. Díky předchozímu příkladu stačí ukázat, že násobení a inverze na G/H jsou spojité, a že G/H je T_1. Označme $p\colon G \to G/H$ kanonickou projekci. Libovolný bod G/H je uzavřený, protože jeho vzor je třída $xH = \lambda_x(H)$.

Prvně si uvědomme, že projekce p je otevřená – pro libovolnou otevřenou $U \subseteq G$ je i $p(U) \subseteq G/H$ otevřená – je totiž $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{y \in U} yH = U \cdot H = \bigcup_{x \in H} Ux$.

Spojitost násobení plyne z následujícího diagramu

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, two heads, "p \times p"'] & G \arrow[d, two heads, "p"] \\ G/H \times G/H \arrow[r, dashed, "\mu'"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Je-li $W \subseteq G/H$ otevřená, je také $(\mu')^{-1}(W) = (p \times p)(\mu^{-1}(p^{-1}(W)))$ otevřená díky otevřenosti zobrazení $p \times p$. Spojitost inverze je podobná, ale jednodušší. □

Kvocient grupy G podle (uzavřené) *nenormální* podgrupy H je pouze množina, v našem případě Hausdorffův topologický prostor. Říkáme mu *homogenní prostor*. Homogenní prostory charakterizuje následující věta v případě kompaktní grupy G. Existuje i rozšíření této věty na lokálně kompaktní grupy, je však technicky náročnější.

Tvrzení 17.6. *Nechť G je kompaktní topologická grupa mající spojitou akci na Hausdorffově prostoru X. Potom zobrazení*

$$G/G_x \to G(x), \quad gG_x \mapsto gx$$

je homeomorfismus kvocientu G/G_x podle stabilizátoru x na orbitu $G(x)$ procházející x.

Důkaz. Spojitost zobrazení $G/G_x \to G(x)$ plyne z univerzální vlastnosti kvocientu. Protože je to zároveň bijekce a G/G_x je kompaktní a $G(x)$ Hausdorffův, je to homeomorfismus. □

Příklad 17.7.

cv 1. Ukažte, že $\mathrm{GL}_+(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ jsou souvislé. (To lze také ukázat přes $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \cong S^n$ a díky souvislosti S^n – k tomu se hodí, že projekce $\mathrm{SO}(n+1) \to S^n$ je otevřená.)

cv 2. $\mathrm{O}(n+1)/\,\mathrm{O}(n) \cong S^n$.

cv 3. $\mathrm{O}(n)/(\{E\} \times \mathrm{O}(n-k)) \cong V_k(\mathbb{R}^n)$.

cv 4. $\mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)) \overset{\text{def}}{=} G_k(\mathbb{R}^n)$.

Nechť G je lokálně kompaktní abelovská grupa a definujme $\Gamma = \widehat{G} = \mathsf{hom}(G, \mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}^G$, tj. prostor spojitých homomorfismů $G \to \mathbb{T}$ do komplexních jednotek $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Opět se jedná o lokálně kompaktní abelovskou grupu – její prvky se nazývají *charaktery*. Vezměme nyní druhý duál $\widehat{\Gamma}$. Existuje přirozené zobrazení

$$E\colon G \to \widehat{\Gamma}, \quad x \mapsto (\mathrm{ev}_x\colon \chi \mapsto \chi(x)).$$

Podstatou Pontryaginovy duality je, že E je izomorfismus topologických grup.

Příklad 17.8. Platí $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$.

Potom na G existuje míra μ definovaná na množině Borelovských podmnožin $E \subseteq G$, tj. nejmenší σ-algebře obsahující uzavřené množiny, s následujícími vlastnostmi

1. je regulární, $\mu(E) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq E \text{ kompaktní}\} = \inf\{\mu(U) \mid U \supseteq E \text{ otevřená}\}$,
2. je translačně invariantní, $\mu(xE) = \mu(E)$,
3. není identicky nulová.

Taková míra se nazývá Haarova míra, existuje a je jednoznačná až na násobek. V případě $G = \mathbb{R}$ je Lebesgueova míra Haarovou mírou. Pro obecné G se konstrukce Haarovy míry provádí následovně: zkonstruuje se vhodná spojitá lineární forma $C_c(G) \to \mathbb{C}$, kde $C_c(G)$ jsou funkce s kompaktním nosičem; podle Rieszovy reprezentační věty pak tato lineární forma odpovídá jediné míře, přičemž vlastnosti míry se odvodí z vlastností tohoto funkcionálu.

Definuje se potom Fourierova transformace

$$L^1(G) \to C(\Gamma), \quad \widehat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi}(x)\mathrm{d}\mu,$$

kde $L^1(G)$ je prostor absolutně integrabilních funkcí. Inverzní Fourierova transformace je dána

$$L^1(\Gamma) \to C(G), \quad \check{g}(x) = \int_\Gamma g(\chi)\chi(x)\mathrm{d}\nu,$$

kde ν je jistá „duální“ míra na Γ.

Tyto transformace jsou vůči sobě inverzní na prostoru funkcí absolutně integrabilních i se svým kvadrátem a zadávají izometrii

$$L^2(G) \xrightarrow{\cong} L^2(\Gamma)$$

(tzv. Plancherelova věta). Z těchto úvah plyne Pontryaginova dualita poměrně jednoduše.

——— konec 13. přednášky ———

** 18. Parakompaktní prostory

Definice 18.1. Nechť $\mathcal{U}$ je pokrytí prostoru X. Řekneme, že pokrytí $\mathcal{V}$ je *zjemněním* pokrytí $\mathcal{U}$, jestliže každý prvek $V \in \mathcal{V}$ leží v nějakém $U \in \mathcal{U}$.

[7] Platí, že $\overline{A \times B}$ je množina hromadných bodů $A \times B$, tj. těch (x, y), jejichž každé okolí protíná $A \times B$. Zjevně se stačí omezit na libovolnou bázi okolí, např. na okolí tvaru $U \times V$. Pak podmínka protínání $A \times B$ je přesně $A \cap U \neq \emptyset$ & $B \cap V \neq \emptyset$. To je ekvivalentní $x \in \overline{A}$ & $y \in \overline{B}$.

Řekneme, že pokrytí $\mathcal{V}$ je *lokálně konečné*, jestliže každé $x \in X$ má okolí $N \ni x$, které protíná pouze konečně mnoho $V \in \mathcal{V}$.

Řekneme, že Hausdorffův topologický prostor X je *parakompaktní*, jestliž každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečne otevřené zjemnění.

Lemma 18.2. *Sjednocení lokálně konečného systému uzavřených množin je uzavřené.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{F}$ je lokálně konečný systém uzavřených množin a $x \notin \mathcal{F}$. Potom nějaké jeho okolí $N \ni x$ protíná pouze konečně mnoho prvků $\mathcal{F}$ a tedy $N \cap \bigcup \mathcal{F}$ je uzavřená v N a neobsahující x, tedy $N \smallsetminus \bigcup \mathcal{F}$ je okolí x a $X \smallsetminus \bigcup \mathcal{F}$ je otevřená. □

Lemma 18.3. *Uzavřený podprostor parakompaktního prostoru je parakompaktní.*

Důkaz. podobný jako pro kompaktní. □

Tvrzení 18.4. *Každý parakompaktní prostor je normální.*

Důkaz. Dokážeme regulárnost, normálnost se pak dokáže stejně. Nechť $x \notin F$, kde $F \subseteq X$ je uzavřená. Pro každý $y \in F$ zvolme otevřené okolí $U_y \ni y$ takové, že $x \notin \overline{U_y}$; dostáváme tak otevřené pokrytí $\{U_y \mid y \in Y\}$ množiny F. Protože je tato parakompaktní podle předchozího lemmatu, existuje jeho lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{V}$. Potom $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} \overline{V}$ je uzavřené (díky lokální koečnosti) okolí (obsahuje $\bigcup \mathcal{V}$) množiny F, které neobsahuje x. □

Definice 18.5. *Nosič* spojité funkce $f\colon X \to \mathbb{R}$ je množina $\operatorname{supp} f = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\})}$.

Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí X. Řekneme, že systém funkcí $f_\lambda : X \to I$, $\lambda \in \Lambda$, je *rozklad jednotky* podřízený $\mathcal{U}$, jestliže je $\{\operatorname{supp} f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ lokálně konečné zjemnění $\mathcal{U}$ a platí $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda = 1$.

Součet v definici dává smysl, protože je systém nosičů lokálně konečný, tj. v okolí každého bodu je tento součet konečný. Ze stejného důvodu je takový součet vždy spojitá funkce.

Věta 18.6. *Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí parakompaktního prostoru X. Potom existuje rozklad jednotky podřízený $\mathcal{U}$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $\mathcal{U}$ je lokálně konečné pokrytí (případným přechodem ke zjemnění). Nechť $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ a zvolme na indexové množině Λ dobré uspořádání. Rozklad jednotky budeme konstruovat transfinitní indukcí. Zjevně stačí zkonstruovat systém funkcí f_λ takový, že $\operatorname{supp} f_\lambda \subseteq U_\lambda$ a $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda > 0$ – takový systém pak stačí normovat, tj. nahradit každou f_λ podílem f_λ / f.

Pro již zkonstruované funkce f_λ označme $V_\lambda = f_\lambda^{-1}(0,1]$. Indukcí budeme předpokládat, že pro $i < \lambda$ platí $\overline{V_i} \subseteq U_i$ a $\bigcup_{i<\lambda} V_i \cup \bigcup_{i \geq \lambda} U_i = X$. Z tohoto důvodu je

$$F_\lambda = \Big(\bigcap_{i<\lambda}(X \smallsetminus V_i) \cap \bigcap_{i>\lambda}(X \smallsetminus U_i)\Big) \subseteq U_\lambda$$

a $f_\lambda\colon X \to I$ volíme libovolně tak, že je 1 na F_λ a má nosič uvnitř U_λ – to je možné díky normálnosti X. Je jednoduché ověřit, že $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda > 0$, jak chceme. □

Platí, že každý lokálně kompaktní Hausdorffův prostor se spočetnou bází topologie je parakompaktní (důkaz není obtížný). Také každý metrický prostor je parakompaktní, důkaz tohoto tvrzení už je ale poměrně náročný.

nd

19. Uniformní prostory

Uniformní prostor je jiná abstrakce metrického prostoru. V topologickém prostoru umíme porovnat blízkost bodů k zadanému bodu x – jsou podobně blízko, když patří do nějakého okolí x. Neumíme však porovnat blízkost libovolných dvojic bodů tak, jako v metrickém prostoru. Základním „topologickým“ pojmem v tomto směru pak není spojité zobrazení, ale stejnoměrně spojité zobrazení. Formalizací tohoto pojmu jsou tzv. uniformní prostory.

Definice 19.1. Nechť X je množina. *Uniformita* na X je systém množin $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ splňující

1. $\forall U, V \in \mathcal{U} \colon U \cap V \in \mathcal{U}$,
2. $\forall U \in \mathcal{U}, \forall V \in \mathcal{P}(X \times X) \colon V \in \mathcal{U}$,
3. $\forall U \in \mathcal{U} \colon \Delta_X \subseteq U$,
4. $\forall U \in \mathcal{U} \colon U^{-1} \in \mathcal{U}$,
5. $\forall U \in \mathcal{U} \colon \exists V \in \mathcal{U} \colon V \circ V \subseteq U$.

Množinu X společně s uniformitou nazveme *uniformním prostorem.*

Protože je každé $U \in \mathcal{U}$ relací na X, budeme místo $(x, y) \in U$ psát xUy. První tři podmínky říkají, že $\mathcal{U}$ je v nějakém smyslu systém okolí Δ_X. Přesněji je to vyjádřeno v následující konstrukci. Nechť X je uniformní prostor a $x \in X$. Řekneme, že N je okolí bodu x, jestliže existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že N je rovno $xU = \{y \in X \mid xUy\}$.

Volme podle vlastnosti 5. posloupnost $U_n \in \mathcal{U}$ tak, že $U_0 = U$, $U_n \circ U_n \subseteq U_{n-1}$. Potom

$$V = U_1 \cup U_1U_2 \cup U_1U_2U_3 \cup \cdots$$

je prvek $\mathcal{U}$ (například proto, že obsahuje $U_1 \in \mathcal{U}$) a pro $y \in xV$ platí $xU_1 \cdots U_n y$ pro nějaké n a pak pro $z \in yU_{n+1}$ platí $xU_1 \cdots U_n y U_{n+1} z$, tedy xVz. Proto xV obsahuje s bodem y i jeho okolí yU_{n+1} a xV je tím pádem otevřená, přitom $xV \subseteq xU$.

Zabývejme se nyní vztahem uniformity $\mathcal{U}$ k indukované topologii na X podrobněji. Prvně ukážeme, že každé $U \in \mathcal{U}$ je okolím $\Delta_X \subseteq X \times X$ v součinové topologii. Nechť $(x, x) \in \Delta_X$. Zvolme V pomocí vlastností 4. a 5. tak, aby $V^{-1} \circ V \subseteq U$. Potom pro $(y, z) \in xV \times xV$ platí $yV^{-1}xVz \Rightarrow yUz$, tj. $(y, z) \in U$.

Příklad 19.2. Typickým příkladem uniformního prostoru je topologická grupa G. Nechť $N \ni e$ je okolí jednotky. Definujme příslušné okolí Δ_G jako $U_N = \{(x, y) \mid y^{-1}x \in N\}$. Poté položme $\mathcal{U} = \{U_N \mid N \ni e \text{ okolí jednotky}\}$.

Příklad 19.3. Nechť X je kompaktní Hausdorffův prostor. Definujme na X uniformitu pomocí systému *všech* okolí Δ_X. Jediný axiom, který není zřejmý je 5. Prvně si uvědomme, že díky normalitě tvoří uzavřená okolí bázi všech okolí Δ_X. Nechť tedy U je libovolné otevřené okolí Δ_X. Je jednoduché ukázat, že

$$\bigcap\{V \circ V \mid V \text{ je okolí } \Delta_X\} = \Delta_X,$$

pro každé $x \neq y$ stačí volit uzavřené okolí $N \supseteq \Delta_X$ neobsahující (x, y); pak pro $V = N \setminus (xN \times \{y\})$ platí $V \circ V \not\ni (x, y)$.

Jinými slovy sjednocení U a všech doplňků množin tvaru $V \circ V$ je celé $X \times X$. Díky kompaktnosti je $X \times X$ sjednocením U a konečně mnoha takových doplňku, neboli

$$(V_1 \circ V_1) \cap \cdots \cap (V_n \circ V_n) \subseteq U.$$

Položme $V = V_1 \cap \cdots \cap V_n$, pak $V \circ V \subseteq U$.

stejnoměrně spojité zobrazení, topologické grupy, kompaktní T_2, uniformizovatelnost je to samé co $T_{3\frac{1}{2}}$.