2 Poissonovo rozdělení $\text{Poiss}(\lambda)$

- X ... počet událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu, přičemž k událostem dochází náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. Střední počet těchto událostí je vyjádřen parametrem $\lambda > 0$
- $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$
- $\theta = \lambda$
- pravděpodobnostní funkce

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad x = 0, 1, \dots$$

- vlastnosti: $E[X] = \lambda$; $\text{Var}[X] = \lambda$
- dpois(x, lambda), ppois(x, lambda), rpois(x, lambda)
- Data:
  - **Dataset 2: Dělníci v továrně**
  - V rámci studie počtu úrazů v továrnách byl zaznamenán počet úrazů u každého dělníka v jedné vybrané továrně během roku 1920. Celkový počet dělníků zahrnutých do studie $M = 647$. Údaje ze studie jsou uvedeny v následující tabulce.

n	0	1	2	3	4	≥ 5	$\sum$
$m_{observed}$	447	132	42	21	3	2	647

  - **Dataset 3: Pruské armádní jednotky**
  - V rámci studie z roku 1898 byly zpracovávány počty smrtelných úrazů v pruských armádních jednotkách způsobené kopnutím koněm. Údaje o smrtelných úrazech po kopnutí koněm by zaznamenávány po dobu dvaceti let u deseti armádních jednotek. Počty úrazů v každé jednotce za jeden rok jsou uvedeny v následující tabulce. Rozsah náhodného výběru je $M = 200$ (10 jednotek $\times$ 20 let).

n	0	1	2	3	4	5+	$\sum$
$m_{observed}$	109	65	22	3	1	0	200

Příklad 2.1. Výpočet očekávaných početností za předpokadu Poissonova modelu
Vezměte údaje z **datasetu 2**. Vypočítejte očekávané početnosti výskytu úrazů u dělníků v továrně za předpokladu, že početnosti úrazů X mají Poissonovo rozdělení $\text{Poiss}(\lambda)$ s parametrem

$$\lambda = \frac{\sum_{n=0}^{N} n m_{observed}}{\sum_{n=0}^{N} m_{observed}}. \tag{2.1}$$

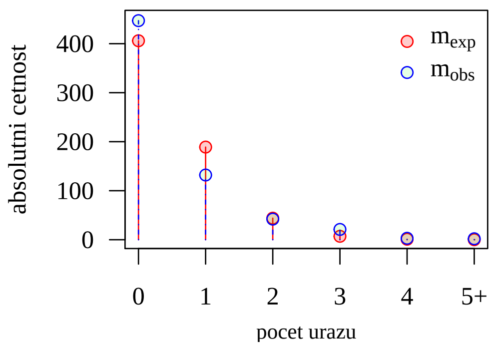
Řešení příkladu 2.1
Odhad parametru λ, tj. $\widehat{\lambda} = 0.4652$. Tabulka očekávaných početností $m_{expected}$ je

n	0	1	2	3	4	≥ 5	$\sum$
$m_{observed}$	447	132	42	21	3	2	647
$m_{expected}$	406	189	44	7	1	0	647

★

Příklad 2.2. Overdispersion a underdispersion v Poissonově modelu
V předchozím příkladu 2.1 jsme stanovili očekávané početnosti výskytu úrazů u dělníků v továrně. Do jednoho grafu zaneste nyní hodnoty pozorovaných početností $m_{observed}$ a hodnoty očekávaných početností $m_{expected}$. Pozorované a očekávané početnosti od sebe barevně odlište. Na základě výsledného grafu stanovte, zda došlo k overdisperzi nebo underdisperzi. Závěr podložte srovnáním rozptylu vypočítaného z pozorovaných dat s rozptylem vypočítaným z očekávaných dat.

Řešení příkladu 2.2



Obrázek 1: Porovnání pozorovaných a očekávaných početností v Poissonově modelu

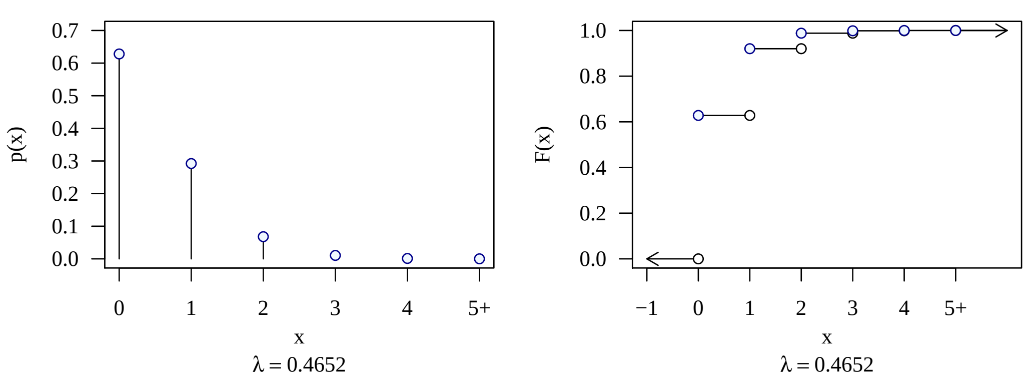
Oproti očekávaným početnostem jsou pozorované početnosti krajních případů vyšší a naopak pozorované početnosti nejčastějších případů (0, 1) jsou nižší. Tato situace ukazuje na vyšší rozptyl pozorovaných početností než očekávaných. Jde tedy o ....disperzi.

```
    Var.obs   Var.exp
1 0.6919002 0.4690953
```

Hodnota rozptylu získaného z pozorovaných dat vyšla 0.6919 (směrodatná odchylka vyšla 0.8318), hodnota rozptylu získaného z očekávaných dat vyšla 0.4691 (směrodatná odchylka vyšla 0.6849). Vidíme, že hodnoty rozptylů i směrodatných odchylek se liší již v pozici na prvním desetinném místě. Hodnota rozptylu vypočítaného z pozorovaných dat je přibližně 1.5-krát vyšší než hodnota rozptylu vypočítaného z očekávaných dat. ★

Příklad 2.3. Graf pravděpodobnostní a distribuční funkce Poissonova modelu
V příkladu 2.1 jsme odhadli hodnotu parametru λ Poissonova rozdělení Poiss(λ) jako $\widehat{\lambda} = 0.4652$. Nakreslete graf pravděpodobnostní a distribuční funkce Poissonova rozdělení Poiss(λ), kde $\lambda = 0.4652$, v hodnotách $x = 0, 1, 2, 3, 4$ a $x \geq 5$.

Řešení příkladu 2.3



Obrázek 2: Pravděpodobnostní a distribuční funkce Poissonova modelu ★

Příklad 2.4. Výpočet pravděpodobností na základě Poissonova modelu
Za předpokladu, že náhodná veličina X, udávající počet úrazů u dělníků v továrně, pochází z Poissonova rozdělení, tj. $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$, s parametrem $\lambda = 0.4652$, vypočítejte pravděpodobnost, že u náhodně vybraného dělníka dojde během jednoho roku k (a) nula úrazům; (b) třem nebo čtyřem úrazům; (c) nejvýše dvěma úrazům; (d) alespoň jednomu úrazu.

Řešení příkladu 2.4

```
          a          b         c         d
1 0.6280095 0.01176292 0.9881136 0.3719905
```

Pravděpodobnost, že u vybraného dělníka nedojde během roku k žádnému úrazu, je 62.80 %. Pravděpodobnost, že u vybraného dělníka dojde během roku k třem nebo čtyřem úrazům, je 1.18 %. Pravděpodobnost, že u vybraného dělníka dojde během roku k nejvýše dvěma úrazům, je 98.81 %. Pravděpodobnost, že u vybraného dělníka dojde během roku k alespoň jednomu úrazu, je 37.20 %. ★

Příklad 2.5. Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny z Poissonova modelu
Za předpokladu, že náhodná veličina X, udávající počet úrazů u dělníků v továrně, pochází z Poissonova rozdělení, tj. $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$, s parametrem $\lambda = 0.4652$, vypočítejte střední hodnotu $\mathrm{E}[X]$ a rozptyl $\mathrm{Var}[X]$ náhodné veličiny X. Střední hodnotu a rozptyl porovnejte s jejich odhady vypočítanými na (a) základě očekávaných dat; (b) na základě pozorovaných dat (viz příklad 2.1).

Řešení příkladu 2.5

```
     E.X  Var.X     E.exp   Var.exp     E.obs   Var.obs
1 0.4652 0.4652 0.4667697 0.4690953 0.4652241 0.6919002
```

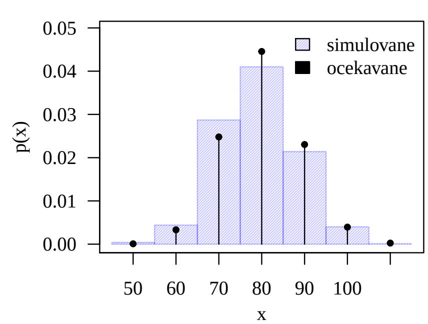
Střední hodnota počtu úrazů dělníků v továrně je 0.4652 s rozptylem 0.4652, odhad střední hodnoty počtu úrazů dělníků v továrně vypočítaný na základě očekávaných hodnot je 0.4668 s rozptylem 0.4691. Odhad střední hodnoty počtu úrazů dělníků v továrně vypočítaný na základě pozorovaných dat je 0.4652 s rozptylem 0.6919. ★

Příklad 2.6. Simulační studie: Součet náhodných veličin z Poissonova modelu

Věta 1. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$, jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny pocházenící z Poissonova rozdělení, tj. $X_i \sim \text{Poiss}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Potom náhodná veličina $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poiss}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$.

Na základě simulační studie ověřte platnost věty 1. Vygenerujte tři nezávislé náhodné veličiny $X_i \sim \text{Poiss}(\lambda_i)$, $i = 1$, 2, 3, kde $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 20$, $\lambda_3 = 50$. Pomocí simulační studie ($M = 1000$) ukažte, že $\sum_{i=1}^{3} X_i \sim \text{Poiss}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$. Součty $M = 1000$ náhodných veličin zobrazte pomocí histogramu (hranice třídicích intervalů nastavte tak, aby šířka každého intervalu byla rovná 10) a superponujte jej hodnotami pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Hodnoty pravděpodobnostní funkce vykreslete vždy ve středu každého třídicího intervalu.

Řešení příkladu 2.6



Obrázek 3: Porovnání rozdělení součtu $\sum_{i=1}^{3} X_i$, kde $X_i \sim \text{Poiss}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$, s rozdělením $\text{Poiss}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$

★

Příklad 2.7. Aproximace binomického modelu Poissonovým modelem
Poissonův model Poiss(λ) je limitním případem binomického modelu Bin(N, p), tj. pro $N \to \infty$, $p \to 0$, $Np \to \lambda$ platí

$$X \sim \mathrm{Bin}(N,p) \to X \sim \mathrm{Poiss}(\lambda).$$

Odvoďte vztah aproximace binomického modelu Poissonovým rozdělením.

Řešení příkladu 2.7

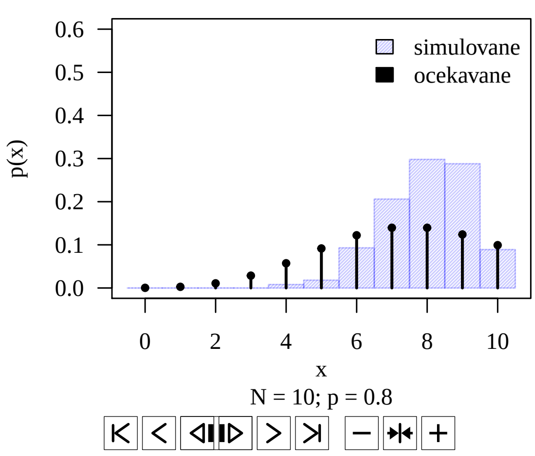
$$\begin{aligned}\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x} &= \frac{N!}{x!(N-x)!}p^x(1-p)^N(1-p)^{-x}\frac{N^x}{N^x} = \\ &= \frac{(Np)^x}{x!}\left(1-\frac{Np}{N}\right)^N(1-p)^{-x}\frac{N!}{(N-x)!N^x} = \\ &= \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\end{aligned}$$

protože $\lim_{Np\to\lambda}(Np)^x = \lambda^x$, $\lim_{Np\to\lambda,N\to\infty}\left(1-\frac{Np}{N}\right)^N = e^{-\lambda}$, $\lim_{p\to 0}(1-p)^{-x} = 1$, $\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{(N-x)!N^x} = 1$. ★

Příklad 2.8. Aproximace binomického modelu Poissonovým modelem
Jak jsme si ukázali v příkladu 2.7, Poissonovo rozdělení je limitním případem binomického rozdělení pro $N \to \infty$, $p \to 0$ a $Np \to \lambda$. Pomocí simulační studie ověříme toho tvrzení. Vygenerujte pseudonáhodná čísla X (četnosti úspěchů) opakovaná M-krát ($M = 1000$) z Bin(N, p), kde $N = 10$ a $p = 0.2$. Vykreslete histogram vygenerovaných pseudonáhodných čísel a superponujte jej hodnotami očekávaných početností za předpokladu $X \sim$ Poiss(λ), kde $\lambda = Np = 5 \times 0.2 = 1$.

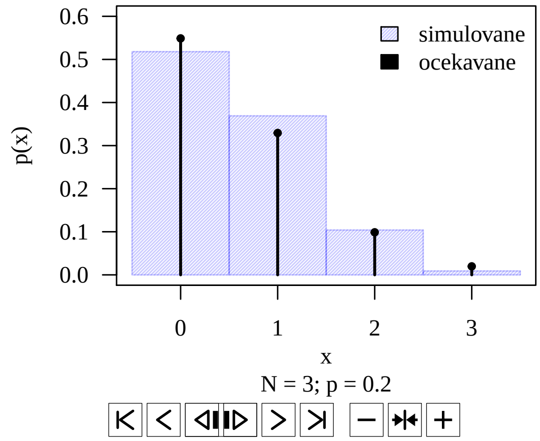
1. Pomocí animace ukažte, jak se s $p \to 0$ zlepšuje aproximace binomického rozdělení Poissonovým rozdělením. Hodnotu parametru N zvolte pevně $N = 10$ a za p dosazujte hodnoty 0.8, 0.75, 0.7, ..., 0.05.
2. Pomocí animace ukažte, jak se s $N \to \infty$ zlepšuje aproximace binomického rozdělení Poissonovým rozdělením. Hodnotu parametru p zvolte pevně $p = 0.2$ a za hodnoty parametru N dosazujte $N = 3, 4, 5, \ldots, 23, 24, 25, 30, 40, 50$.

Řešení příkladu 2.8



Obrázek 4: Aproximace binomického rozdělení Poissonovým rozdělením pro $p \to 0$

★



Obrázek 5: Aproximace binomického rozdělení Poissonovým rozdělením pro $N \to \infty$

Příklad 2.9. Výpočet očekávaných početností za předpokladu Poissonova modelu
Vezměte údaje z **datasetu 3**. Vypočítejte očekávané početnosti výskytu smrtelných úrazů způsobených kopnutím koněm za předpokladu, že početnosti úrazů X mají Poissonovo rozdělení Poiss(λ) s parametrem

$$\widehat{\lambda} = \frac{\sum_{n=0}^{N} n m_{observed}}{\sum_{n=0}^{N} m_{observed}}. \tag{2.2}$$

Řešení příkladu 2.9
Odhad parametru λ, tj. $\widehat{\lambda} = 0.61$. Tabulka očekávaných početností $m_{expected}$ je

n	0	1	2	3	4	≥ 5	$\sum$
$m_{expected}$	109	66	20	4	1	0	200

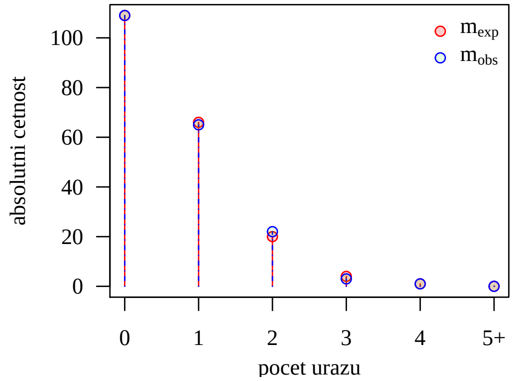
★

Příklad 2.10. Overdispersion a underdispersion v Poissonově modelu
V předchozím příkladu 2.9 jsme stanovili očekávané početnosti výskytu smrtelných úrazů v pruských armádních jednotkách. Do jednoho grafu zaneste hodnoty pozorovaných početností $m_{observed}$ a hodnoty očekávaných početností $m_{expected}$. Pozorované a očekávané početnosti od sebe barevně odlište. Na základě výsledného grafu stanovte, zda došlo k overdisperzi nebo underdisperzi. Závěr podložte srovnáním rozptylu vypočítaného z pozorovaných dat s rozptylem vypočítaným z očekávaných dat.

Řešení příkladu 2.10
Z tabulky očekávaných početností a z grafu vidíme, že očekávané početnosti se od pozorovaných příliš neliší. V tomto případě tedy nedochází ani k overdisperzi, ani k underdisperzi. Naše tvrzení podpoříme srovnáním rozptylu vypočítaného z porozovaných dat s rozptylem vypočítaným z očekávaných dat.

```
    Var.obs  Var.exp
1 0.6109548 0.621005
```

Hodnota rozptylu získaného z pozorovaných dat vyšla 0.6110, hodnota rozptylu získaného z očekávaných dat vyšla 0.6210. Vidíme, že hodnoty rozptylů se liší v pozici na druhém desetinném místě, hodnoty směrodatných odchylek se liší v pozici na třetím desetinném místě.



Obrázek 6: Porovnání pozorovaných a očekávaných početností v Poissonově modelu

★