Riemannova zeta $\zeta(s)$ je komplexní funkce definovaná pomocí nekonečné

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pro $s \in \mathbb{C}$ splňující $\mathrm{Re}(s) > 1$.

---

$\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$ Řekneme, že posloupnost $f_n$ konverguje stejnoměrně k $f : M \to \mathbb{C}$ jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $z \in M$ a každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ platí $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.
Řekneme, že posloupnost funkcí $f_n$ konverguje skoro stejnoměrně na množině $M$, když konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině.

Tvrzení (Weierstrassova věta)

$\Omega$ je otevřená

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Je-li $\{f_n\}$ posloupnost holomorfních funkcí $\Omega \to \mathbb{C}$ taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje skoro stejnoměrně na $\Omega$ k součtu $f : \Omega \to \mathbb{C}$, pak $f$ je holomorfní funkce a pro každé $k \in \mathbb{N}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ konverguje skoro stejnoměrně na $\Omega$ k funkci $f^{(k)}(z)$.

$$f_n(s) = n^{-s} = e^{\ln n \cdot (-s)}$$

je holomorfní funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože

$$|f_n(s)| = n^{-\mathrm{Re}(s)},$$

je jasné, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$$

konverguje absolutně pro $Re(s)>1$. Funkce $f_n$ jsou holomorfní na $\mathbb{C}$, a tedy i na $\Omega = \{s \in \mathbb{C}, Re(s)>1\}$. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$$

konverguje skoro stejnoměrně na množině $\Omega$.

<u>Věta</u> (Analytické prodloužení)
Existuje celá funkce $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že pro libovolné $s$ splňující $Re(s)>1$ platí

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s),$$

tj. funkci $\zeta(s)$ lze prodloužit na funkci, která je všude holomorfní s výjimkou jedničky, kde má jednoduchý pól a reziduum 1.

<u>Věta</u> (Funkcionální rovnice) Riemannova zeta funkce splňuje následující rovnost

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s),$$

kde $\Gamma(z)$ je analytické prodloužení funkce definované pro $Re(z)>0$ následujícím způsobem

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$s = -2k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \zeta(s) = 0$$

Platí $\lim_{s \to 1} (s-1) \cdot \zeta(s) = 1$

$$-1 = \lim_{s \to 1} (1-s) \cdot \zeta(s) = \lim_{s \to 1} (1-s)\, 2^s \pi^{s-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s),$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{s \to 1} (1-s)\, \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s)$$

$$= 2 \cdot \Gamma(1) \cdot \zeta(0)$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Věta (Eulerův součin)

Pro $Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1},$$

kde součin konverguje absolutně.

Pozn. Nekonečný součin se nazývá konvergentní ve dvou případech

1. existuje nenulová limita posloupnosti částečných součinů
2. posloupnost obsahuje pouze konečně mnoho nulových členů, jejichž vynecháním vznikne nekonečný součin splňující první podmínku.