

Motivační úloha

M8230

15. září 2022



Růst homogenní populace



Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách



Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

$$x(t + 1) = x(t) + bx(t) - dx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1]$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

$$x(t + 1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1]$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

$$x(t + 1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1]$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

$$x(t + 1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1]$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

$$x(t + 1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1]$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

$$x(t + 1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1]$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Rekurentní formule pro geometrickou posloupnost



Thomas R. Malthus 1766–1834

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

$$x(t + 1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1]$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t + 1) = rx(t)$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$



Thomas R. Malthus 1766–1834

Růst homogenní populace

$x(t)$ – velikost populace v čase t , který plyne v „přirozených“ jednotkách

$$x(t + 1) = x(t) + \text{narození} - \text{uhynulí}$$

$$x(t + 1) = x(t) + bx(t) - dx(t) = (1 + b - d)x(t) = rx(t)$$

d – úmrtnost (pravděpodobnost úmrtí během časové jednotky), $d \in (0, 1]$

b – porodnost (průměrný počet potomků jedince), $b \geq 0$

$r = 1 + b - d$ – růstový koeficient, $r \geq 0$

$$x(t + 1) = rx(t)$$

$x(0) = x_0$ – počáteční velikost populace

$$x(t) = x_0 r^t$$

$$\begin{cases} r > 1, \text{ tj. } b > d, & \text{populace roste} \\ r = 1, \text{ tj. } b = d, & \text{populace má konstantní velikost} \\ r < 1, \text{ tj. } b < d, & \text{populace vymírá} \end{cases}$$



Thomas R. Malthus 1766–1834

Růst homogenní populace

$$x(t + 1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$



Růst homogenní populace

$$x(t + 1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

růstový koeficient

$$r = \frac{x(t + 1)}{x(t)}$$

Růst homogenní populace

$$x(t + 1) = rx(t), \quad x(0) = x_0$$

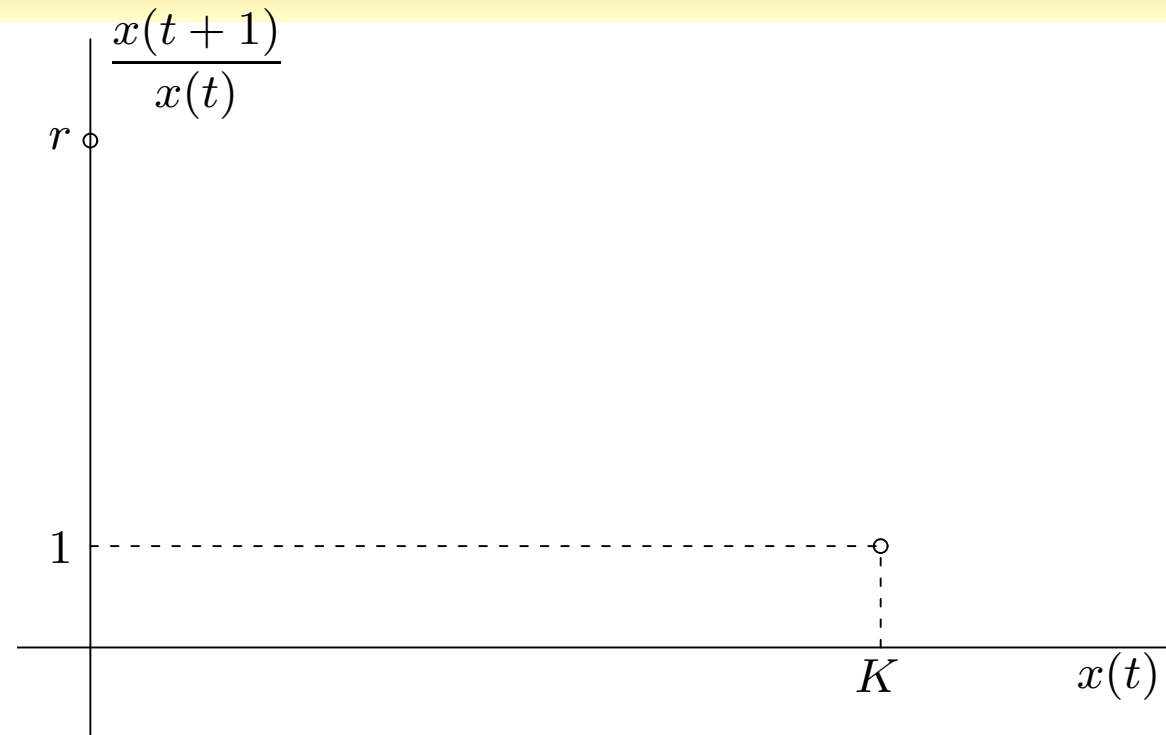
růstový koeficient

$$r = \frac{x(t + 1)}{x(t)}$$

závisí na velikosti populace

$$r = r(x(t))$$

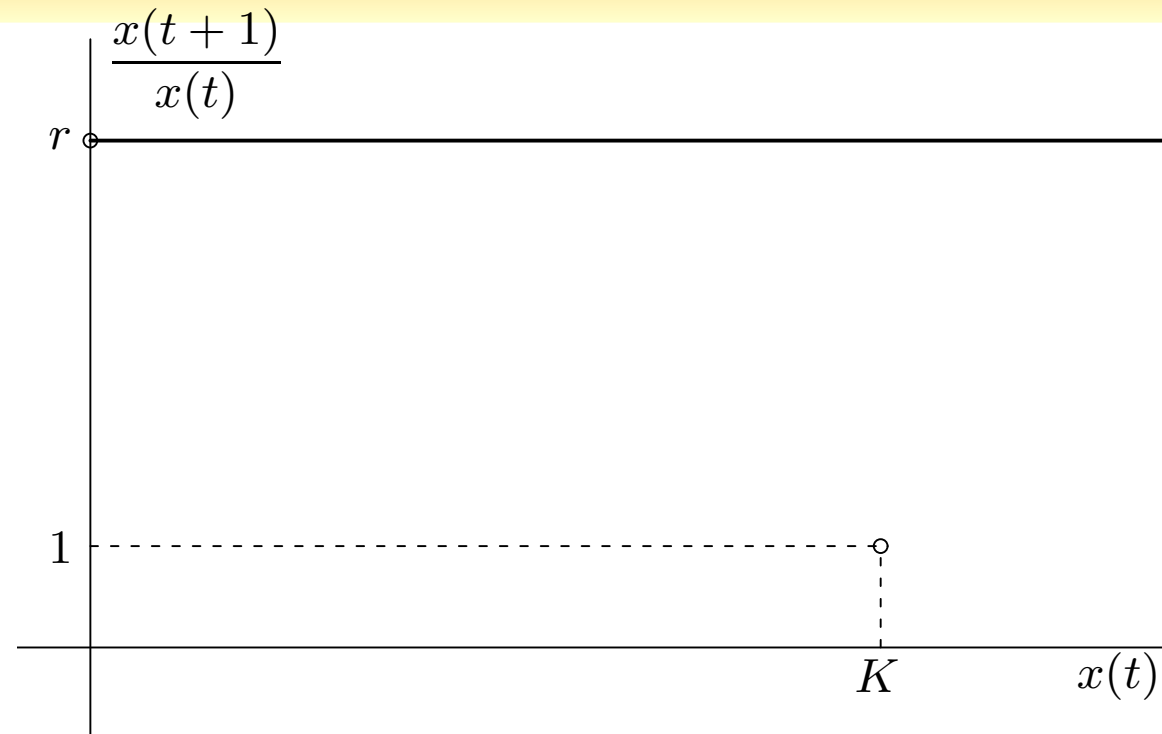
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t + 1) = rx(t)$$



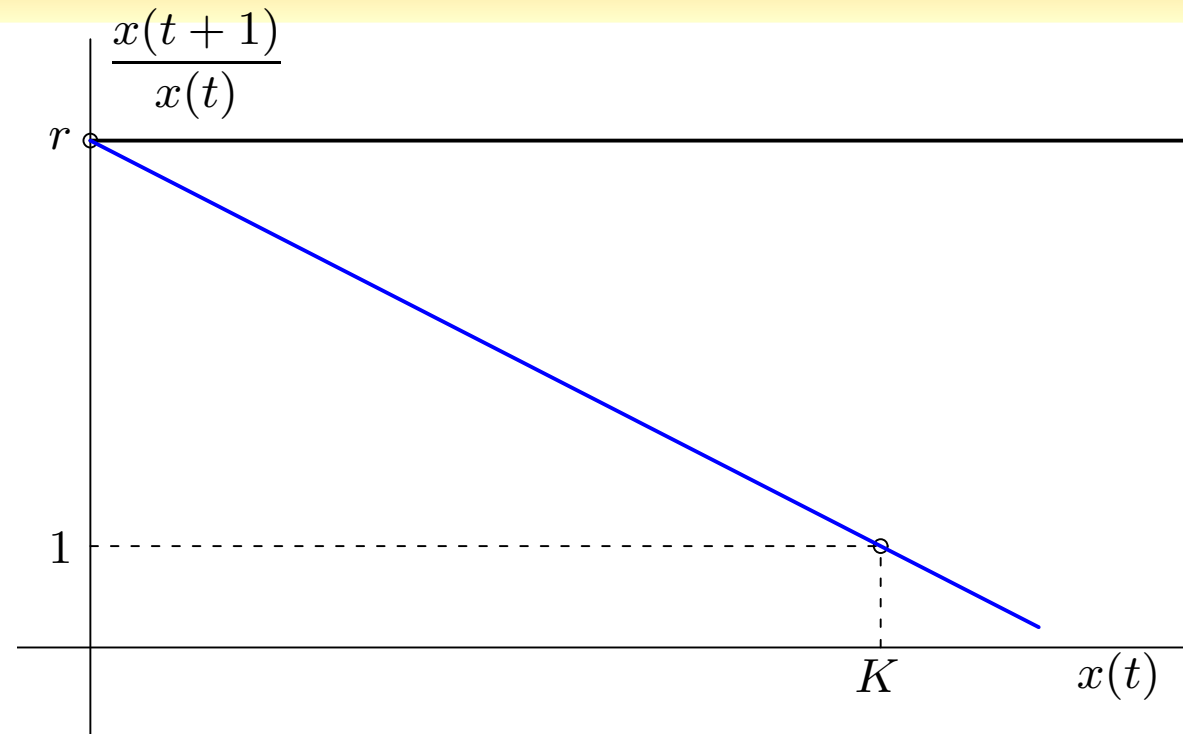
Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t + 1) = \left(r - (r - 1) \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

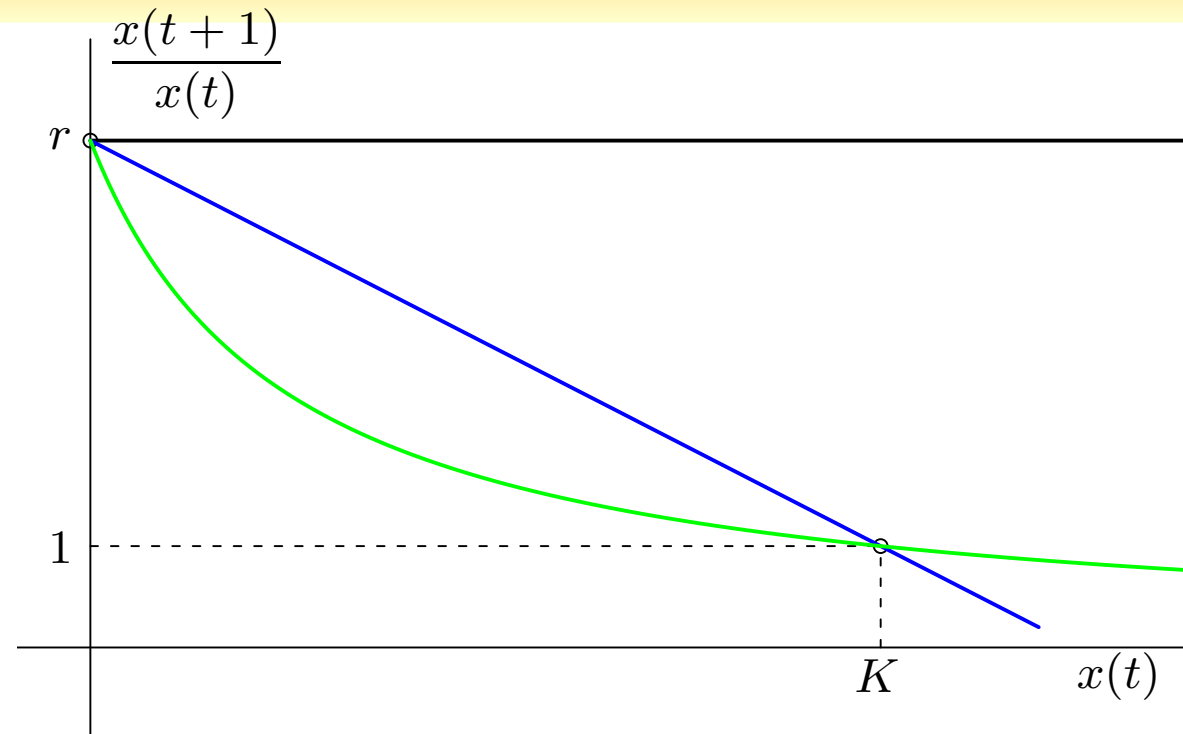
$$x(t + 1) = rx(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t + 1) = \left(r - (r - 1) \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t + 1) = \frac{r}{1 + (r - 1) \frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t + 1) = rx(t)$$

Maynard Smith, May:

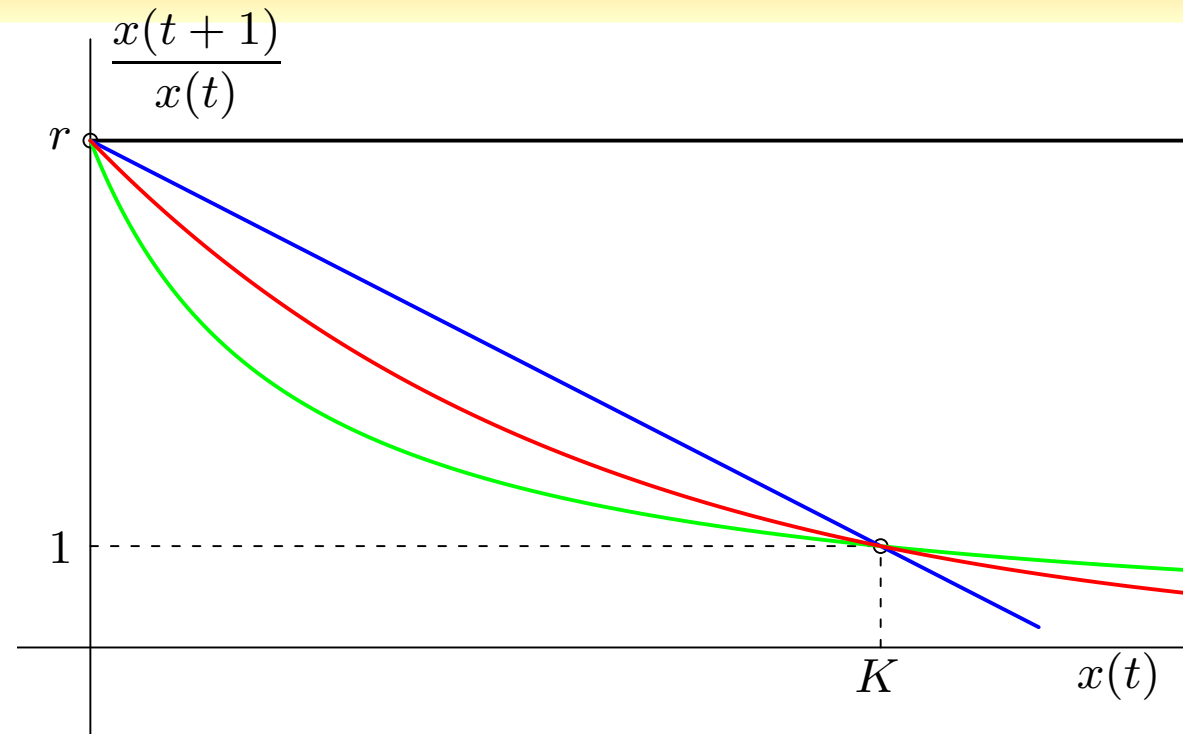
$$x(t + 1) = \left(r - (r - 1) \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t + 1) = \frac{r}{1 + (r - 1) \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Ricker:

$$x(t + 1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t + 1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r - 1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

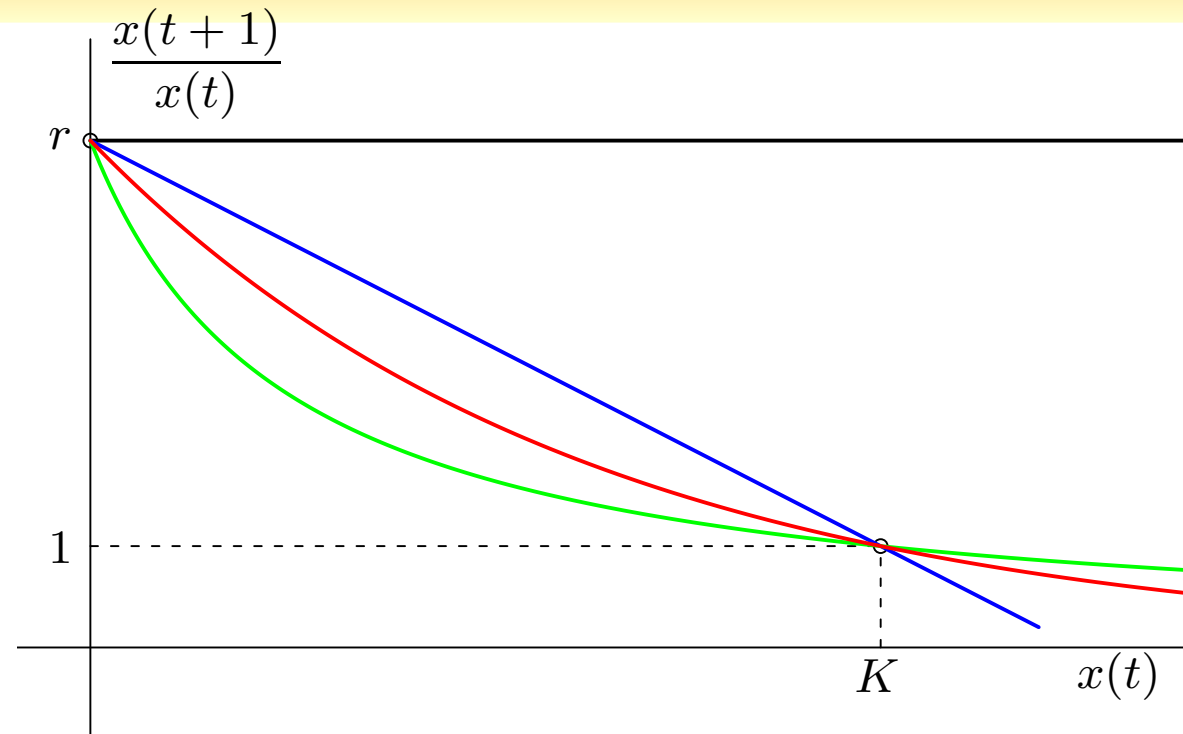
$$x(t + 1) = \left(r - (r - 1) \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t + 1) = \frac{r}{1 + (r - 1) \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Ricker:

$$x(t + 1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t + 1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r - 1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t + 1) = \left(r - (r - 1) \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

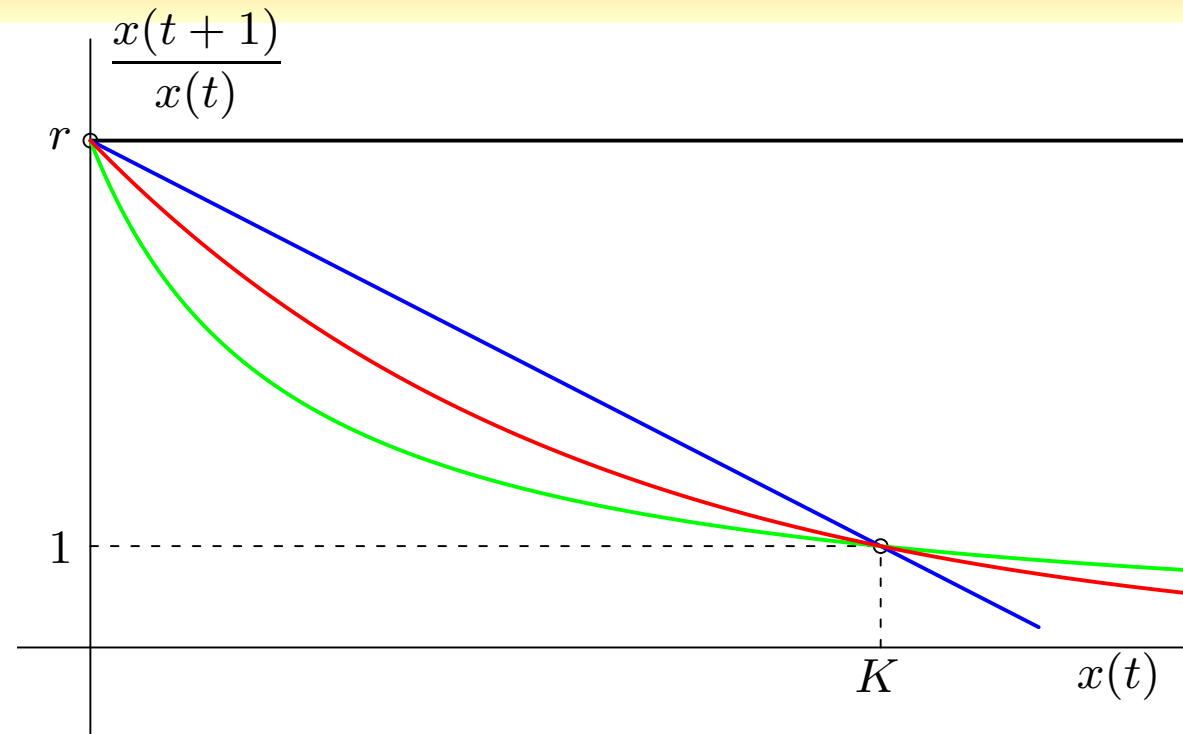
$$\Delta x(t) = (r - 1) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t + 1) = \frac{r}{1 + (r - 1) \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

Ricker:

$$x(t + 1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t + 1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r - 1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t + 1) = \left(r - (r - 1) \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r - 1) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

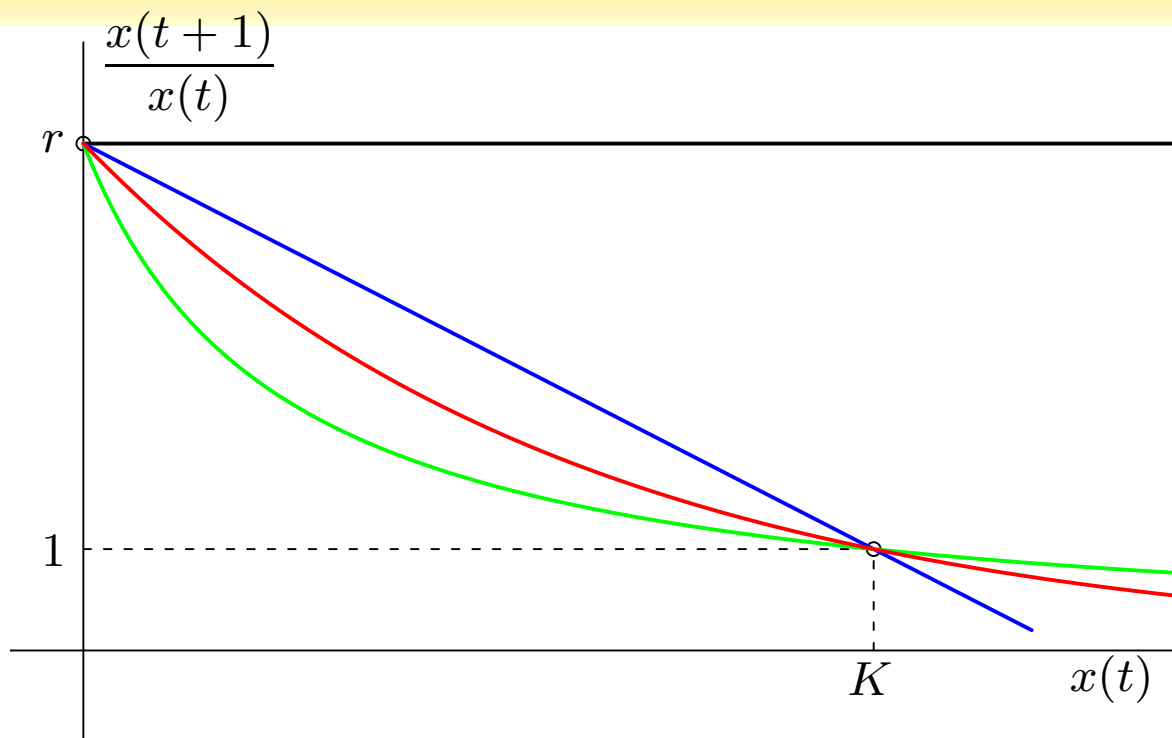
Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t + 1) = \frac{r}{1 + (r - 1) \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{(r - 1)}{1 + (r - 1) \frac{x(t)}{K}} \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Ricker:

$$x(t + 1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t + 1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r - 1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t + 1) = \left(r - (r - 1) \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r - 1) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

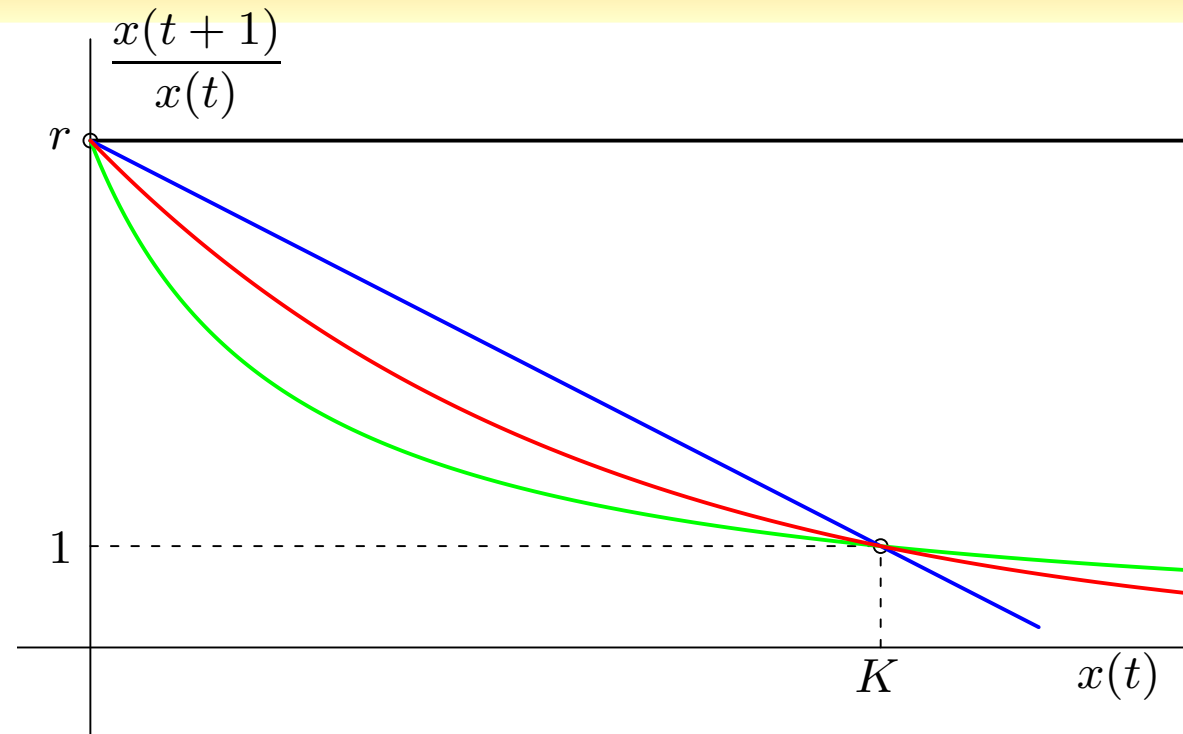
Beverton-Holt, Pielou:

$$x(t + 1) = \frac{r}{1 + (r - 1) \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r - 1}{r} \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t + 1)$$

Ricker:

$$x(t + 1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t+1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t+1) = \left(r - (r-1)\frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r-1) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

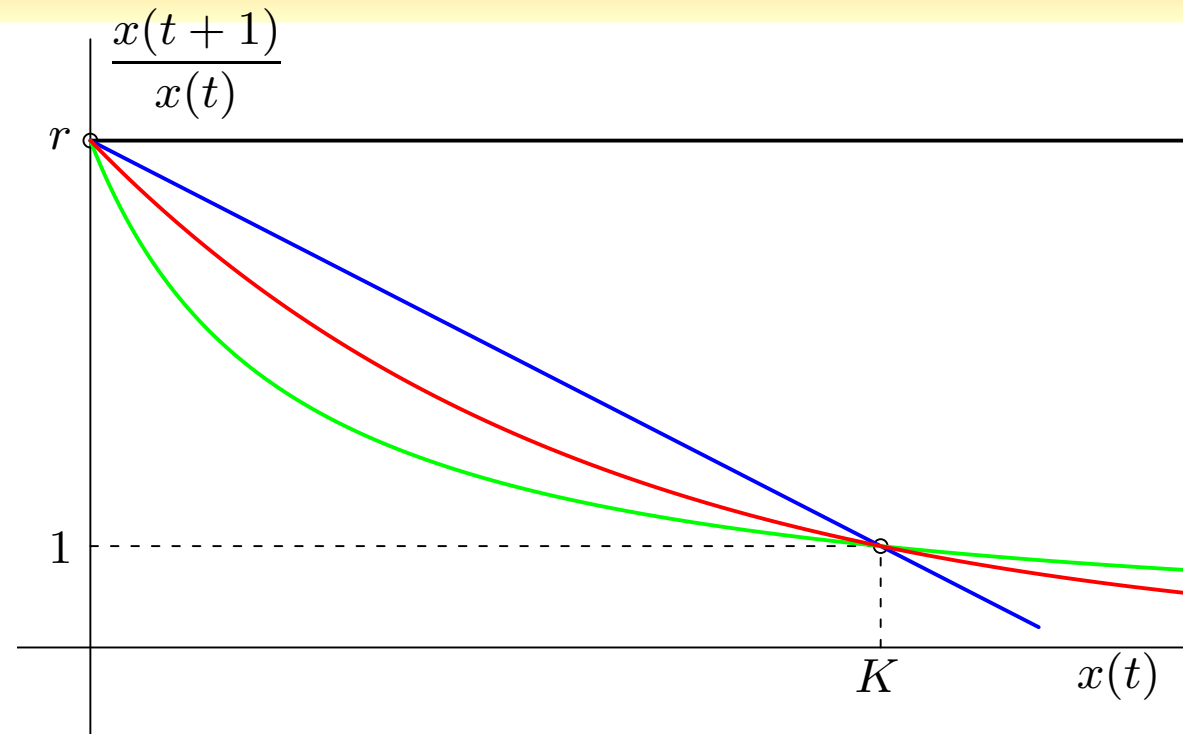
$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1)\frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{r} \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t+1)$$

Ricker:

$$x(t+1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \left(r^{1 - \frac{x(t)}{K}} - 1 \right) x(t)$$





Růst homogenní populace s omezenými zdroji

Malthus:

$$x(t + 1) = rx(t)$$

$$\Delta x(t) = (r - 1)x(t)$$

Maynard Smith, May:

$$x(t + 1) = \left(r - (r - 1) \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

$$\Delta x(t) = (r - 1) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

Beverton-Holt, Pielou:

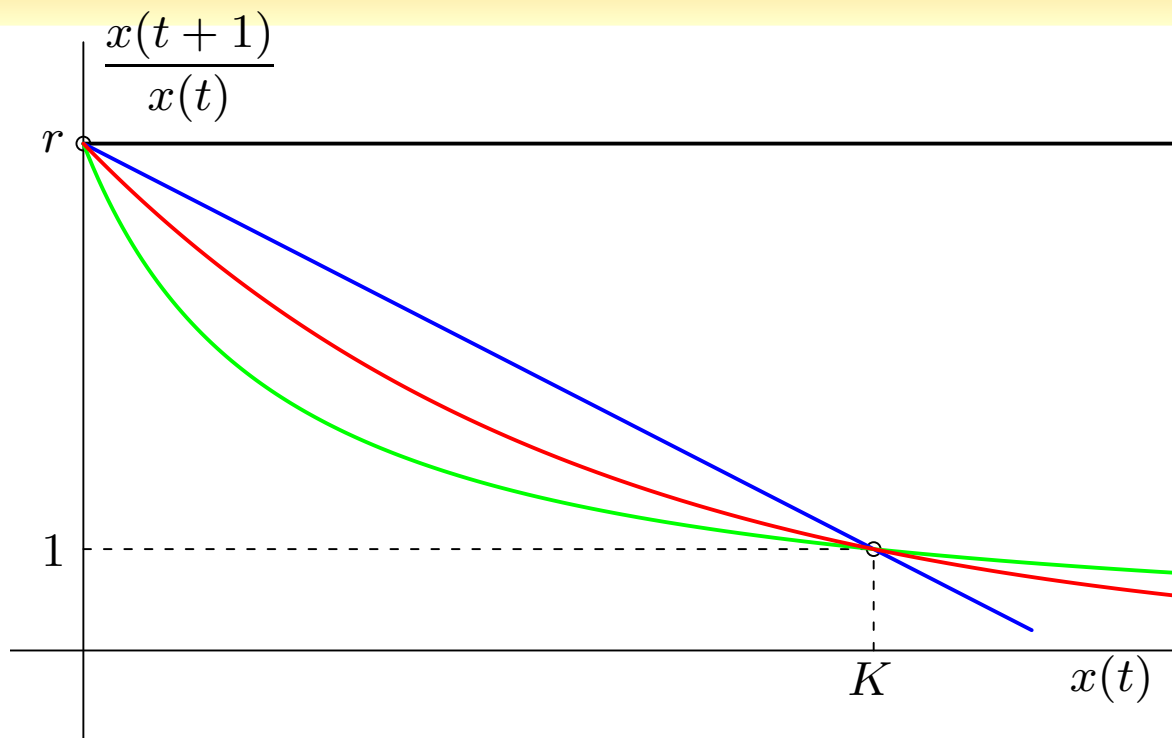
$$x(t + 1) = \frac{r}{1 + (r - 1) \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r - 1}{r} \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t + 1)$$

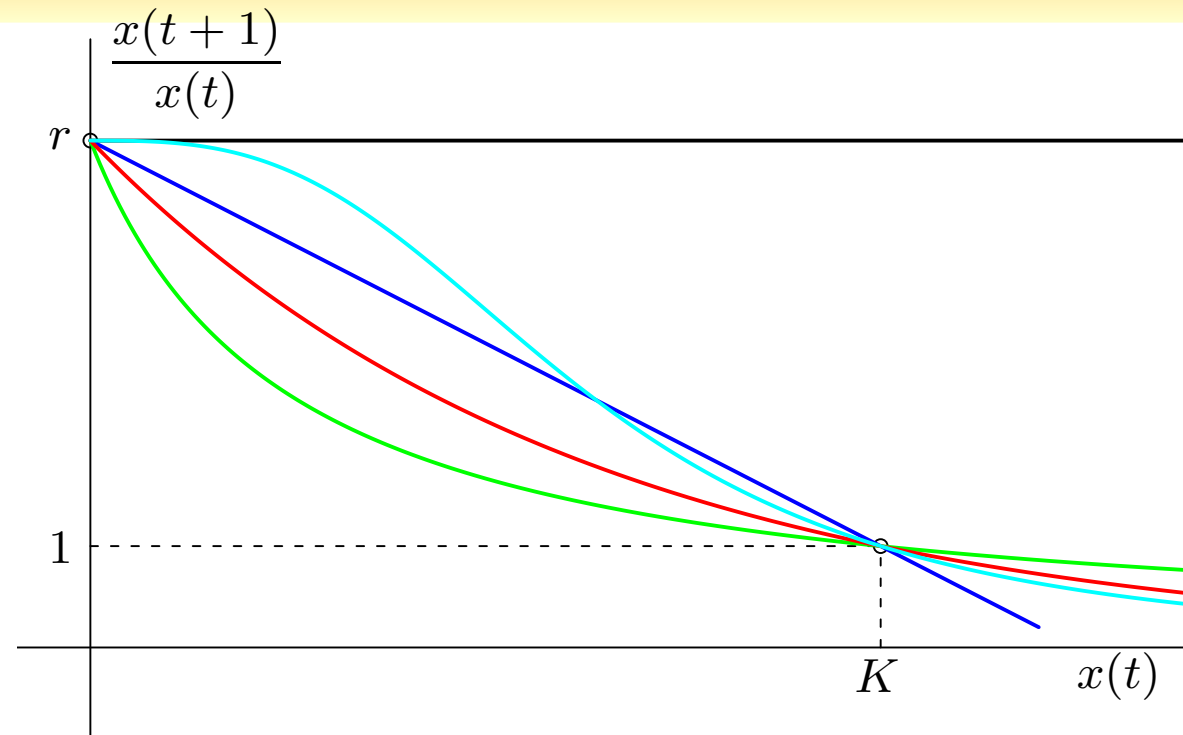
Ricker:

$$x(t + 1) = r^{1 - \frac{x(t)}{K}} x(t)$$

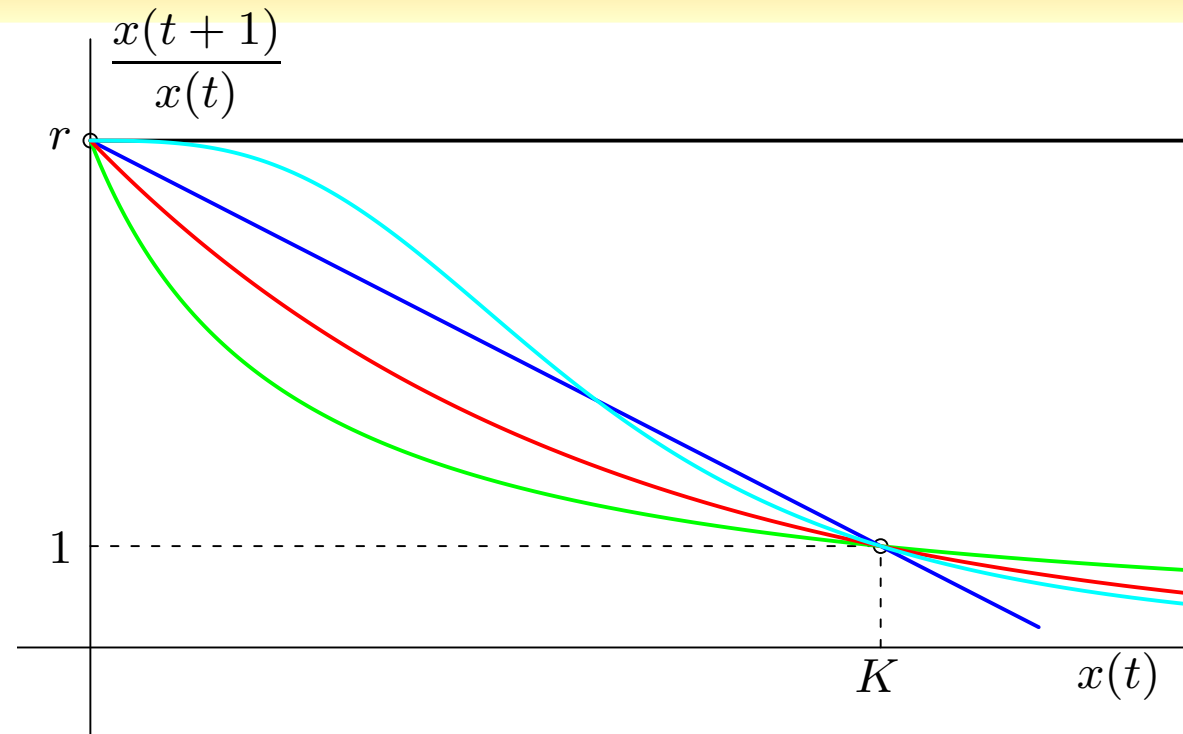
$$\Delta x(t) = \left(r^{1 - \frac{x(t)}{K}} - 1 \right) x(t)$$



Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Růst homogenní populace s omezenými zdroji

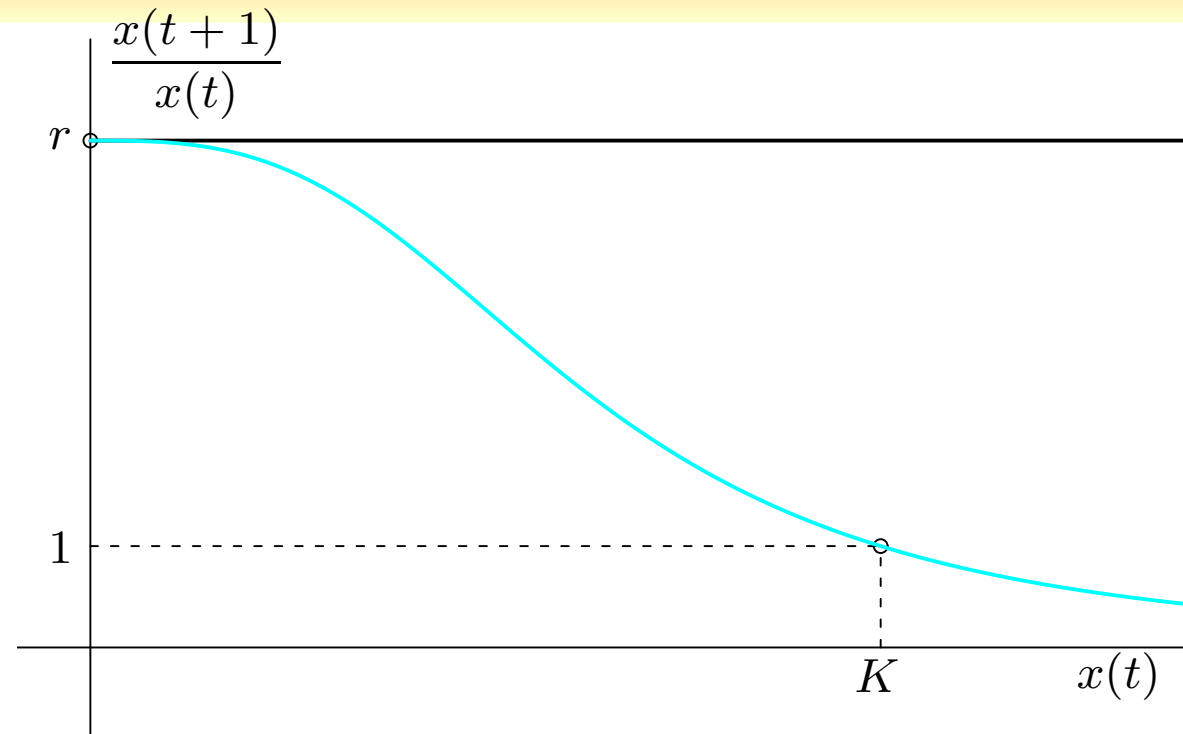


Základní rovnice:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1) \left(\frac{x(t)}{K}\right)^\beta} x(t)$$

$$\Delta x(t) = \frac{r-1}{1 + (r-1) \left(\frac{x(t)}{K}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x(t)}{K}\right)^\beta\right) x(t) = \frac{r-1}{r} \left(1 - \left(\frac{x(t)}{K}\right)^\beta\right) x(t+1)$$

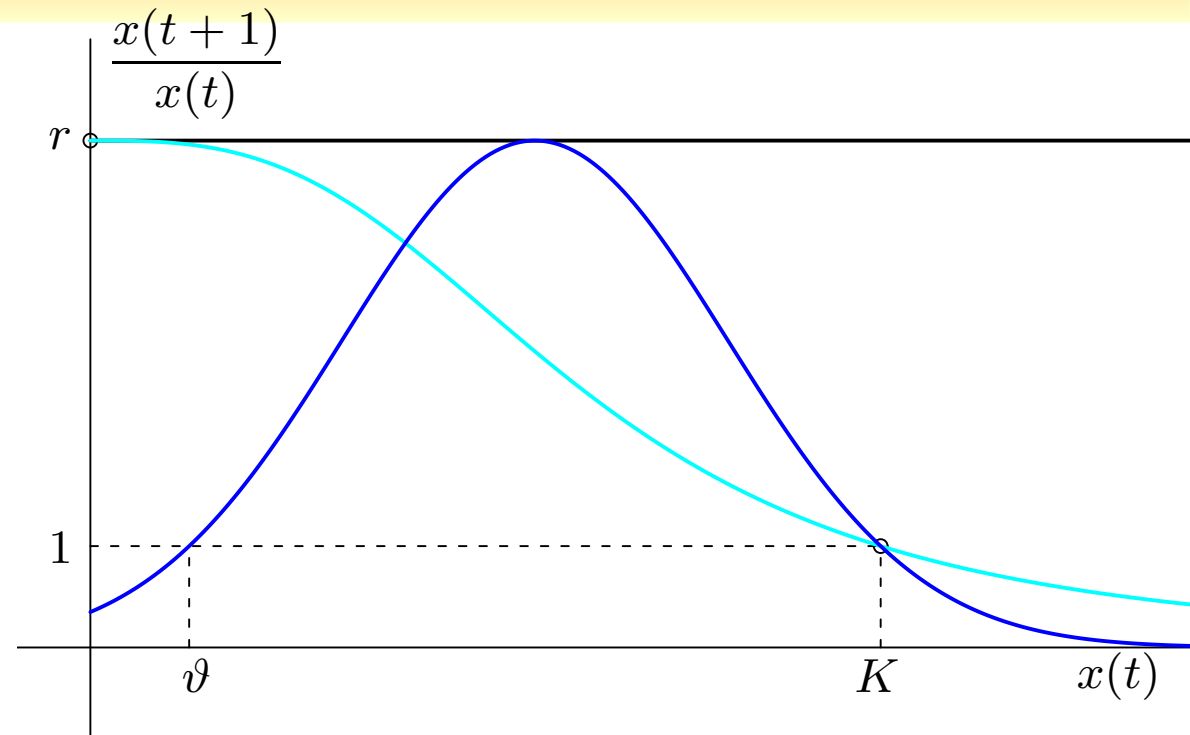
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Rovnice se zpožděním:

$$x(t+1) = \frac{r}{1 + (r-1) \left(\frac{x(t-k)}{K} \right)^\beta} x(t)$$

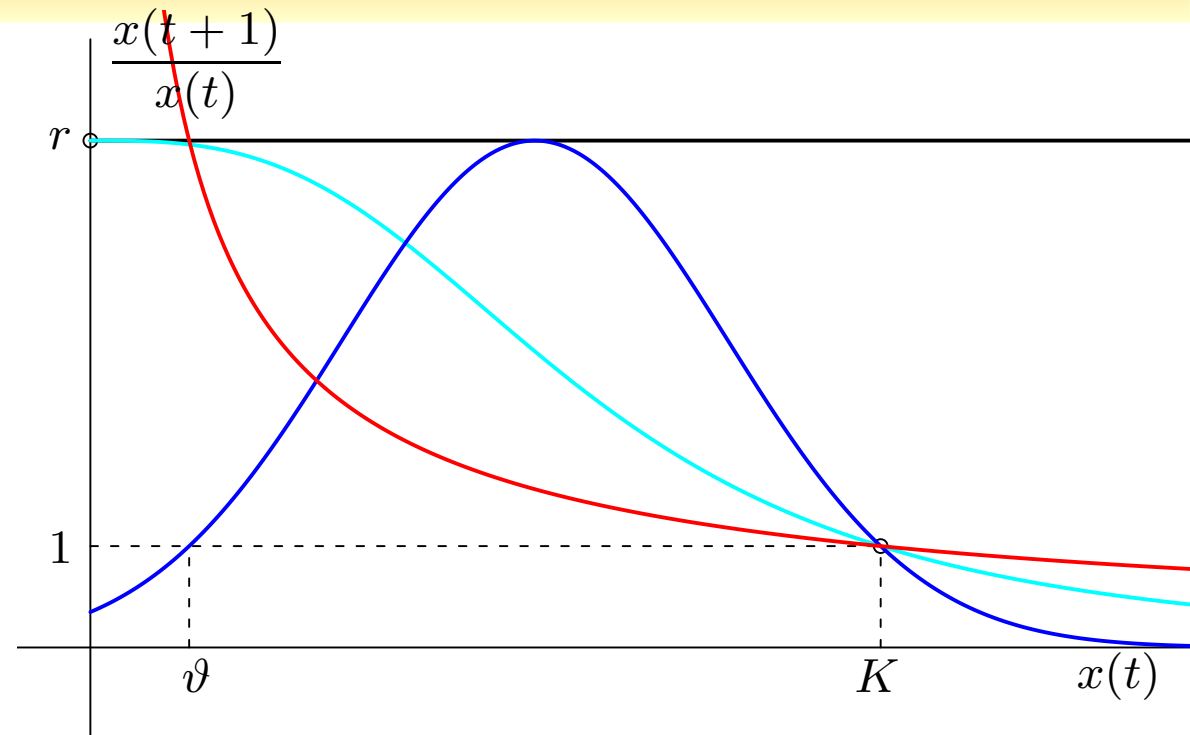
Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Allee:

$$x(t+1) = r \frac{4K}{(K-\vartheta)^2} \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x-\vartheta) x(t)$$

Růst homogenní populace s omezenými zdroji



Gompertz:

$$x(t+1) = \left(r x(t)^{-\frac{\ln r}{\ln K}} \right) x(t)$$