Metody řešení diferenčních rovnic

Obsah

Kapitola 1

Rovnice řešitelné sumací

Řešením diferenční rovnice je posloupnost, která tuto rovnici splňuje. Proto se budeme nejdříve zabývat posloupnostmi (definovanými poněkud obecněji než v základním kursu matematické analýzy) a některými operacemi s nimi. Dvě z těchto operací (diference a sumace) jsou analogiemi operací derivace a integrace funkce, další (posun a součin) u funkcí analogie nemají. Dosažené výsledky umožní řešení nejjednodušších diferenčních rovnic, tj. rovnic tvaru $\Delta x = b$, kde b je známá posloupnost a x je hledaná posloupnost.

1.1 Posun, diference, antidiference, suma

Intervalem celých čísel rozumíme libovolnou z množin

$$\{p, p+1, p+2, \dots, q-1, q\},$$

$$\{p, p+1, p+2, \dots\}, \quad \{\dots, q-2, q-1, q\}, \quad \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

kde $p, q \in \mathbb{Z}$, $p < q$. Pro interval I celých čísel klademe $I^\kappa = I \setminus \max I$. To znamená, že

$$\{p, p+1, p+2, \dots, q-1, q\}^\kappa = \{p, p+1, p+2, \dots, q-2, q-1\},$$

$$\{\dots, q-2, q-1, q\}^\kappa = \{\dots, q-3, q-2, q-1\}$$

a v ostatních případech $I^\kappa = I$.

Uvažujme posloupnost a, tj. zobrazení intervalu I celých čísel do čísel reálných, $a : I \to \mathbb{R}$. Členy této posloupnosti budeme zapisovat standardním symbolem $a(t)$ jako hodnotu posloupnosti a v indexu (nezávisle proměnné) t. Definiční obor posloupnosti a označíme $\operatorname{Dom} a$.

Pro každou posloupnost a a index $t \in (\operatorname{Dom} a)^\kappa$ klademe

$$a^\sigma(t) = a(t+1).$$

Posloupnost a^σ se nazývá *posun* (podrobněji *posun vpřed*, anglicky *shift*) *posloupnosti* a.

Algebraická poznámka: Označme $\mathcal{P}_I$ množinu posloupností definovaných na intervalu I. Tato množina tvoří vektorový prostor. Sčítání v něm je standardním součtem posloupností, násobení skalárem je násobení posloupnosti reálným číslem,

$$(a+b)(t) = a(t) + b(t), \quad (\alpha a)(t) = \alpha a(t) \quad \text{pro } a, b \in \mathcal{P}_I,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Posun lze „globálně“ chápat jako zobrazení množiny posloupností se stejným definičním oborem do (obecně jiné) množiny posloupností, konkrétněji jako zobrazení množiny $\mathcal{P}_I$ do množiny $\mathcal{P}_{I^\kappa}$,

$$\cdot^\sigma : \mathcal{P}_I \to \mathcal{P}_{I^\kappa}.$$

Poněvadž pro libovolné dvě posloupnosti s definičním oborem I a libovolné reálné konstanty α, β platí

$$(\alpha a + \beta b)^\sigma(t) = (\alpha a + \beta b)(t+1) = \alpha a(t+1) + \beta b(t+1) = \alpha a^\sigma(t) + \beta b^\sigma(t),$$

je zobrazení $\cdot^\sigma$ lineární.

Diference posloupnosti a je posloupnost, označená Δa, definovaná vztahem

$$\Delta a(t) = a(t+1) - a(t).$$

Diference i posun posloupnosti a jsou definovány na množině $(\operatorname{Dom} a)^\kappa$. Vztah posunu a diference posloupnosti je zřejmý,

$$\Delta a = a^\sigma - a.$$

Pro libovolné posloupnosti a, b se stejným definičním oborem, pro libovolné reálné konstanty α, β a každý index $t \in (\operatorname{Dom} a)^\kappa$ platí

$$\Delta\big(\alpha a + \beta b\big)(t) = \alpha \Delta a(t) + \beta \Delta b(t),$$

tj. diference je lineární operátor na prostoru posloupností. Dále

$$\Delta\big(ab\big)(t) = \big(\Delta a(t)\big)b(t) + a(t+1)\big(\Delta b(t)\big) = \big(\Delta a(t)\big)b(t+1) + a(t)\big(\Delta b(t)\big).$$

Pokud navíc $b(t) \neq 0 \neq b(t+1)$, pak

$$\Delta \frac{a}{b}(t) = \frac{\big(\Delta a(t)\big)b(t) - a(t)\big(\Delta b(t)\big)}{b(t)b(t+1)}.$$

Stručně odvozené rovnice zapíšeme jako

$$\Delta(\alpha a + \beta b) = \alpha\Delta a + \beta\Delta b, \qquad \Delta ab = b\Delta a + a^\sigma \Delta b = b^\sigma \Delta a + a\Delta b, \qquad \Delta\frac{a}{b} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{bb^\sigma}.$$

Antidiference posloupnosti a je posloupnost A se stejným definičním oborem $\operatorname{Dom} a$, pro kterou platí $\Delta A = a$, podrobněji

$$\Delta A(t) = a(t)$$

pro všechna $t \in (\operatorname{Dom} a)^\kappa$. Antidiference není určena jednoznačně: Je-li γ libovolná konstanta a A antidiference posloupnosti a, pak posloupnost $\tilde{A} = A + \gamma$ je také antidiferencí posloupnosti a, neboť

$$\Delta\tilde{A}(t) = \Delta\big(A + \gamma\big)(t) = A(t+1) + \gamma - \big(A(t) + \gamma\big) = A(t+1) - A(t) = \Delta A(t) = a(t).$$

Naopak, pokud posloupnosti A a $\tilde{A}$ jsou antidiference posloupnosti a, pak

$$a(t) = \Delta A(t) = \Delta\tilde{A}(t),$$

neboli

$$A(t+1) - A(t) = \tilde{A}(t+1) - \tilde{A}(t)$$

	posloupnost a	diference Δa	antidiference $\sum a$
1.	$a(t) = 1$	0	t
2.	$a(t) = t$	1	$\frac{1}{2}t(t-1)$
3.	$a(t) = t^{(r)} = \prod\limits_{j=t-r+1}^{t} j,\ t \geq 0$	$rt^{(r-1)}$	$\dfrac{t^{(r+1)}}{r+1},\ r \neq -1$
4.	$a(t) = \alpha^t,\ \alpha \neq 1$	$(\alpha-1)\alpha^t$	$\dfrac{\alpha^t}{\alpha-1}$
5.	$a(t) = \cos(\alpha t + \beta),\ \alpha \not\equiv 0, \bmod 2\pi$	$-2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin(\alpha t + \beta + \frac{1}{2}\alpha)$	$\dfrac{\sin(\alpha t + \beta - \frac{1}{2}\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$
6.	$a(t) = \sin(\alpha t + \beta),\ \alpha \not\equiv 0, \bmod 2\pi$	$2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos(\alpha t + \beta + \frac{1}{2}\alpha)$	$-\dfrac{\cos(\alpha t + \beta - \frac{1}{2}\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$
7.	$a(t) = P_n(t)$	$P_{n-1}(t)$	$P_{n+1}(t)$

Tabulka 1.1: Diference a antidiference některých posloupností. Posloupnost na řádku 1. je konstantní, na ř. 2. aritmetická s diferencí 1, posloupnost na řádku 3. se nazývá *faktoriálová*, na řádku 4. je geometrická posloupnost s kvocientem α, na řádcích 5. a 6. jsou posloupnosti goniometrické. Symbol $P_\nu(t)$ v 7. řádku zastupuje libovolný polynom stupně ν v proměnné t; řádky 1. a 2. jsou vlastně zvláštními případy řádku posledního.

pro všechny indexy $t \in (\operatorname{Dom} a)^\kappa$. Odtud dostaneme rovnost

$$(A - \tilde{A})(t+1) = A(t+1) - \tilde{A}(t+1) = A(t) - \tilde{A}(t) = (A - \tilde{A})(t),$$

která zase platí pro všechny indexy t. To znamená, že posloupnost $A - \tilde{A}$ je konstantní. Dostáváme tak závěr, že dvě posloupnosti A a $\tilde{A}$ jsou antidiferencí téže posloupnosti a právě tehdy, když se liší o aditivní konstantu.

Nechť posloupnost A, resp. B, je antidiference posloupnosti a, resp. b, a α, β jsou libovolné konstanty. Pak lineární kombinace $\alpha A + \beta B$ je antidiferencí posloupnosti $\alpha a + \beta b$.

Nechť a je posloupnost. Její (nějakou) antidiferenci také nazýváme *sumace* a označujeme Σa (význam této terminologie a symboliky se objasní později). Předchozí výsledek lze při tomto označení zapsat ve tvaru

$$\Sigma(\alpha a + \beta b) = \alpha\Sigma a + \beta\Sigma b. \tag{1.1}$$

Z druhé formule pro diferenci součinu posloupností plyne další rovnost

$$\Sigma(a\Delta b) = ab - \Sigma(b^\sigma\Delta a). \tag{1.2}$$

Rovnosti (1.1) a (1.2) chápeme ve smyslu „až na aditivní konstantu“, tj. rozdíl posloupností na levé a pravé straně těchto rovností je konstantní posloupnost.

Diference a antidiference některých posloupností („elementárních posloupností“) jsou shrnuty v tabulce 1.1

Sumace a součiny.

Nechť a je posloupnost, $p, q \in \mathrm{Dom}(a)$ takové, že $p \leq q$. Sumu členů posloupnosti a od p do q definujeme obvyklým způsobem jako

$$\sum_{j=p}^{q} a(j) = a(q) + a(q-1) + \cdots + a(p+1) + a(p)$$

a podobně součin členů posloupnosti a od p do q jako

$$\prod_{j=p}^{q} a(j) = a(q)a(q-1)\cdots a(p+1)a(p).$$

Dále klademe

$$\sum_{j=p}^{p-1} a(j) = 0, \qquad \prod_{j=p}^{p-1} a(j) = 1.$$

Pro $p, q \in \mathrm{Dom}\, a$ takové, že $p > q$ klademe

$$\sum_{j=p}^{q} a(j) = -\sum_{j=q+1}^{p-1} a(j)$$

a pokud jsou všechny členy $a(q+1), a(q+2), \ldots, a(p-2), a(p-1)$ nenulové, klademe také

$$\prod_{j=p}^{q} a(j) = \left(\prod_{j=q+1}^{p-1} a(j) \right)^{-1} = \prod_{j=q+1}^{p-1} \frac{1}{a(j)}.$$

Při této konvenci pro libovolné hodnoty $p, q, r \in \mathrm{Dom}\, a$ platí

$$\sum_{j=p}^{q} a(j) + \sum_{j=q+1}^{r} a(j) = \sum_{j=p}^{r} a(j), \qquad \prod_{j=p}^{q} a(j) \prod_{j=q+1}^{r} a(j) = \prod_{j=p}^{r} a(j).$$

Suma diferencí posloupnosti a splňuje rovnosti

$$\sum_{j=t_0}^{t-1} \Delta a(j) = \sum_{j=t_0}^{t-1} \big(a(j+1) - a(j) \big) = \sum_{j=t_0+1}^{t} a(j) - \sum_{j=t_0}^{t-1} a(j) = a(t) - a(t_0). \tag{1.3}$$

Odtud vidíme, že pro posloupnost a a její antidiferenci A platí

$$\sum_{j=t_0}^{t-1} a(j) = A(t) - A(t_0);$$

zavedeme-li pro libovolnou posloupnost x označení

$$\big[x(j) \big]_{j=t_0}^{t} = x(t) - x(t_0),$$

můžeme předchozí výsledek přepsat ve tvaru

$$\sum_{j=t_0}^{t-1} a(j) = \big[A(j) \big]_{j=t_0}^{t}. \tag{1.4}$$

Při znalosti antidiference posloupnosti tedy již snadno spočítáme konečný součet členů posloupnosti.

Z rovnosti (1.2) získáme užitečnou formuli

$$\sum_{j=t_0}^{t-1} a(j)\Delta b(j) = \big[a(j)b(j)\big]_{j=t_0}^{t} - \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j+1)\Delta a(j); \tag{1.5}$$

nazýváme ji *sumace „per partes“*.

Odvozené výsledky jsou užitečné při sčítání členů posloupností.

Příklady:

1. Najdeme součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti, tj. posloupnosti s obecným členem $a_n = a_1 + (n-1)d$:
Součet přepíšeme a upravíme,

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \big(a_1 + (j-1)d\big) = a_1 \sum_{j=1}^{n} 1 + d \sum_{j=1}^{n} (j-1) = a_1 \sum_{j=1}^{n} 1 + d \sum_{j=0}^{n-1} j.$$

Z formule (1.4) a prvních dvou řádků tabulky 1.1 nyní dostaneme

$$s_n = a_1 \Big[j\Big]_{j=1}^{n+1} + d\left[\frac{j(j-1)}{2}\right]_{j=0}^{n} = a_1(n+1-1) + d\frac{n(n-1)}{2} = \\ = \frac{1}{2}n\big(2a_1 + (n-1)d\big) = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n),$$

což je vzoreček známý ze střední školy.

2. $S_{n,2} = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$:
Součet přepíšeme, využijeme vzorec pro antidiferenci faktoriálové posloupnosti z třetího řádku tabulky 1.1 a pak formuli (1.4):

$$1{+}4{+}9{+}\cdots{+}n^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum_{j=1}^{n} \big(j(j{-}1){+}j\big) = \sum_{j=1}^{n} j(j{-}1) + \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} j^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} j^{(1)} = \\ = \left[\frac{1}{3}j^{(3)}\right]_{j=1}^{n+1} + \left[\frac{1}{3}j^{(2)}\right]_{j=1}^{n+1} = \left[\frac{1}{3}j(j-1)(j-2)\right]_{j=1}^{n+1} + \left[\frac{1}{3}j(j-1)\right]_{j=1}^{n+1} = \\ = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Povšimněme si ještě, že výsledek je v souladu se sedmým řádkem tabulky 1.1 (diference a antidiference polynomu).

3. $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} (j^2 + 2j - 3)$:
Jedná se o součet členů posloupnosti, které jsou kvadratickými polynomy v indexu posloupnosti. Antidiference takové posloupnosti je kubický polynom. Součtem tedy musí být výraz

$$s_n = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Dosazením do obou vztahů vyjadřujících s_n dostaneme pro $n = 1, 2, 3, 4$ rovnosti

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + 2 - 3 = 0 = a + b + c + d, \\ s_2 &= s_1 + 4 + 4 - 3 = 5 = 8a + 4b + 2c + d, \\ s_3 &= s_2 + 9 + 6 - 3 = 17 = 27a + 9b + 3c + d, \\ s_4 &= s_3 + 16 + 8 - 3 = 38 = 64a + 16b + 4c + d. \end{aligned}$$

Koeficienty a, b, c, d jsou tedy řešením soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 5 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 17 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 38 \end{aligned}$$

Jejím řešením dostaneme $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = -\frac{11}{6}$, $d = 0$, takže $s_n = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 9n^2 - 11n\right)$. Stejnou formuli můžeme získat (dokonce rychleji) pomocí výsledků 1. a 2. příkladu.

4. $S_{n,k} = 1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$:
Nejprve vypočítáme $S_{n,0} = 1 + 1^0 + \cdots + n^0 = n$. Dále využijeme sumaci „per partes“, binomickou větu a vlastnosti kombinačních čísel. Dostaneme

$$S_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{j=1}^{n} j^k \cdot 1 = \sum_{j=1}^{n} j^k \Delta j = \left[j^k j\right]_{j=1}^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} j^k \left((j+1)^k - j^k\right)(j+1) =$$

$$= (n+1)^k - 1 - \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{p=0}^{k-1} j^p \binom{k}{p}\right](j+1) = (n+1)^k - 1 - \sum_{p=0}^{k-1}\binom{k}{p}\sum_{j=1}^{n}\left(j^{p+1} + j^p\right) =$$

$$= (n+1)^k - 1 - \sum_{p=0}^{k-1}\binom{k}{p}\left(\sum_{j=1}^{n} j^{p+1} + S_{n,p}\right) =$$

$$= (n+1)^k - 1 - \sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p-1}\sum_{j=1}^{n} j^p - \sum_{p=0}^{k-1}\binom{k}{p} S_{n,p} =$$

$$= (n+1)^k - 1 - \binom{k}{k-1} S_{n,k} - \sum_{p=1}^{k}\left[\binom{k}{p-1} + \binom{k}{p}\right] S_{n,p} - \binom{k}{0} S_{n,0} =$$

$$= (n+1)^k - 1 - kS_{n,k} - n - \sum_{p=1}^{k-1}\binom{k+1}{p} S_{n,p}.$$

Tento výsledek považujeme za rovnici pro hledaný výraz $S_{n,k}$. Z ní vyjádříme $S_{n,k}$ pomocí rekurentní formule

$$S_{n,k} = \frac{1}{k+1}\left((n+1)^{k+1} - n - 1 - \sum_{p=1}^{k-1}\binom{k+1}{p} S_{n,p}\right).$$

Konkrétně můžeme počítat:
$S_{n,1} = \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - n - 1 - 0\right) = \frac{1}{2}n(n+1)$,
$S_{n,2} = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - n - 1 - \binom{3}{1} S_{n,1}\right) = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - n - 1 - \frac{3}{2}n(n+1)\right) =$

$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ S_{n,3} = \tfrac{1}{4}\left((n+1)^4 - n - 1 - \binom{4}{1}S_{n,1} - \binom{4}{2}S_{n,2}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\left((n+1)^4 - n - 1 - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)\right) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

atd. Vidíme, že výrazy $S_{n,1}$ a $S_{n,2}$ získané tímto postupem jsou stejné, jako ve výsledcích 1. a 2. příkladu. ∎

Mezi „elementárními posloupnostmi“ uvedenými v tabulce 1.1 je také posloupnost *faktoriálová*, definovaná pro celé číslo r a pro $t \geq 0$ vztahem

$$t^{(r)} = \prod_{j=t-r+1}^{t} j.$$

Pro $r = 0$ je tedy podle zavedené konvence $t^{(0)} = 1$ a pro $r > 0$ je

$$t^{(r)} = t(t-1)(t-2)\cdots(t-r+1) = \begin{cases} 0, & t < r, \\ \dfrac{t!}{(t-r)!}, & t \geq r. \end{cases}$$

Pro $r < 0$ je

$$t^{(r)} = t^{(-|r|)} = \prod_{j=t+|r|+1}^{t} j = \left(\prod_{j=t+1}^{t+|r|}\right)^{-1} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+|r|)} = \frac{t!}{(t-r)!},$$

což je formálně stejný vztah, jako v případě $r \geq 0$. Z něho také plyne název této posloupnosti.

Antiderivaci faktoriálové posloupnosti $t^{(-1)}$ nazýváme *harmonické číslo* a značíme ji $H(t)$. Součet

$$H(t) = \sum_{j=0}^{t-1} j^{(-1)} = \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{t}$$

nelze vyjádřit v uzavřeném tvaru. Pro velká t platí přibližný vztah

$$H(t) \approx \gamma + \frac{\ln(t+1) + \ln t}{2} + \frac{1}{6t(t+1)},$$

kde $\gamma \doteq 0{,}5772$ je Eulerova konstanta. Chyba této aproximace je řádu $O(n^{-4})$.

1.2 Nejjednodušší diferenční rovnice

Počáteční úlohu pro diferenční rovnici prvního typu ve tvaru

$$\Delta x = b(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.6}$$

kde x je hledaná posloupnost a b je daná posloupnost, můžeme bezprostředně vyřešit sumací obou jejích stran. Podle (1.3) je totiž

$$x(t) - x(t_0) = \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j),$$

takže

$$x(t) = x_0 + \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j).$$

Pokud známe antidiferenci B posloupnosti b, řešení úlohy (1.6) zapíšeme ve tvaru

$$x(t) = x_0 + \big[B(j)\big]_{j=t_0}^{t}.$$

Příklady: Najdeme řešení počáteční úlohy:

1. $\Delta x = t^3$, $x(1) = 1$.

   Posloupnost na pravé straně rozepíšeme pomocí faktoriálových posloupností,

   $$t^3 = t(t-1)(t-2) + 3t^2 - 2t = t(t-1)(t-2) + 3t(t-1) + t = t^{(3)} + 3t^{(2)} + t^{(1)}.$$

   S využitím třetího a druhého řádku tabulky 1.1 dostaneme

   $$\sum_{j=1}^{t-1} j^3 = \sum_{j=1}^{t-1} j^{(3)} + 3\sum_{j=1}^{t-1} j^{(2)} + \sum_{j=1}^{t-1} j = \left[\frac{j^{(4)}}{4}\right]_{j=1}^{t} + 3\left[\frac{j^{(3)}}{3}\right]_{j=1}^{t} + \left[\frac{j(j-1)}{2}\right]_{j=1}^{t} =$$
   $$= \frac{1}{4}t(t-1)(t-2) - 0 + 3\left(\frac{1}{3}t(t-1)(t-2) - 0\right) + \frac{1}{2}t(t-1) - 0 = \frac{1}{4}t^2(t-1)^2.$$

   Řešení dané úlohy tedy je posloupnost daná předpisem

   $$x(t) = 1 + \frac{t^2(t-1)^2}{4}.$$

   Alternativně bychom tuto úlohu mohli řešit pomocí výsledku 4. příkladu v předchozí části. Je totiž

   $$x(t) = x(1) + \sum_{j=1}^{t-1} j^3 = 1 + S_{t-1,3} = 1 + \tfrac{1}{4}(t-1)^2t^2.$$

2. $\Delta x(t) = \dfrac{1}{(t+1)(t+3)}$, $x(1) = 0$.

   Nejprve upravíme pravou stranu rovnice:

   $$\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{t+2}{(t+1)(t+2)(t+3)} =$$
   $$= \frac{1}{(t+1)(t+2)} - \frac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)} = t^{(-2)} - t^{(-3)}.$$

   Nyní využijeme 3. řádek tabulky 1.1 a vyjádříme řešení dané úlohy:

   $$x(t) = \left[\frac{j^{(-1)}}{-1}\right]_{j=1}^{t} - \left[\frac{j^{(-2)}}{-2}\right]_{j=1}^{t} = -\left[\frac{1}{j+1}\right]_{j=1}^{t} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(j+1)(j+2)}\right]_{j=1}^{t} =$$
   $$= -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(t+1)(t+2)} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) = \frac{5}{12} - \frac{2t+3}{2(t+1)(t+2)}.$$

3. $\Delta x = 2^t t$, $x(0) = 0$.

   Pro nalezení sumy posloupnosti na pravé straně rovnice využijeme sumaci „per partes" (1.5) (kde $a(t) = t$, $\Delta b(t) = 2^t$, tj. $b(t) = 2^t$) a čtvrtý řádek tabulky 1.1:

$$\sum_{j=0}^{t-1} 2^j j = \left[2^j j\right]_{j=0}^{t} - \sum_{j=0}^{t-1} 2^{j+1} = 2^t t - 0 - \left[\frac{2^{j+1}}{1}\right]_{t=0}^{t} = 2^t t - 2^{t+1} + 2.$$

   Řešení dané rovnice tedy je $x(t) = 2^t(t-2) + 2$.

4. $x(t+1) = \dfrac{t}{t+1} x(t) + \dfrac{(-1)^t}{t+1}$, $x(1) = \frac{1}{2}$.

   Danou diferenční rovnici druhého typu (rekurentní relaci) převedeme na rovnici prvního typu

$$x(t+1) - x(t) = -\frac{1}{t+1} x(t) + \frac{(-1)^t}{t+1}$$

   a dále upravíme na tvar

$$(1+t)x(t+1) - tx(t) = (-1)^t, \quad \text{tj. } \Delta\big(tx(t)\big) = \cos t\pi.$$

   Nyní zavedeme novou neznámou posloupnost y substitucí $y(t) = tx(t)$. Posloupnost y vyhovuje diferenční rovnici

$$\Delta y(t) = \cos t\pi$$

   s počáteční podmínkou $y(1) = 1 \cdot x(1) = \frac{1}{2}$. Pro řešení této úlohy využijeme pátý řádek tabulky 1.1:

$$y(t) = \tfrac{1}{2} + \sum_{j=1}^{t-1} \cos t\pi = \tfrac{1}{2} + \left[\frac{\sin\left(j\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{\pi}{2}}\right]_{j=1}^{t} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\Big(\sin\left(t\pi - \tfrac{\pi}{2}\right) - 1\Big) = \tfrac{1}{2}\sin(2t-1)\tfrac{\pi}{2}.$$

   Zpětnou substitucí dostaneme řešení dané úlohy ve tvaru

$$x(t) = \frac{\sin(2t-1)\frac{\pi}{2}}{2t} = \frac{(-1)^{t-1}}{2t}.$$

■

1.3 Cvičení

1. Ověřte platnost vzorců v tabulce 1.1.

2. Vypočítejte součet $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} (j^2 + 2j - 3)$ alternativním postupem k postupu uvedenému ve 3. příkladu na str. 5.

V úlohách 3–6 najděte antidiferenci dané posloupnosti.

3. $a(t) = t(-1)^t$
4. $a(t) = t \sin \alpha t$
5. $a(t) = t^2 q^t$
6. $a(t) = t^{(r)} q^t$

V úlohách 7–10 najděte řešení počáteční úlohy.

7. $\Delta x(t) = t^2 2^t, \ x(0) = 6$
8. $\Delta x(t) = \dfrac{1}{t(t+1)}, \ x(1) = 0$
9. $\Delta x(t) = \dfrac{t}{(t+1)(t+2)(t+3)}, \ x(1) = 0$
10. $\Delta x(t) = (-1)^{\frac{1}{2}t(t-1)}, \ x(0) = 0$
11. Najděte řešení rovnice $(t+1)x(t+1) = tx(t)$ a určete interval, na kterém je definováno.

Výsledky:

3. $\frac{1}{4}(t-2)(-1)^{t+1}$
4. $\dfrac{\sin \alpha t}{2(1-\cos\alpha)} - t\dfrac{\cos(\alpha t - \frac{1}{2}\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$
5. $\left(\dfrac{t^2}{q-1} - \dfrac{2qt}{(q-1)^2} + \dfrac{q^2+2}{(q-1)^3}\right) q^t$
6. $-\dfrac{r!}{(1-q)^{r+1}}\left[1 + \sum_{j=1}^{r}\left(\dfrac{1-q}{q}\right)^j \dfrac{t^{(j)}}{j!}\right] q^{t+r}$
7. $\left(t^2 - 4t + 6\right) 2^t$
8. $\dfrac{t-1}{t}$
9. $\frac{1}{4}t^{(2)}t^{(-2)} = \dfrac{t(t-1)}{4(t+1)(t+2)}$
10. $2\left(\sin\frac{1}{4}\pi t\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left((-1)^t + 1\right)(-1)^{\frac{1}{2}t(t-1)}$
11. $x(t) = \begin{cases} C/t, & t \in (-\infty, -1] \text{ nebo } t \in [1, \infty) \\ 0, & t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$
    C je libovolná konstanta.

Kapitola 2

Lineární rovnice

2.1 Rovnice prvního řádu

Lineární diferenční rovnice prvního řádu je tvaru

$$\Delta x = a(t)x + b(t), \tag{2.1}$$

kde a, b jsou nějaké posloupnosti. Pokud je posloupnost b identicky nulová, $b \equiv 0$, nazýváme rovnici (2.1) *homogenní*.

Diferenční rovnici (2.1) můžeme přepsat do tvaru rekurentní formule (diferenční rovnice druhého typu)

$$x(t+1) = \big(a(t)+1\big)x(t) + b(t),$$

nebo

$$x(t+1) - q(t)x(t) = b(t), \tag{2.2}$$

při označení $q(t) = a(t) + 1$. K rovnici přidáme počáteční podmínku

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.3}$$

Z rovností (2.2), (2.3) postupně počítáme:

$$\begin{aligned}
x(t_0+1) &= q(t_0)x_0 + b(t_0) \ = \ x_0q(t_0) + b(t_0),\\
x(t_0+2) &= q(t_0+1)x(t_0) + b(t_0+1) \ = \ q(t_0+1)\big(x_0q(t_0)+b(t_0)\big) + b(t_0+1) \ = \\
&= x_0q(t_0)q(t_0+1) + b(t_0)q(t_0+1) + b(t_0+1),\\
x(t_0+3) &= q(t_0+2)\big(x_0q(t_0)q(t_0+1) + b(t_0)q(t_0+1) + b(t_0+1)\big) + b(t_0+2) \ = \\
&= x_0q(t_0)q(t_0+1)q(t_0+2) + \\
&\qquad + b(t_0)q(t_0+1)q(t_0+2) + b(t_0+1)q(t_0+2) + b(t_0+2) \ = \\
&= x_0\prod_{i=0}^{2} q(t_0+i) + \sum_{i=0}^{2} b(t_0+i)\prod_{j=i+1}^{2} q(t_0+j),
\end{aligned}$$

atd. Obecně

$$x(t_0+l) = x_0\prod_{i=0}^{l-1} q(t_0+i) + \sum_{i=0}^{l-1} b(t_0+i)\prod_{j=i+1}^{l-1} q(t_0+j) = x_0\prod_{i=t_0}^{t_0+l-1} q(i) + \sum_{i=t_0}^{t_0+l-1} b(i)\prod_{j=i+1}^{t_0+l-1} q(j).$$

Tento výsledek lze snadno ověřit úplnou indukcí. Dostáváme tak

Tvrzení 1. Řešení lineární diferenční rovnice (2.1) s počáteční podmínkou (2.3) je dáno formulí

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1 + a(i)\big) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} \big(1 + a(j)\big); \tag{2.4}$$

řešení lineární rekurentní formule prvního řádu (2.2) s počáteční podmínkou (2.3) je dáno formulí

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} q(i) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i) \prod_{j=i+1}^{t-1} q(j). \tag{2.5}$$

Významné speciální případy lineární rovnice prvního řádu jsou ty, ve kterých je některá z posloupností a, b konstantní, $a \equiv \alpha \neq -1$ nebo $b \equiv \beta$.

Důsledky.

1. Řešení lineární diferenční rovnice, resp. rekurentní formule, prvního řádu

   $$\Delta x = \alpha x + b(t), \quad \text{resp.} \quad x(t+1) = \kappa x(t) + b(t),$$

   s počáteční podmínkou (2.3) je dáno formulí

   $$x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)(1+\alpha)^{t-1-i},$$

   resp.

   $$x(t) = x_0\kappa^{t-t_0} + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)\kappa^{t-1-i}.$$

2. Řešení lineární diferenční rovnice, resp. rekurentní formule, prvního řádu

   $$\Delta x = \alpha x + \beta, \quad \text{resp.} \quad x(t+1) = \kappa x(t) + \beta,$$

   s počáteční podmínkou (2.3) je dáno formulí

   $$x(t) = x_0(1+\alpha)^{t-t_0} - \frac{\beta}{\alpha}\left(1 - (1+\alpha)^{t-t_0}\right) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right)(1+\alpha)^{t-t_0} - \frac{\beta}{\alpha},$$

   resp.

   $$x(t) = \left(x_0 - \frac{\beta}{1-\kappa}\right)\kappa^{t-t_0} + \frac{\beta}{1-\kappa}.$$

(Při odvození druhého důsledku byl využit vzorec pro součet konečné geometrické posloupnosti.)

Metoda sumačního faktoru

Vzorec (2.5) pro řešení počáteční úlohy (2.2), (2.3) jsme „uhodli“ přímo z počáteční podmínky a tvaru rekurentní relace. Ukážeme „sofistikovanější“ postup jeho odvození.

Rovnici (2.2) vynásobíme výrazem $\prod_{j=t+1}^{t_0} q(j)$. Dostaneme

$$x(t+1)\prod_{j=t+1}^{t_0} q(j) - x(t)q(t)\prod_{j=t+1}^{t_0} q(j) = b(t)\prod_{j=t+1}^{t_0} q(j)$$

a po úpravě

$$x(t+1)\prod_{j=t+1}^{t_0} q(j) - x(t)\prod_{j=t}^{t_0} q(j) = b(t)\prod_{j=t+1}^{t_0} q(j).$$

Výraz na levé straně je diferencí posloupnosti s obecným členem $x(t)\prod_{j=t}^{t_0} q(j)$. Rekurentní relace (2.2) se tímto způsobem převádí na diferenční rovnici

$$\Delta\left(x(t)\prod_{j=t}^{t_0} q(j)\right) = b(t)\prod_{j=t+1}^{t_0} q(j),$$

která je řešitelná prostou sumací, viz 1.2. Řešení této rovnice s počáteční podmínkou (2.3) je tedy dáno součtem

$$x(t)\prod_{j=t}^{t_0} q(j) = x(t_0)\prod_{j=t_0}^{t_0} q(j) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)\prod_{j=i+1}^{t_0} q(j) = x_0 q(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)\prod_{j=i+1}^{t_0} q(j).$$

Tuto rovnost vydělíme součinem $\prod_{j=t}^{t_0} q(j)$, tj. vynásobíme součinem $\prod_{j=t_0+1}^{t-1} q(j)$, a upravíme:

$$x(t) = x_0 q(t_0)\prod_{j=t_0+1}^{t-1} q(j) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)\prod_{j=i+1}^{t_0} q(j)\prod_{j=t_0+1}^{t-1} q(j) = x_0\prod_{j=t_0}^{t-1} q(j) + \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)\prod_{j=i+1}^{t-1} q(j).$$

Dostáváme tak opět formuli (2.5).

Posloupnost π definovaná vztahem

$$\pi(t) = \prod_{j=t+1}^{t_0} q(j) = \prod_{j=t_0+1}^{t} \frac{1}{q(j)}$$

se nazývá *sumační faktor* rovnice (2.2).

2.2 Rovnice druhého řádu

Lineární diferenční rovnice druhého typu (rekurentní formule) druhého řádu je tvaru

$$x(t+2) + a_1(t)x(t+1) + a_0(t)x(t) = b(t), \tag{2.6}$$

kde a_0 je posloupnost taková, že $a(t) \neq 0$. Pokud je posloupnost b identicky nulová, $b \equiv 0$, nazýváme rovnici (2.6) *homogenní.*

K rovnice (2.6) přísluší počáteční podmínka

$$x(t_0) = \xi_0,\ \ x(t_0+1) = \xi_1. \tag{2.7}$$

Počáteční úloha pro rovnici (2.6) má zřejmě jediné řešení definované na průniku definičních oborů posloupností a_0, a_1, b. Na této množině totiž můžeme spočítat člen hledané posloupnosti x ze dvou „předchozích“,

$$x(t+2) = b(t) - a_0(t)x(t) - a_1(t)x(t+1),$$

a díky předpokladu $a_0(t)$ můžeme také spočítat člen posloupnosti ze dvou „následujících“,

$$x(t) = \frac{1}{a_0(t)}\big(b(t) - a_1(t)x(t+1) - x(t+2)\big).$$

Z počáteční podmínky tedy určíme členy hledané posloupnosti pro všechny přípustné hodnoty indexu t.

2.2.1 Struktura řešení homogenní rovnice

Pro lineární homogenní rovnici druhého řádu

$$x(t+2) + a_1(t)x(t+1) + a_0(t)x(t) = 0, \tag{2.8}$$

platí *princip superpozice:*

Tvrzení 2. Jsou-li x_1 a x_2 řešení rovnice (2.8) a c_1, c_2 konstanty, pak také lineární kombinace $y = c_1x_1 + c_2x_2$ je řešením této rovnice.

Důkaz:

$$\begin{aligned} &y(t+2) + a_1(t)y(t+1) + a_0(t)y(t) = \\ &= c_1x_1(t+2) + c_2x_2(t+2) + a_1(t)\big(c_1x_1(t+1) + c_2x_2(t+1)\big) + a_0\big(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\big) = \\ &= c_1\big(x_1(t+2) + a_1(t)x_1(t+1) + a_0(t)x_1(t)\big) + \\ &+ c_2\big(x_2(t+2) + a_1(t)x_2(t+1) + a_0(t)x_2(t)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

Bezprostředním důsledkem tohoto tvrzení je evidentní skutečnost, že nulová posloupnost je také řešením rovnice. Celkem tak dostáváme, že množina řešení lineární homogenní rovnice (2.8) je lineární (vektorový) prostor.

Řešení y_1 rovnice (2.8) s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = 1,\ \ x(t_0+1) = 0$$

a řešení y_2 této rovnice s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = 0,\ \ x(t_0+1) = 1$$

jsou evidentně lineárně nezávislá. To znamená, že prostor řešení lineární homogenní rovnice (2.8) má dimenzi alespoň 2. Naopak, pro jednoznačně určené řešení x rovnice (2.8) s obecnou počáteční podmínkou (2.7) platí

$$x = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2;$$

přitom y_1, y_2 splnují uvedené počáteční podmínky. To znamená, že libovolné řešení homogenní rovnice (2.8) lze vyjádřit jako lineární kombinaci dvou posloupností y_1 a y_2. Prostor řešení má tedy dimenzi nejvýše 2.

Provedené úvahy shrneme: Množina všech řešení lineární homogenní rovnice druhého řádu (2.8) tvoří dvourozměrný lineární prostor. Bázi tohoto prostoru nazveme *fundamentální systém řešení homogenní rovnice* (2.8).

Tvoří-li posloupnosti y_1 a y_2 fundamentální systém řešení homogenní rovnice (2.8), pak posloupnost $c_1y_1 + c_2y_2$ je obecným řešením lineární homogenní rovnice (2.8). Rešení počáteční úlohy (2.8), (2.7) je totiž tohoto tvaru, přičemž konstanty c_1, c_2 jsou řešením soustavy lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) \qquad &+ c_2y_2(t_0) \qquad = \xi_0 \\ c_1y_1(t_0+1) &+ c_2y_2(t_0+2) = \xi_1. \end{aligned}$$

Známe-li tedy fundamentální systém y_1, y_2 řešení lineární homogenní rovnice (2.8), můžeme psát řešení počáteční úlohy (2.8), (2.7) ve tvaru

$$x(t) = \frac{\big[\xi_0 y_2(t_0+1) - \xi_1 y_2(t_0)\big] y_1(t) - \big[\xi_0 y_1(t_0+1) - \xi_1 y_1(t_0)\big] y_2(t)}{y_1(t_0)y_2(t_0+1) - y_1(t_0+1)y_2(t_0)}.$$

Výpočet druhé složky fundamentálního systému

Předpokládejme, že známe řešení y_1 homogenní rovnice (2.8) takové, že $y_1(t) \neq 0$.

Rovnice (2.8) je diferenční, proto by se ve vyjádření jejího řešení mohla objevovat sumace. Z tohoto důvodu budeme hledat řešení této rovnice ve tvaru

$$x(t) = y_1(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} u(i), \tag{2.9}$$

kde u je zatím neznámá posloupnost. Pak

$$x(t+1) = y_1(t+1) \sum_{i=t_0}^{t} u(i) = y_1(t+1) \left(\sum_{i=t_0}^{t-1} u(i) + u(t) \right),$$

$$x(t+2) = y_1(t+2) \left(\sum_{i=t_0}^{t-1} u(i) + u(t) + u(t+1) \right).$$

Toto vyjádření dosadíme do rovnice (2.8),

$$\begin{aligned} \big(u_1(t+2) + a_1(t)y_1(t+1) + a_0(t)y_1(t)\big) \sum_{i=t_0}^{t-1} u(i) + \big(y_1(t+2) + a_1 y_1(t+1)\big)u(t) + \\ + y_1(t+2)u(t+1) = 0. \end{aligned}$$

Poněvadž posloupnost y_1 je řešením rovnice (2.8), je výraz v první závorce roven nule a výraz ve druhé závorce je roven $-a_0(t)y_1(t)$. Podle předpokladu je $y_1(t+2) \neq 0$, proto můžeme tímto členem předchozí rovnost vydělit. Dostaneme

$$u(t+1) = a_0(t) \frac{y_1(t)}{y_1(t+2)} u(t).$$

To je lineární homogenní rovnice prvního řádu pro neznámou posloupnost u, jejíž řešení je podle Tvrzeni 1 dáno součinem

$$u(t) = c \prod_{j=t_0}^{t-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)},$$

kde $c = u(t_0)$ je nějaká konstanta. Toto vyjádření dosadíme do rovnosti (2.9) a dostaneme řešení rovnice (2.8) ve tvaru

$$x(t) = c y_1(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+2)}. \tag{2.10}$$

Ověříme, že posloupnost daná výrazem (2.10) je pro $c \neq 0$ lineárně nezávislá na posloupnosti y_1. Casoratián posloupností y_1 a x je

$$C(t; y_1, x) = \begin{vmatrix} y_1(t) & c y_1(t) \sum\limits_{i=t_0}^{t-1} \prod\limits_{j=t_0}^{i-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)} \\ y_1(t+1) & c y_1(t+1) \left(\sum\limits_{i=t_0}^{t-1} \prod\limits_{j=t_0}^{i-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)} + \prod\limits_{j=t_0}^{t-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)} \right) \end{vmatrix} =$$

$$= c y_1(t) y_1(t+1) \prod_{j=t_0}^{t-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+1)} \neq 0;$$

neboť podle předpokladů $a_0(t) \neq 0$, $y_1(t) \neq 0$. Dostali jsme tedy výsledek:

Tvrzení 3. Nechť posloupnost y_1 je první složkou fundamentálního systému řešení rovnice (2.8) taková, že $y_1(t) \neq 0$. Pak druhá složka fundamentálního systému řešení je dána výrazem

$$y_2(t) = y_1(t) \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} a_0(j) \frac{y_1(j)}{y_1(j+2)}.$$

Příklad:

$$x(t+2) - (t+2)x(t+1) + (t+2)x(t) = 0, \quad t > 0$$

V tomto případě je $t_0 = 1$, $a_0(t) = t + 2$ a posloupnost y_1 daná předpisem $y_1(t) = t$ je řešením dané rovnice, neboť

$$t + 2 - (t+2)(t+1) + (t+2)t = (t+2)(1 - t - 1 + t) = 0.$$

Druhá složka fundamentálního systému řešení tedy je

$$y_2(t) = t \sum_{i=1}^{t-1} \prod_{j=1}^{i-1} (j+2) \frac{j}{j+2} = t \sum_{i=1}^{t-1} (i-1)!\,.$$

■

2.2.2 Řešení nehomogenní rovnice

Pokud jsou „koeficienty“ a_1, a_2 v rovnicích (2.6) a (2.8) stejné, řekneme, že *rovnice* (2.8) *je přidružená homogenní rovnice k lineární rovnici* (2.6).

Předpokládejme, že známe fundamentální systém řešení y_1, y_2 homogenní rovnice (2.8) a nějaké řešení x_N nehomogenní rovnice. Pak posloupnost x, definovaná jako součet obecného řešení homogenní rovnice (2.8) a posloupnosti x_N, tj. $x = c_1y_1 + c_2y_2 + x_N$, kde c_1, c_2 jsou nějaké konstanty, je řešením nehomogenní rovnice (2.6). Vskutku

$$
\begin{aligned}
&x(t+2) + a_1(t)x(t+1) + a_0(t)x(t) = \\
&\ = c_1y_1(t+2) + c_2y_2(t+2) + x_N(t+2) + \\
&\quad + a_1(t)\big(c_1y_1(t+1) + c_2y_2(t+1) + x_N(t+1)\big) + a_0(t)\big(c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + x_N(t)\big) = \\
&\ = c_1\big(y_1(t+2) + a_1(t)y_1(t+1) + a_0(t)y_1(t)\big) + \\
&\qquad\qquad + c_2\big(y_2(t+2) + a_1(t)y_2(t+1) + a_0(t)y_2(t)\big) + \\
&\qquad\qquad\quad + x_N(t+2) + a_1(t)x_N(t+1) + a_0(t)x_N(t) = 0 + 0 + b(t) = b(t).
\end{aligned}
$$

Touto úvahou dostáváme

Tvrzení 4. Obecné řešení lineární rovnice (2.6) je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice a nějakého řešení nehomogenní rovnice.

Pokud konstanty c_1 a c_2 zvolíme tak, aby byla splněna počáteční podmínka (2.7), tj. aby splňovaly soustavu lineárních algebraických rovnic

$$
\begin{aligned}
c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) + x_N(t_0) &= \xi_0, \\
c_1y_1(t_0+1) + c_2y_2(t_0+1) + x_N(t_0+1) &= \xi_1,
\end{aligned}
$$

neboli

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\big(\xi_0 - x_N(t_0)\big)y_2(t_0+1) - \big(\xi_1 - x_N(t_0+1)\big)y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2(t_0+1) - y_2(t_0)y_1(t_0+1)}, \\
c_2 &= \frac{y_1(t_0)\big(\xi_1 - x_N(t_0+1)\big) - y_1(t_0+1)\big(\xi_0 - x_N(t_0)\big)}{y_1(t_0)y_2(t_0+1) - y_2(t_0)y_1(t_0+1)},
\end{aligned}
$$

pak posloupnost $x = c_1y_1 + c_2y_2 + x_N$ je řešením počáteční úlohy (2.6), (2.7).

Ještě poznamenejme, že výpočet konstant c_1, c_2 pro konkrétní počáteční úlohu je nejjednodušší, pokud partikulární řešení x_N nehomogenní rovnice volíme tak, aby $x_N(t_0) = 0$ a $x_N(t_0+1) = 0$.

Nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice

Budeme hledat řešení rovnice (2.6) s nulovou počáteční podmínkou

$$x(t_0) = 0, \ x(t_0+1) = 0. \tag{2.11}$$

Budeme přitom předpokládat, že známe fundamentální systém řešení y_1, y_2 přidružené homogenní rovnice.

Počáteční úlohu (2.6), (2.11) lze interpretovat: Proces, který je popsán nehomogenní rovnicí (2.6), začíná s nulovými hodnotami a v průběhu času na něho působí nějaké vlivy. Stav procesu v čase t tedy můžeme popsat jako součet těchto vlivů od počátečního okamžiku t_0 do okamžiku $t-1$ bezprostředně předcházejícímu času t. Přesněji vyjádřeno, řešení počáteční úlohy (2.6), (2.11) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(i,t), \tag{2.12}$$

kde w je nějaká, zatím neurčená, funkce dvou celočíselných proměnných. Myšlenka hledat řešení nehomogenní rovnice s nulovými počátečními podmínkami ve tvaru součtu (nebo integrálu) se nazývá *Duhamelův princip.*

Posloupnost daná rovností (2.12) splňuje první z počátečních podmínek (2.11). Ta druhá z nich nabývá tvar

$$0 = x(t_0+1) = w(t_0, t_0+1).$$

Tato podmínka bude splněna zejména tehdy, když po funkci w budeme požadovat, aby měla vlastnost

$$w(i, i+1) = 0 \tag{2.13}$$

pro všechny přípustné hodnoty i.

Z rovnosti (2.12) dále s využitím podmínky (2.13) dostaneme

$$x(t+1) = \sum_{i=t_0}^{t} w(i,t+1) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(i,t+1) + w(t,t+1) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(i,t+1),$$

$$x(t+2) = \sum_{i=t_0}^{t} w(i,t+2) = \sum_{i=t_0}^{t-1} w(i,t+2) + w(t,t+2).$$

Toto vyjádření dosadíme do dané rovnice (2.6). Dostaneme

$$\sum_{i=t_0}^{t-1} \big[w(i,t+2) + a_1(t)w(i,t+1) + a_0(t)w(i,t) \big] + w(t,t+2) = b(t).$$

Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, pokud funkce w bude mít vlastnosti

$$w(i,i+2) = b(i), \text{ pro všechna } i, \tag{2.14}$$

$$w(i,t+2) + a_1(t)w(i,t+1) + a_0(t)w(i,t) = 0, \text{ pro všechna } i,t. \tag{2.15}$$

Nyní budeme proměnnou i považovat za parametr. Získané rovnosti budeme chápat jako úlohu pro lineární homogenní rovnici druhého řádu (2.15) s počátečními podmínkami (2.13) a (2.14); hledaná posloupnost je $w(i,\cdot)$. Rovnice (2.15) je přidruženou homogenní rovnicí k dané rovnici (2.6). Podle předpokladu tedy známe její fundamentální systém řešení, její obecné řešení je lineární kombinací bázových posloupností y_1, y_2. Příslušné koeficienty ovšem závisí na parametru i, tedy

$$w(i,t) = c_1(i)y_1(t) + c_2(i)y_2(t). \tag{2.16}$$

Konkrétní vyjádření koeficientů (posloupností) c_1, c_2 získáme z počátečních podmínek (2.13) a (2.14):

$$\begin{aligned} c_1(i)y_1(i+1) + c_2(i)y_2(i+1) &= 0, \\ c_1(i)y_1(i+2) + c_2(i)y_2(i+2) &= b(i), \end{aligned}$$

tj.

$$c_1(i) = \frac{-b(i)y_2(i+1)}{y_1(i+1)y_2(i+2) - y_1(i+2)y_2(i+1)},$$
$$c_2(i) = \frac{b(i)y_1(i+1)}{y_1(i+1)y_2(i+2) - y_1(i+2)y_2(i+1)}.$$

Dosazením těchto výrazů do rovnosti (2.16) a pak do (2.12) dostaneme řešení počáteční úlohy (2.6), (2.11) ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} b(i)\frac{y_2(i+1)y_1(t) - y_1(i+1)y_2(t)}{y_1(i+2)y_2(i+1) - y_1(i+1)y_2(i+2)}. \tag{2.17}$$

Při označení $C_j(t) = \sum\limits_{i=t_0}^{t-1} c_j(i)$, $j = 1, 2$ můžeme předchozí formuli pro řešení nehomogenní lineární rovnice druhého řádu přepsat ve tvaru

$$x(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t),$$

tedy jako lineární kombinaci bázových posloupností y_1, y_2; přitom koeficienty nejsou konstantní ale variabilní, závisí na čase t. Proto se rovnost (2.17) nazývá *formule variace konstant.*

Příklad: Najdeme řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) + \frac{1}{t}x(t+1) - \left(1 + \frac{1}{t}\right)x(t) = 4(t+1), \quad x(1) = 1,\ x(2) = -1.$$

Prvním problémem je najít fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice

$$x(t+2) + \frac{1}{t}x(t+1) - \left(1 + \frac{1}{t}\right)x(t) = 0.$$

Tato rovnice má evidentně konstantní řešení $y_1 \equiv 1$. Druhou složku fundamentálního systému řešení vypočítáme podle Tvrzení 3:

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \sum_{i=1}^{t-1}\prod_{j=1}^{i-1}\left(-1 - \frac{1}{j}\right) = \sum_{i=1}^{t-1}(-1)^{i-1}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{j+1}{j} = \sum_{i=1}^{t-1}(-1)^{i-1}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{i-1}{i-2}\cdot\frac{i}{i-1}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{t-1}(-1)^{i-1}i = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{t-3}(t-2) + (-1)^{t-2}(t-1) = \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{2}(t-2) + t - 1, & t \text{ sudé} \\ -\frac{1}{2}(t-1), & t \text{ liché} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & t \text{ sudé} \\ \frac{1}{2}(1-t), & t \text{ liché} \end{cases} = \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^t(2t-1)\right).
\end{aligned}$$

Dostáváme tak obecné řešení x_H přidružené homogenní rovnice ve tvaru

$$x_H(t) = A + \tfrac{1}{4}B\left(1 + (-1)^t(2t-1)\right).$$

Počáteční hodnoty jsou

$$1 = x_H(1) = A, \quad -1 = x_H(2) = A + B.$$

Z těchto rovnic snadno vypočítáme $A = 1$, $B = -2$. Řešení přidružené homogenní rovnice které splňuje počáteční podmínky je tedy dáno rovností

$$x_H(t) = 1 - \tfrac{1}{2}\left(1 + (-1)^t(2t-1)\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(-1)^t(2t-1).$$

Rešení nehomogenní rovnice, které splnuje nulové počáteční podmínky $x_N(1) = x_N(2) = 0$ dostaneme dosazením do vzorce (2.17).

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{i=1}^{t-1} 4(i+1)\frac{\frac{1}{4}\left(1-(-1)^i(2i+1)\right) - \frac{1}{4}\left(1+(-1)^t(2t-1)\right)}{\frac{1}{4}\left(1-(-1)^i(2i+1)\right) - \frac{1}{4}\left(1+(-1)^i(2i+3)\right)} = \\ &= \sum_{i=1}^{t-1}\left[2i+1+(-1)^{t+i}(2t-1)\right] = \sum_{i=1}^{t-1}(2i+1) + (-1)^t(2t-1)\sum_{i=1}^{t-1}(-1)^i = \\ &= \tfrac{1}{2}(t-1)(2t+2) - (-1)^t(2t-1)\tfrac{1}{2}\left((-1)^t+1\right) = t(t-1) - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(-1)^t(2t-1). \end{aligned}$$

Rešení dané rovnice je součet posloupností x_H a x_N, tedy

$$x(t) = t(t-1) - (-1)^t(2t-1).$$

■

2.2.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Lineární homogenní rovnice prvního řádu

$$x(t+1) = \kappa x(t)$$

má podle důsledku Tvrzení 1 řešení $x(t) = \kappa^t$, tj. geometrickou posloupnost. Toto pozorování vede k myšlence hledat řešení lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$x(t+2) + \alpha_1 x(t+1) + \alpha_0 x(t) = 0 \tag{2.18}$$

také ve tvaru geometrické posloupnosti

$$x(t) = \lambda^t, \tag{2.19}$$

kde λ je nějaká nenulová konstanta.

Po dosazení výrazu (2.19) do dané rovnice (2.18) dostaneme

$$\lambda^{t+2} + \alpha_1\lambda^{t+1} + \alpha_0\lambda^t = 0 \quad \text{tj.} \quad \lambda^t\left(\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0\right) = 0.$$

Podle předpokladu $\lambda \neq 0$ je tato rovnost ekvivalentní s rovnicí

$$\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0. \tag{2.20}$$

To je kvadratická rovnice, která má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0}\right).$$

Z obecného předpokladu kladeného na lineární rovnice druhého řádu plyne $\alpha_0 \neq 0$, takže oba kořeny jsou nenulové. Dostáváme tak dvě, ne nutně různá, řešení dané diferenční rovnice ve tvaru $x_1(t) = \lambda_1^t$, $x_2(t) = \lambda_2^t$. Casoratián posloupností x_1, x_2 je

$$C(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2)^t(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ je $C(t; x_1, x_2) \neq 0$, takže posloupnosti x_1, x_2 jsou v takovém případě nezávislé.

(Algebraická) rovnice (2.20) se nazývá *charakteristická rovnice,* její řešení se nazývají *charakteristické kořeny.* Rozlišíme tři standardní případy:

Dva reálné různé charakteristické kořeny

Tento případ nastává, pokud $\alpha_1^2 > 4\alpha_0$. Bezprostředně můžeme napsat fundamentální systém řešení rovnice (2.18),

$$y_1(t) = \lambda_1^t = \left[\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0} - \alpha_1\right)\right]^t, \quad y_2(t) = \lambda_2^t = \left[-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0} + \alpha_1\right)\right]^t$$

a její obecné řešení ve tvaru

$$x(t) = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t.$$

Příklad: Najdeme obecné řešení rovnice

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 3x(t) = 0.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, takže obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) = 3^t A + B.$$

■

Komplexně sdružené charakteristické kořeny

Tento případ nastává, pokud $\alpha_1^2 < 4\alpha_0$. Charakteristické kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(-\alpha_1 \pm \mathrm{i}\sqrt{4\alpha_0 - \alpha_1}\right),$$

v goniometrickém tvaru

$$\lambda_{1,2} = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega} = r\left(\cos\omega \pm \mathrm{i}\sin\omega\right),$$

kde

$$r = \sqrt{\alpha_0}, \quad \omega = \arccos\left(-\frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_0}}\right), \ \omega \in (0, \pi). \tag{2.21}$$

Dostáváme tak dvě řešení rovnice (2.18) ve tvaru

$$x_1(t) = r^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = r^t(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t), \quad x_2(t) = r^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = r^t(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t).$$

Lineární kombinace těchto posloupností jsou podle principu superpozice také řešením rovnice (2.18), zejména tedy posloupnosti

$$y_1(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) = r^t\cos\omega t, \quad y_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}x_1(t) - \frac{1}{2\mathrm{i}}x_2(t) = r^t\sin\omega t$$

jsou řešením. Jejich Casoratián

$$C(t; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} r^t\cos\omega t & r^t\sin\omega t \\ r^{t+1}\cos\omega(t+1) & r^{t+1}\sin\omega(t+1) \end{vmatrix} =$$

$$= r^{t+2}\big(\cos\omega t\sin\omega(t+1) - \sin\omega t\cos\omega(t+1)\big) =$$

$$= r^{t+2}\big(\cos\omega t(\sin\omega t\cos\omega + \sin\omega\cos\omega t) - \sin\omega t(\cos\omega t\cos\omega - \sin\omega\sin\omega t)\big) =$$

$$= r^{t+2}\left((\cos\omega t)^2 + (\sin\omega t)^2\right)\sin\omega = r^{t+2}\sin\omega \neq 0,$$

poněvadž $r > 0$ a $0 < \omega < \pi$. Posloupnosti y_1, y_2 jsou tedy lineárně nezávislé, tvoří fundamentální systém řešení. Obecné řešení rovnice (2.18) proto můžeme psát ve tvaru

$$x(t) = r^t(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \tag{2.22}$$

kde r a ω jsou dány rovnostmi (2.21).

Příklad: Najdeme řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 8x(t) = 0, \quad x(0) = 1,\ x(1) = -\sqrt{2}.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

má komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 2\mathrm{i} = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{4} \pm \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{4}\right).$$

Fundamentální systém řešení dané rovnice je

$$y_1(t) = 2^t\cos\tfrac{\pi}{4}t, \quad y_2(t) = 2^t\sin\tfrac{\pi}{4}t$$

a její obecné řešení je tvaru

$$x(t) = 2^t\left(A\cos\tfrac{\pi}{4}t + B\sin\tfrac{\pi}{4}t\right).$$

Z počáteční podmínky dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} A \qquad\quad &= 1, \\ \sqrt{2}A + \sqrt{2}B &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

a z nich hodnoty konstant $A = 1$, $B = -2$. Řešení dané úlohy je tedy

$$x(t) = 2^t\left(\cos\tfrac{\pi}{4}t - 2\sin\tfrac{\pi}{4}t\right) = 2^t\cos\tfrac{\pi}{4}t - 2^{t+1}\sin\tfrac{\pi}{4}t.$$

■

Tvar obecného nenulového řešení rovnice (2.18) s $\alpha_1^2 < 4\alpha_0$ můžeme také upravit na tvar

$$x(t) = r^t\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right).$$

Označíme $C = \sqrt{A^2+B^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A}{B}$ a obecné řešení rovnice (2.18) zapíšeme ve tvaru

$$x(t) = Cr^t(\sin\varphi\cos\omega t + \cos\varphi\sin\omega t) = Cr^t\sin(\omega t + \varphi).$$

Dvojnásobný reálný charakteristický kořen

Tento případ nastává, pokud $\alpha_1^2 = 4\alpha_0$. Dvojnásobný kořen charakteristické rovnice (2.20) je $\lambda = -\frac{1}{2}\alpha_1$. Jedna složka fundamentálního systému řešení rovnice (2.18) je tedy dána výrazem

$$y_1(t) = \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t.$$

Druhá složka je podle Tvrzení 3 tvaru

$$y_2(t) = \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} \alpha_0 \frac{\left(-\frac{1}{2}\alpha_1\right)^j}{\left(-\frac{1}{2}\alpha_1\right)^{j+2}} = \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} \alpha_0 \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^{-2} =$$
$$= \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t \sum_{i=t_0}^{t-1} \prod_{j=t_0}^{i-1} 4\frac{\alpha_0}{\alpha_1^2} = \left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t \sum_{i=t_0}^{t-1} 1^{i-t_0} = (t-t_0)\left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t.$$

Obecné řešení rovnice (2.18) je tedy v případě $\alpha_1^2 = 4\alpha_0$ rovno

$$x(t) = A\left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t + Bt\left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t = (A+Bt)\left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^t.$$

Příklad: Najdeme řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 4x(t) = 0, \quad x(0) = 1,\ x(1) = 0.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

má dvojnásobný kořen $\lambda = 2$. Obecné řešení dané rovnice tedy je

$$x(t) = 2^t A + 2^t tB.$$

Z počáteční podmínky dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A \qquad &= 1, \\ 2A + 2B &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení $A = 1$, $B = -1$. Řešení dané úlohy tedy je

$$x(t) = 2^t(1-t).$$

■

Algebraická poznámka: Podívejme se na rovnici (2.18) ještě jinak. Její levou stranu můžeme přepsat do tvaru

$$\left((x^\sigma)^\sigma + \alpha_1 x^\sigma + \alpha_0 x\right)(t),$$

nebo při označení $x^{\sigma^2} = (x^\sigma)^\sigma$ jako

$$\left(x^{\sigma^2} + \alpha_1 x^\sigma + \alpha_0 x\right)(t), \quad \text{případně ještě stručněji} \quad \left(\cdot^{\sigma^2} + \alpha_1 \cdot^\sigma + \alpha_0\right) x(t).$$

Levou stranu rovnice (2.18) tak můžeme chápat jako hodnotu posloupnosti, která je jakýmsi obrazem posloupnosti x. Příslušné zobrazení je součtem tří zobrazení: složení posunu se sebou (dvakrát iterovaný posun, druhý posun), složení posunu a násobení číslem α_1, násobení číslem α_0. Všechna tato tři zobrazení jsou lineární, výsledné zobrazení je proto také lineární.

Můžeme tedy definovat lineární zobrazení $P^{\Sigma} : \mathcal{P}_I \to \mathcal{P}_{(I^{\kappa})^{\kappa}}$ vztahem

$$P^{\Sigma} = \cdot^{\sigma^2} + \alpha_1 \cdot^{\sigma} + \alpha_0;$$

nazveme ho ***kvadratický*** (obecněji ***polynomiální***) ***operátor posunu***. Rovnici (2.18) lze nyní přepsat jako rovnici operátorovou

$$P^{\Sigma} x = 0.$$

Algebraicky řečeno, množina řešení lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je jádrem kvadratického operátoru posunu, což je lineární zobrazení. Odtud opět plyne, že množina řešení homogenní rovnice tvoří vektorový prostor, tj. platí princip superpozice.

2.2.4 Nehomogenní rovnice, jejíž levá strana má konstantní koeficienty

Přidružená homogenní rovnice k nehomogenní lineární rovnici druhého řádu

$$x(t+2) + \alpha_1 x(t) + \alpha_0 x(t) = b(t) \tag{2.23}$$

je rovnice (2.18), kterou jsme se zabývali v předchozí části. Můžeme tedy napsat její fundamentální systém řešení a pak řešení nehomogenní rovnice (2.23) najít pomocí formule variace konstant (2.17).

Příklad: Najdeme řešení počáteční úlohy

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = t, \quad x(0) = 1,\ x(1) = -1.$$

Přidružená homogenní rovnice

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, která má dvojnásoný kořen 1. Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je tedy tvaru $x_H(t) = A + Bt$, řešení splňující počáteční podmínku je

$$x_H(t) = 1 - 2t.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice splňující nulové počáteční podmínky je podle formule variace konstant (2.17)

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \sum_{j=0}^{t-1} j \frac{(j+1) - t}{(j+1) - (j+2)} = -\sum_{j=1}^{t-1} \big(j(j+1) - jt\big) = t\sum_{j=1}^{t-1} j - \sum_{j=1}^{t-1} j(j+1) = \\ &= \tfrac{1}{2}t^2(t-1) - \tfrac{1}{3}(t+1)t(t-1) = \tfrac{1}{6}t(t-1)(t-2). \end{aligned}$$

Celkem tak dostáváme řešení dané úlohy ve tvaru

$$x(t) = 1 - 2t + \tfrac{1}{6}t(t-1)(t-2).$$

■

Příklad: Najdeme obecné řešení nehomogenní rovnice

$$x(t+2)+x(t)=f(t)$$

s obecnou pravou stranou. K přidružené homogenní rovnici

$$x(t+2)+x(t)=0$$

Přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2+1=0$, která má ryze imaginární kořeny $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice je tedy

$$y_1(t)=\cos\tfrac{\pi}{2}t,\quad y_2(t)=\sin\tfrac{\pi}{2}t,$$

obecné řešení této rovnice je

$$x_H(t)=A\cos\tfrac{\pi}{2}t+B\sin\tfrac{\pi}{2}t.$$

Řešení nehomogenní rovnice je dáno formulí variace konstant (2.17),

$$x_N(t)=\sum_{j=t_0}^{t-1}f(j)\frac{\sin\frac{\pi}{2}(j+1)\cos\frac{\pi}{2}t-\cos\frac{\pi}{2}(j+1)\sin\frac{\pi}{2}t}{\cos\frac{\pi}{2}(j+2)\sin\frac{\pi}{2}(j+1)-\cos\frac{\pi}{2}(j+1)\sin\frac{\pi}{2}(j+2)}.$$

Platí

$$\sin\tfrac{\pi}{2}(j+1)=\sin\tfrac{\pi}{2}j\cos\tfrac{\pi}{2}+\sin\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2}j=\cos\tfrac{\pi}{2}j,$$
$$\cos\tfrac{\pi}{2}(j+1)=\cos\tfrac{\pi}{2}j\cos\tfrac{\pi}{2}-\sin\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi}{2}j=-\sin\tfrac{\pi}{2}j,$$

takže

$$\sin\tfrac{\pi}{2}(j+2)=\cos\tfrac{\pi}{2}(j+1)=-\sin\tfrac{\pi}{2}j,\quad \cos\tfrac{\pi}{2}(j+2)=-\sin\tfrac{\pi}{2}(j+1)=-\cos\tfrac{\pi}{2}j,$$

$$\sin\tfrac{\pi}{2}(j+1)\cos\tfrac{\pi}{2}t-\cos\tfrac{\pi}{2}(j+1)\sin\tfrac{\pi}{2}t=\cos\tfrac{\pi}{2}j\cos\tfrac{\pi}{2}t+\sin\tfrac{\pi}{2}j\sin\tfrac{\pi}{2}t=\cos\tfrac{\pi}{2}(t-j),$$

$$\cos\tfrac{\pi}{2}(j+2)\sin\tfrac{\pi}{2}(j+1)-\cos\tfrac{\pi}{2}(j+1)\sin\tfrac{\pi}{2}(j+2)=-\left(\cos\tfrac{\pi}{2}j\right)^2-\left(\sin\tfrac{\pi}{2}j\right)^2=-1.$$

Odtud dostáváme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$x_N=-\sum_{j=t_0}^{t-1}f(j)\cos\tfrac{\pi}{2}(t-j).$$

Řešení dané rovnice tedy je

$$x(t)=A\cos\tfrac{\pi}{2}t+B\sin\tfrac{\pi}{2}t-\sum_{j=t_0}^{t-1}f(j)\cos\tfrac{\pi}{2}(t-j).$$

■

Fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice (2.18) k nehomogenní rovnici (2.23) můžeme pomocí charakteristických kořenů napsat explicitně. Proto také můžeme napsat pomocí sumace tvar partikulárního řešení nehomogenní rovnice, které splňuje nulové počáteční podmínky:

Tvrzení 5. Partikulární řešení x_N nehomogenní rovnice (2.23) splňující počáteční podmínky

$$x(t_0) = 0,\ x(t_0+1) = 0$$

je jednoho z následujících tvarů:

1. Má-li charakteristická rovnice (2.20) dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2, pak

$$x_N(t) = \frac{\lambda_1^{t-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j)\lambda_1^{-j} - \frac{\lambda_2^{t-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j)\lambda_2^{-j} = \\ = \frac{\lambda_1^{t-2}}{1-(\lambda_2/\lambda_1)} \sum_{j=t_0}^{t-1} b(j)\lambda_1^{-j} \left(1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{t-j-1}\right).$$

2. Má-li charakteristická rovnice (2.20) komplexně sdružené kořeny $r(\cos\omega \pm \mathrm{i}\sin\omega)$, pak

$$x_N(t) = \frac{r^{t-2}}{\sin\omega}\left(\sin\omega(t-1)\sum_{j=t_0}^{t-1} b(j)\cos\omega j - \cos\omega(t-1)\sum_{j=t_0}^{t-1} b(j)\sin\omega j\right) = \\ = \frac{r^{t-2}}{\sin\omega}\sum_{j=t_0}^{t-1} b(j)\sin\omega(t-j-1).$$

3. Má-li charakteristická rovnice (2.20) dvojnásobný reálný kořen $\lambda = -\frac{1}{2}\alpha_1 = -\sqrt{\alpha_0}$, pak

$$x_N(t) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=t_0}^{t-1} b(j)\lambda^{t-j}(t-j-1) = \frac{1}{\alpha_0}\sum_{j=t_0}^{t-1} b(j)\left(-\frac{\alpha_1}{2}\right)^{t-j}(t-j-1).$$

Důkaz: Přímým výpočtem na základě výsledků z 2.2.3 a formule variace konstant (2.17). □

2.3 Lineární rovnice k-tého řádu

Jedná se o rovnici

$$\Delta^k x + a_{k-1}(t)\Delta^{k-1}x + a_{k-2}(t)\Delta^{k-2}(t)x + \cdots + a_1(t)\Delta x + a_0(t) = b(t). \tag{2.24}$$

O posloupnostech $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, b předpokládáme, že mají stejný definiční obor, označíme ho D, a pro každé t z tohoto definičního oboru platí

$$a_{k-1}(t) - a_{k-2}(t) + a_{k-3}(t) - \cdots + (-1)^{k-1}a_0(t) \neq 1. \tag{2.25}$$

V případě $b \equiv 0$ se rovnice (2.24) nazývá *homogenní,* v opačném případě *nehomogenní.*

Je-li $t_0 \in D$, jsou počáteční podmínky pro rovnici (2.24) tvaru

$$x(t_0) = \xi_0,\ x(t_0+1) = \xi_1,\ \dots,\ x(t_0+k-1) = \xi_{k-1}. \tag{2.26}$$

Rovnici (2.24) přepíšeme na rovnici druhého typu:

$$\Delta^k x(t) = x(t+k) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(t+k-j) = x(t+k) + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x(t+j),$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j(t)\Delta^j x(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} x(t+j-i) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1} a_j(t)(-1)^i \binom{j}{i} x(t+j-i) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1-i} a_{j+i}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} x(t+j) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1-i} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} x(t+j),$$

takže levá strana rovnice (2.24) je tvaru

$$x(t+k) + \sum_{j=0}^{k-1} \left[(-1)^{k-j} \binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} \right] x(t+j).$$

Označíme

$$c_j(t) = (-1)^{k-j} \binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j} a_{i+j}(t)(-1)^i \binom{j+i}{i} \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

a dostaneme rovnici druhého typu ekvivalentní s rovnicí (2.24) ve tvaru

$$x(t+k) + c_{k-1}(t)x(t+k-1) + c_{k-2}(t)x(t+k-2) + \cdots + c_1(t)x(t+1) + c_0(t)x(t) = b(t); \quad (2.27)$$

podmínka (2.25) zaručí, že $c_0(t) \neq 0$ pro všechna $t \in D$, takže se skutečně jedná o rovnici k-tého řádu. Z tvaru rovnice (2.27) vidíme, že počáteční úloha (2.27), (2.26), nebo ekvivalentně úloha (2.24), (2.26), má jediné řešení, které je definováno na množině D.

2.3.1 Fundamentální systém řešení homogenní rovnice

Lineární homogenní diferenční rovnice k-tého řádu

$$x(t+k) + c_{k-1}(t)x(t+k-1) + c_{k-2}(t)x(t+k-2) + \cdots + c_1(t)x(t+1) + c_0(t)x(t) = 0 \quad (2.28)$$

splňuje *princip superpozice:* jsou-li posloupnosti x_1 a x_2 řešení rovnice (2.28) a p a q jsou libovolné reálné konstanty, pak také posloupnost $x = px_1 + qx_2$ je řešením rovnice (2.41), tj. libovolná lineární kombinace řešení této rovnice je jejím řešením. Navíc nulová posloupnost $x \equiv 0$ je řešením rovnice (2.41). To znamená, že množina všech řešení lineární homogenní diferenční rovnice tvoří vektorový prostor.

Pro $i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ označme y_i posloupnost, která je řešením homogenní rovnice (2.28) s počátečními podmínkami

$$x(t_0 + j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

Pak je zřejmé, že posloupnosti $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ jsou lineárně nezávislé. To znamená, že dimenze vektorového prostoru řešení je alespoň k.

Nechť y je libovolné řešení homogenní rovnice (2.28). Označme

$$\eta_0 = y(t_0),\ \ \eta_1 = y(t_0+1),\ \ \dots,\ \ \eta_{k-1} = y(t_0+k-1).$$

Lineární kombinace posloupností $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ s koeficienty $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}$, tj. posloupnost

$$\eta_0 y_0 + \eta_1 y_1 + \cdots + \eta_{k-1} y_{k-1} \tag{2.29}$$

je podle principu superpozice řešením rovnice (2.28) a splňuje stejné počáteční podmínky, jako posloupnost y. Z jednoznačnosti řešení počáteční úlohy plyne, že posloupnost y a lineární kombinace (2.29) jsou shodné. Odtud dále plyne, že prostor řešení lineární homogenní rovnice (2.28) má dimenzi k a posloupnosti y_i, $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ tvoří bázi tohoto prostoru.

Z provedených úvah plyne, že platí

Věta 1. *Množina všech řešení lineární homogenní difereneční rovnice k-tého řádu (2.28) tvoří vektorový prostor dimenze k.*

Definice 1. Báze vektorového prostoru všech řešení lineární homogenní rovnice (2.28) se nazývá *fundamentální systém řešení.*

Posloupnosti $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (2.28) právě tehdy, když libovolné řešení x této rovnice lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci, tj. právě tehdy, když existují jednoznačně určené konstanty $A_1, A_2, \dots, A_k$ takové, že

$$x(t) = A_1 z_1(t) + A_2 z_2(t) + \cdots + A_k z_k(t) \tag{2.30}$$

pro libovolné t z definičního oboru D. Předchozí rovnost je ekvivalentní s rovnostmi

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 z_1(t) & + & A_2 z_2(t) & + \cdots + & A_k z_k(t) & = & \xi_0 \\
A_1 z_1(t+1) & + & A_2 z_2(t+1) & + \cdots + & A_k z_k(t+1) & = & \xi_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_1 z_1(t+k-1) & + & A_2 z_2(t+k-1) & + \cdots + & A_k z_k(t+k-1) & = & \xi_{k-1}
\end{array} \tag{2.31}$$

a jednoznačná existence konstant $A_1, A_2, \dots, A_k$ je ekvivalentní s jednoznačnou řešitelností (2.31) chápané jako systém (algebraických) rovnic pro neznámé $A_1, A_2, \dots, A_k$. Determinant této soustavy je Casoratián posloupností $z_1, z_2, \dots, z_k$ v indexu t,

$$C(t; z_1, z_2, \dots, z_k) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_k(t) \\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \dots & z_k(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1(t+k-1) & z_2(t+k-1) & \dots & z_k(t+k-1) \end{vmatrix}.$$

Dostáváme tak závěr:

Věta 2. *Posloupnosti $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (2.28) právě tehdy, když každá z nich je řešením rovnice (2.28) a pro každé t z definičního oboru D platí*

$$C(t; z_1, z_2, \dots, z_k) \neq 0,$$

kde $C(t; z_1, z_2, \dots, z_k)$ je Casoratián posloupností $z_1, z_2, \dots, z_k$.

2.3.2 Nehomogenní rovnice a metoda variace konstant

Pokud jsou posloupnosti $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ v rovnicích (2.27) a (2.28) stejné, řekneme, že homogenní lineární diferenční rovnice (2.28) je *přidružená k nehomogenní rovnici* (2.27).

Je-li posloupnost y řešením nehomogenní rovnice (2.27) a posloupnost z je řešením přidružené homogenní rovnice (2.28), pak jejich součet $x = z + y$ je opět řešením nehomogenní rovnice (2.27), neboť

$$x(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)x(t+i) = z(t+k) + y(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)\big(z(t+i) + y(t+i)\big) =$$
$$= \left(z(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)z(t+i)\right) + \left(y(t+k) + \sum_{i=1}^{k} c_i(t)y(t+i)\right) = 0 + b(t) = b(t).$$

Platí tedy

Věta 3. *Nechť $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenční rovnice (2.28) přidružené k nehomogenní rovnici (2.27). Pak každé řešení nehomogenní rovnice (2.27) je tvaru*
$$x(t) = B_1 z_1(t) + B_2 z_2(t) + \dots + B_k z_k(t) + y(t),$$
kde y je nějaké řešení nehomogenní rovnice a $B_1, B_2, \dots, B_k$ jsou konstanty.

Nechť posloupnosti $z_1, z_2, \dots, z_k$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (2.28) přidružené k nehomogenní rovnici (2.28). Pak je

$$z_i(t+k) = -\sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)z_i(t+j) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k. \tag{2.32}$$

Řešení nehomogenní rovnice (2.28) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t), \tag{2.33}$$

kde $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou zatím neurčené posloupnosti. Hledáme ho tedy jako analogii řešení homogenní rovnice (2.30); místo konstant $A_1, A_2, \dots, A_k$ však píšeme posloupnosti — varírujeme konstanty. Z tohoto důvodu se tato metoda řešení nehomogenní rovnice nazývá *metoda variace konstant*.

Nyní můžeme vyjádřit

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1)z_i(t+1) = \sum_{i=1}^{k} \left[\big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+1) + u_i(t)z_i(t+1)\right].$$

Budeme požadovat, aby posloupnosti $u_1, u_2, \dots, u_k$ splňovaly rovnici

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+1) = 0.$$

Pak $x(t+1) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+1)$, takže

$$x(t+2) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1)z_i(t+2) = \sum_{i=1}^{k} \left[\big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+2) + u_i(t)z_i(t+2)\right].$$

Dále budeme požadovat, aby posloupnosti $u_1, u_2, \dots, u_k$ splňovaly rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+2) = 0,$$

takže $x(t+2) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+2)$. Takto budeme pokračovat až k požadavku

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+k-1) = 0$$

a vyjádření $x(t+k-1) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+k-1)$.

Celkem tedy požadujeme

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \tag{2.34}$$

a dostáváme

$$x(t+j) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+j), \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \tag{2.35}$$

V poslední z rovností (2.35), tj. v té, v níž $j = k-1$, budeme psát $t+1$ místo t a upravíme ji s použitím (2.32). Dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+k) &= \sum_{i=1}^{k} u_i(t+1)z_i(t+k) = \sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+k) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+k) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big)z_i(t+k) - \sum_{i=1}^{k} u_i(t)\sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)z_i(t+j). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Současně posloupnost x má být řešením rovnice (2.27), takže s využitím vztahů (2.35) dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+k) &= b(t) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)x(t+j) = b(t) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)\sum_{i=1}^{k} u_i(t)z_i(t+j) = \\ &= b(t) - \sum_{i=1}^{k} u_i(t)\sum_{j=0}^{k-1} c_j(t)z_i(t+j). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Porovnáním (2.36) a (2.37) vidíme, že

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\Delta u_i(t)\big) z_i(t+k) = b(t). \tag{2.38}$$

Diference posloupností $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tedy splňují systém rovnic (2.34), (2.38). Přepíšeme ho do tvaru

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
z_1(t+1)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+1)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+1)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
z_1(t+2)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+2)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+2)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
z_1(t+k-1)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+k-1)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+k-1)\,\Delta u_k(t) & = & 0\\
z_1(t+k)\,\Delta u_1(t) & + & z_2(t+k)\,\Delta u_2(t) & + & \cdots & + & z_k(t+k)\,\Delta u_k(t) & = & b(t).
\end{array}$$

Determinant této soustavy je Casoratiánem fundamentálního systému řešení homogenní rovnice (2.28) v indexu $t+1$. Je tedy nenulový a soustava je jednoznačně řešitelná. Označíme

$$w(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_k(t)\\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \ldots & z_k(t+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_1(t+k-1) & z_2(t+k-1) & \ldots & z_k(t+k-1) \end{vmatrix},$$

$$m_i(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_{i-1}(t) & z_{i+1}(t) & \ldots & z_k(t)\\ z_1(t+1) & z_2(t+1) & \ldots & z_{i-1}(t+1) & z_{i+1}(t+1) & \ldots & z_k(t+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_1(t+k-2) & z_2(t+k-2) & \ldots & z_{i-1}(t+k-2) & z_{i+1}(t+k-2) & \ldots & z_k(t+k-2) \end{vmatrix};$$

$w(t)$ je Casoratián fundamentálního řešení homogenní rovnice (2.28). Diference posloupností $u_1, u_2, \ldots u_k$ nyní můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Delta u_i(t) = \frac{(-1)^{k+i} b(t) m_i(t+1)}{w(t+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Odtud a z rovnosti (1.3) dostaneme

$$u_i(t) = u_i(t_0) + (-1)^{k+i} \sum_{j=t_0}^{t-1} \frac{b(j) m_i(j+1)}{w(j+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Při označení $B_i = u_i(t_0)$ můžeme řešení rovnice (2.27) podle vztahu (2.33) psát ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} B_i z_i(t) + (-1)^k \sum_{j=t_0}^{t-1} \frac{b(j)}{w(j+1)} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i m_i(j+1) z_i(t).$$

2.3.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici

$$\Delta^k x + \alpha_{k-1}\Delta^{k-1}x + \alpha_{k-2}\Delta^{k-2}x + \cdots + \alpha_1\Delta x + \alpha_0 = 0, \tag{2.39}$$

kde reálné koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ splňují rovnost

$$\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2} + \alpha_{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1}\alpha_0 \neq 1 \tag{2.40}$$

analogickou k rovnosti (2.25). Rovnice (2.39) má pro libovolné počáteční podmínky tvaru (2.26) jediné řešení, které je definováno pro každé $t \in \mathbb{Z}$.

Stejně jako v případě obecné lineární rovnice k-tého řádu můžeme rovnici (2.39) přepsat na rovnici druhého typu

$$x(t+k) + \gamma_{k-1}x(t+k-1) + \gamma_{k-2}x(t+k-2) + \cdots + \gamma_1 x(t+1) + \gamma_0 x(t) = 0, \tag{2.41}$$

kde jsme označili

$$\gamma_j = (-1)^{k-j}\binom{k}{j} + \sum_{i=0}^{k-1-j}\alpha_{i+j}(-1)^i\binom{j+i}{i} \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

S pomocí operátoru posunu $^\sigma$ můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$x^{\sigma^k}(t) + \gamma_{k-1}x^{\sigma^{k-1}}x(t) + \gamma_{k-2}x^{\sigma^{k-2}}x(t) + \cdots + \gamma_1 x^\sigma(t) + \gamma_0 x(t) = 0.$$

Položíme-li $\gamma_k = 1$, můžeme operátorovou rovnici zapsat ještě stručněji

$$\left(\sum_{i=0}^{k}\gamma_i \cdot^{\sigma^i}\right) x \equiv 0. \tag{2.42}$$

Ze stejných důvodů jako v odstavci 2.2.3 budeme řešení rovnice (2.41) hledat ve tvaru $x(t) = \lambda^t$, kde λ je zatím neurčená nenulová konstanta. Dosadíme tuto posloupnost do rovnice (2.41)

$$\lambda^{t+k} + \gamma_{k-1}\lambda^{t+k-1} + \gamma_{k-2}\lambda^{t+k-2} + \cdots + \gamma_1\lambda^{t+1} + \gamma_0\lambda^t = 0$$

a po vynásobení výrazem λ^{-t} dostaneme *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + \gamma_{k-1}\lambda^{k-1} + \gamma_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0 = 0. \tag{2.43}$$

Řešení této algebraické rovnice se nazývají *charakteristické kořeny*. Povšimněme si, že žádný kořen rovnice (2.43) není nulový, neboť $\gamma_0 \neq 0$.

Věta 4. *Nechť λ_p je r-násobný kořen charakteristické rovnice (2.43). Pak každá z posloupností definovaných vztahem*

$$x(t) = t^q\lambda_p^t, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (2.41).

Důkaz: Položíme $\gamma_k = 1$ a polynom na levé straně rovnice (2.43) označíme $P(\lambda)$, tj.

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \lambda^i.$$

Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: Ke každému přirozenému číslu s a každému přirozenému číslu $j \in \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ existuje polynom $p_{s,j}$ stupně nejvýše s ve dvou proměnných t, λ takový, že

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i = \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda).$$

Tvrzení dokážeme úplnou indukcí vzhledem k proměnné s. Pro $s = 0$ je

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^0 \lambda^i = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \lambda^i = P(\lambda) = 1P^{(0)}(\lambda),$$

tedy $p_{0,0} \equiv 1$.

Indukční krok je obsažen ve výpočtu:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^{s+1} \lambda^i &= \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s (t+i) \lambda^i = t \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i + \lambda \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s i \lambda^{i-1} = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \lambda^i = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\sum_{i=0}^{k} \gamma_i (t+i)^s \lambda^i - \gamma_0 t^s \right) = \\
&= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) - \gamma_0 t^s \right) =
\end{aligned}$$

$$= t \sum_{j=0}^{s} p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} P^{(j)}(\lambda) + p_{s,j}(t,\lambda) P^{(j+1)}(\lambda) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{s} \left(t p_{s,j}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} \right) P^{(j)}(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^{s+1} p_{s,j-1}(t,\lambda) P^{(j)}(\lambda) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(t p_{s,0}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,0}(t,\lambda)}{\partial \lambda} \right) P(\lambda) + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{s} \left(t p_{s,j}(t,\lambda) + \lambda \frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial \lambda} + \lambda p_{s,j-1}(t,\lambda) \right) P^{(j)}(\lambda) + \\
&\qquad\qquad + \lambda p_{s,s}(t,\lambda) P^{(s+1)}(\lambda).
\end{aligned}$$

Stačí tedy položit

$$
\begin{aligned}
p_{s+1,0}(t,\lambda) &= tp_{s,0}(t,\lambda) + \lambda\frac{\partial p_{s,0}(t,\lambda)}{\partial\lambda},\\
p_{s+1,j}(t,\lambda) &= tp_{s,j}(t,\lambda) + \lambda\frac{\partial p_{s,j}(t,\lambda)}{\partial\lambda} + \lambda p_{s,j-1}(t,\lambda) \quad \text{pro } j = 1,2,\dots,s,\\
p_{s+1,s+1}(t,\lambda) &= \lambda p_{s,s}(t,\lambda)
\end{aligned}
$$

a pomocné tvrzení je dokázáno.

Nechť nyní λ_p je r-násobný kořen charakteristické rovnice. Pak je také kořenem derivací polynomu P až do řádu $r-1$, tj.

$$P^{(j)}(\lambda_p) = 0 \quad \text{pro } j = 0,1,2,\dots,r-1.$$

Nyní pro $x(t) = t^q\lambda_p^t$, $q \in \{0,1,2,\dots,r-1\}$, podle pomocného tvrzení platí

$$\sum_{i=0}^{k}\gamma_i x(t+i) = \sum_{i=0}^{k}\gamma_i(t+i)^q\lambda_p^{t+i} = \lambda^t\sum_{i=0}^{k}\gamma_i(t+i)^q\lambda_p^i = \lambda^t\sum_{j=0}^{q}p_{q,j}(t,\lambda)P^{(j)}(\lambda) = 0.$$

□

Důsledek 1. Nechť $\lambda_c = a(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ je r-násobný komplexní kořen charakteristické rovnice (2.43). Pak každá z posloupností definovaných některým ze vztahů

$$x_1(t) = t^q a^t\cos t\varphi, \quad x_2(t) = t^q a^t \sin t\varphi, \qquad q = 0,1,2,\dots,r-1$$

je řešením lineární homogenní diferenční rovnice (2.41).

Důkaz: Poněvadž polynom na levé straně rovnice (2.43) má reálné koeficienty, je také komplexně sdružené číslo $\bar\lambda_c = a(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$ kořenem charakteristické rovnice (2.43) a má stejnou násobnost r. Podle Věty 4 (v níž jsme nepředpokládali, že by kořen charakteristické rovnice byl reálný), je každá z posloupností definovaných vztahem

$$\tilde x_1(t) = t^q a^t(\cos t\varphi + \mathrm{i}\sin t\varphi), \quad \tilde x_2(t) = t^q a^t(\cos t\varphi - \mathrm{i}\sin t\varphi), \qquad q = 0,1,2,\dots,r-1$$

řešením rovnice (2.41). Podle principu superpozice jsou také posloupnosti

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\big(\tilde x_1(t) + \tilde x_2(t)\big), \quad x_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\tilde x_1(t) - \tilde x_2(t)\big)$$

řešením této rovnice. □

Důsledek 2. Každému reálnému r-násobnému charakteristickému kořenu λ odpovídá r řešení lineární homogenní rovnice (2.41)

$$\lambda^t,\ t\lambda^t,\ t^2\lambda^t,\dots,\ t^{r-1}\lambda^t$$

a každému komplexnímu r-násobnému charakteristickému kořenu $a(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ odpovídá $2r$ řešení lineární homogenní rovnice (2.41)

$$a^t\cos t\varphi,\ ta^t\cos t\varphi,\ t^2a^t\cos t\varphi,\dots,\ t^{r-1}a^t\cos t\varphi,$$

$$a^t\sin t\varphi,\ ta^t\sin t\varphi,\ t^2a^t\sin t\varphi,\dots,\ t^{r-1}a^t\sin t\varphi.$$

Důsledek 3. Nechť

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k_1}$$

jsou všechny jednoduché reálné různé charakteristické kořeny,

$$\lambda_{k_1+1}, \lambda_{k_1+2}, \ldots, \lambda_{k_2}$$

jsou všechny reálné různé charakteristické kořeny, které mají násobnosti $r_{k_1+1}, r_{k_1+2}, \ldots, r_{k_2}$ (v tomto pořadí) a

$$a_{k_2+1}(\cos\varphi_{k_2+1} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_2+1}), a_{k_2+2}(\cos\varphi_{k_2+2} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_2+2}), \ldots, a_{k_3}(\cos\varphi_{k_3} + \mathrm{i}\sin\varphi_{k_3})$$

jsou všechny komplexní charakteristické kořeny takové, že žádné dva z nich nejsou komplexně sdružené a mají násobnosti $r_{k_2+1}, r_{k_2+2}, \ldots, r_{k_3}$ (v tomto pořadí). Přitom samozřejmě platí

$$k_1 + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} r_i + 2\sum_{i=k_2+1}^{k_3} r_i = k.$$

Pak posloupnost definovaná vztahem

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k_1} A_i\lambda_i^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2}\sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij}t^j\lambda_i^t + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij}t^j a_i^t\cos t\varphi_i + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1} D_{ij}t^j a_i^t\sin t\varphi_i, \tag{2.44}$$

kde $A_i, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ jsou konstanty, je řešením lineární homogenní rovnice (2.41).

Nechť existuje charakteristický kořen, jehož modul (absolutní hodnota) je větší, než moduly všech ostatních charakteristických kořenů. Takový charakteristický kořen musí být reálný a jednoduchý, můžeme ho tedy označit λ_1. Platí

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \text{ pro } i = 2, 3, \ldots, k_2, \qquad |\lambda_1| > a_i \text{ pro } i = k_2+1, k_2+2, \ldots, k_3.$$

Charakteristický kořen λ_1 s těmito vlastnostmi nazveme *ryze dominantní*. Nyní pro řešení $x(t)$ rovnice (2.41) definované vztahem (2.44) za předpokladu $A_1 \neq 0$ platí

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{A_1\lambda_1^t} = \lim_{t\to\infty}\left(1 + \sum_{i=2}^{k_1}\frac{A_i}{A_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{B_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{C_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{a_i}{\lambda_1}\right)^t\cos t\varphi_i + \sum_{i=k_2+1}^{k_3}\sum_{j=0}^{r_i-1}\frac{D_{ij}}{A_1}t^j\left(\frac{a_i}{\lambda_1}\right)^t\sin t\varphi_i\right) = 1.$$

Dostáváme tak

Důsledek 4. Pokud existuje ryze dominantní charakteristický kořen λ_1 a konstanta A_1 v řešení (2.44) rovnice (2.41) je nenulová, pak toto řešení je asymptoticky ekvivalentní s geometrickou posloupností s kvocientem λ_1.

Řekneme, že charakteristický kořen je *dominantní,* pokud jeho modul není menší než modul jakéhokoliv charakteristického kořene, tj. dominantní charakteristický kořen má maximální modul. Označme tento maximální modul symbolem Λ.

Nechť jsou charakteristické kořeny označeny jako v Důsledku 3 a navíc platí

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \cdots \geq |\lambda_{k_1}|,$$

$$|\lambda_{k_1+1}| \geq |\lambda_{k_1+2}| \geq \cdots \geq |\lambda_{k_2}|, \quad a_{k_2+1} \geq a_{k_2+2} \geq \cdots \geq a_{k_3}.$$

Položme

$$l_1 = \begin{cases} 2, & \Lambda = |\lambda_2|, \\ 1, & \Lambda = |\lambda_1| > |\lambda_2|, \\ 0, & \Lambda > |\lambda_1|, \end{cases} \quad l_2 = \begin{cases} \max\big\{i \in \{k_2+1, k_2+2, \ldots, k_3\} : a_i = \Lambda\big\}, & \Lambda = a_{k_2+1}, \\ k_2, & \Lambda > a_{k_2+1}. \end{cases}$$

Nechť dominantní charakteristické kořeny jsou jednoduché, tj. $|\lambda_{k_1+1}| < \Lambda$ a pokud $l_2 > k_2$ tak $\max\big\{r_i : i \in \{k_2+1, k_2+2, \ldots, l_2\}\big\} = 1$. Označme

$$y(t) = \sum_{i=1}^{l_1} A_i (\operatorname{sgn} \lambda_i)^t + \sum_{i=k_2+1}^{l_2} (C_{i0} \cos t\varphi_i + D_{i0} \sin t\varphi_i).$$

Pak

$$\frac{x(t)}{\Lambda^t} - y(t) = \sum_{i=l_1+1}^{k_1} A_i \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^t + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij} t^j \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^t + \\ + \sum_{i=l_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{ij} t^j \left(\frac{a_i}{\Lambda}\right)^t \cos t\varphi_i + \sum_{i=l_2+1}^{k_3} \sum_{j=0}^{r_i-1} D_{ij} t^j \left(\frac{a_i}{\Lambda}\right)^t \sin t\varphi_i.$$

Limita pro $t \to \infty$ posloupnosti na pravé straně této rovnosti je rovna 0. To — zhruba řečeno — znamená, že „pro dostatečně velké t se řešení rovnice (2.41) chová jako posloupnost y“.

Poněvadž pro libovolné t platí nerovnosti

$$-\infty < -\sum_{i=1}^{l_1} |A_i| - \sum_{i=k_2+1}^{l_2} \big(|C_{i0}| + |D_{i0}|\big) \leq y(t) \leq \infty < -\sum_{i=1}^{l_1} |A_i| + \sum_{i=k_2+1}^{l_2} \big(|C_{i0}| + |D_{i0}|\big) < \infty,$$

je

$$-\infty < m = \liminf_{t\to\infty} y(t) \leq \limsup_{t\to\infty} = M < \infty,$$

pro řešení $x(t)$ rovnice (2.41) definované rovností (2.44) platí

$$m\Lambda^t \leq x(t) \leq M\Lambda^t.$$

2.3.4 Rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

Uvažujme nehomogenní lineární diferenční rovnici k-tého řádu druhého typu

$$x(t+k) + \gamma_{k-1} x(t+k-1) + \cdots + \gamma_1 x(t+1) + \gamma_0 x(t) = b(t) \tag{2.45}$$

a k ní přidruženou lineární homogenní rovnici (2.41). Označme polynomiální operátor posunu z levé strany operátorové rovnice (2.42) symbolem P^Σ; homogenní rovnici (2.41) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$P^\Sigma x(t) \equiv 0 \quad \text{nebo} \quad P^\Sigma x = 0,$$

a nehomogenní rovnici ve tvaru

$$P^\Sigma x(t) = b(t) \quad \text{nebo} \quad P^\Sigma x = b.$$

Definice 2. Nechť p je posloupnost, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}$ jsou konstanty takové, že $\beta_0 \neq 0 \neq \beta_l$, a nechť R^Σ je polynomiální operátor posunu, $R^\Sigma = \sum_{i=0}^{l} \beta_i \cdot^{\sigma^i}$. Řekneme, že operátor R^Σ je *anihilátor* posloupnosti p, pokud

$$R^\Sigma p \equiv 0.$$

Podle této terminologie je P^Σ anihilátorem každého řešení homogenní rovnice (2.41).

Nechť existuje anihilátor $Q^\Sigma = \sum_{i=0}^{l} \beta_i \cdot^{\sigma^i}$ posloupnosti b, která je na pravé straně nehomogenní rovnice (2.45). To znamená, že b je řešením nějaké lineární homogenní rovnice s konstatntními koeficienty, takže podle Důsledku 2 je posloupnost b lineární kombinací výrazů κ^t, $t^m\kappa^t$, $\cos t\psi$, $\sin t\psi$, $t^n \cos t\psi$, $t^n \sin t\psi$, $t^m\kappa^t \cos t\psi$, $t^m\kappa^t \sin t\psi$. Nechť dále y je řešením nehomogenní rovnice (2.45). Pak platí

$$Q^\Sigma P^\Sigma y \equiv 0. \tag{2.46}$$

To znamená, že řešení nehomogenní lineární rovnice k-tého řádu je současně řešením lineární rovnice $(k+l)$-tého řádu.

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $p \leq k$, jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$P^\Sigma x \equiv 0$$

a $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$, $q \leq l$, jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$Q^\Sigma x \equiv 0.$$

Nyní rozlišíme dva případy.

Případ 1: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\} = \emptyset$. V tomto případě můžeme psát řešení nehomogenní rovnice podle tabulky 2.1. Takové obecně zapsané řešení dosadíme do rovnice (2.45) a vypočítáme konstanty C_j, D_j.

Případ 2: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\} \neq \emptyset$. V tomto případě nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice (2.46) a vynecháme v něm všechny členy, které se vyskytují v obecném řešení přidružené homogenní rovnice (2.41). Tím dostaneme řešení nehomogenní rovnice (2.45) s neurčitými koeficienty, které určíme dosazením do původní rovnice (2.45).

Příklad:

Najdeme obecné řešení nehomogenní rovnice druhého řádu

$$x(t+2) - 4x(t+1) + 3x(t) = t^2. \tag{2.47}$$

$b(t)$	tvar řešení
a^t	$C_1 a^t$
t^m	$C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m$
$t^m a^t$	$a^t \left(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m\right)$
$\sin\psi t,\ \cos\psi t$	$C_1 \sin\psi t + C_2 \cos\psi t$
$a^t \sin\psi t,\ a^t \cos\psi t$	$a^t \left(C_1 \sin\psi t + C_2 \cos\psi t\right)$
$a^t t^m \sin\psi t,\ a^t t^m \cos\psi t$	$a^t \left[(C_0 + C_1 t + \cdots + C_m t^m)\sin\psi t + \right.$ $\left. + (D_0 + D_1 t + \cdots + D_m t^m)\cos\psi t\right]$

Tabulka 2.1: Tvary řešení nehomogenní rovnice (2.45) pro různé pravé strany b.

Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

má množina charakteristických kořenů $\Lambda = \{1, 3\}$, její obecné řešení je proto posloupnost daná předpisem

$$x(t) = A \cdot 3^t + B.$$

Anihilátor řešení přidružené homogenní rovnice je polynomiální operátor posunu

$$P^\Sigma = \cdot^{\sigma^2} - 4 \cdot^{\sigma} + 3\,\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$$

(koeficienty v operátoru P^Σ jsou stejné, jako koeficienty v charakteristickém polynomu).

Pravá strana dané rovnice je řešením lineární homogenní rovnice, která má trojnásobný charakteristický kořen $\mu = 1$. Nejjednodušší taková algebraická rovnice je $(\mu - 1)^3 = 0$. Posloupnost na pravé straně rovnice (2.47) je tedy řešením lineární homogenní diferenční rovnice

$$x(t+3) - 3x(t+2) + 3x(t+1) - x(t) = 0, \tag{2.48}$$

její anihilátor je

$$Q^\Sigma = (\cdot^{\sigma} - \mathrm{id}_{\mathcal{P}})^3 = \cdot^{\sigma^3} - 3 \cdot^{\sigma^2} + 3 \cdot^{\sigma} - \mathrm{id}_{\mathcal{P}}\,.$$

Množina charakteristických kořenů rovnice (2.48) je jednoprvková $M = \{1\}$. To znamená, že $\Lambda \cap M = \{1\} \neq \emptyset$, tj. nastává Případ 2.

Posloupnost na levé straně relace (2.46) je v tomto konkrétním případě dána výrazem

$$\begin{aligned}
\left(Q^\Sigma P^\Sigma y\right)(t) &= Q^\Sigma\big(y(t+2) - 4y(t+1) + 3y(t)\big) = \\
&= \big(y(t+5) - 4y(t+4) + 3y(t+3)\big) - 3\big(y(t+4) - 4y(t+3) + 3y(t+2)\big) + \\
&\quad + 3\big(y(t+3) - 4y(t+2) + 3y(t+1)\big) - \big(y(t+2) - 4y(t+1) + 3y(t)\big) = \\
&= y(t+5) - 7y(t+4) + 18y(t+3) - 22y(t+2) + 13y(t+1) - 3y(t).
\end{aligned}$$

Homogenní rovnice

$$y(t+5) - 7y(t+4) + 18y(t+3) - 22y(t+2) + 13y(t+1) - 3y(t) = 0 \tag{2.49}$$

má charakteristickou rovnici

$$\lambda^5 - 7\lambda^4 + 18\lambda^3 - 22\lambda^2 + 13\lambda - 3 = 0,$$

po úpravě

$$(\lambda-3)(\lambda-1)^4=0.$$

Tato rovnice má jednoduchý kořen $\lambda=3$ a čtyřnásobný kořen $\lambda=1$, obecné řešení homogenní rovnice (2.49) tedy je posloupnost daná předpisem

$$y(t)=A\cdot 3^t+B+Ct+Dt^2+Et^3. \tag{2.50}$$

Vynecháním členů, které se vyskytují v obecném řešení přidružené homogenní rovnice k rovnici zadané dostaneme řešení nehomogenní rovnice (2.47) ve tvaru s neurčitými koeficienty

$$Ct+Dt^2+Et^3,$$

které určíme dosazením do dané rovnice:

$$\begin{aligned}C(t+2)+D(t+2)^2+E(t+2)^3-4\left(C(t+1)+D(t+1)^2+E(t+1)^3\right)+3\left(Ct+Dt^2+Et^3\right)=\\=-6Et^2-4Dt-2C+4E=2t^2.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rrrl} & & -6E & =2\\ & D & & =0\\ -C & & +2E & =0,\end{array}$$

která má řešení $E=-\frac{1}{3}$, $D=0$, $C=-\frac{2}{3}$. Celkem dostáváme obecné řešení rovnice (2.47) ve tvaru

$$x(t)=A\cdot 3^t+B-\tfrac{2}{3}t-\tfrac{1}{3}t^3.$$

Ještě poznamenejme, že uvedený postup měl především ilustrovat obecnou teorii. Pro praktické počítání je příliš zdlouhavý; zejména vyjadřování příslušných anihilátorů není pro nalezení výsledků nutné. Bezprostředně lze totiž psát, že řešení nehomogenní rovnice (2.47) je řešením lineární homogenní rovnice pátého řádu, jejíž charakteristická rovnice je tvaru

$$(\lambda-1)^3\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)=0.$$

Poté napíšeme obecné řešení takové rovnice – což je posloupnost (2.50), dosadíme do rovnice zadané a tak určíme tři z pěti konstant obecného řešení. ■

Stručně lze říci, že „speciální pravá strana rovnice (2.45)“ je taková posloupnost b, která je řešením nějaké lineární homogenní rovnice. V takovém případě vezmeme všechny charakteristické kořeny rovnice, jejímž řešením posloupnost b je (ty jsou vidět již z tvaru posloupnosti b podle Důsledků 1–3 Věty 4), a všechny charakteristické kořeny lineární homogenní rovnice přidružené k rovnici (2.45); kořeny bereme včetně násobností. Napíšeme obecné řešení homogenní rovnice odpovídající všem těmto charakteristickým kořenům, dosadíme ho do dané rovnice a určíme všechny konstanty, které určit lze.

Příklad:

Najdeme obecné řešení rovnice

$$x(t+2) + x(t) = t\cos\tfrac{1}{2}\pi t.$$

Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i} = \cos\frac{1}{2}\pi \pm \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\pi$. Posloupnost na pravé straně dané rovnice je řešením lineární homogenní rovnice, která má dvojnásobný kořen $\lambda = \mathrm{i}$; abychom zůstali v reálném oboru, vezmeme dvojici komplexně sdružených dvojnásobných kořenů $\lambda = \pm\mathrm{i}$. Máme tedy celkem trojnásobné komplexně sdružené kořeny $\lambda = \pm\mathrm{i} = \cos\frac{1}{2}\pi \pm \mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\pi$ a obecný tvar řešení

$$x(t) = A\cos\tfrac{1}{2}\pi t + B\sin\tfrac{1}{2}\pi t + Ct\cos\tfrac{1}{2}\pi t + Dt\sin\tfrac{1}{2}\pi t + Et^2\cos\tfrac{1}{2}\pi t + Ft^2\sin\tfrac{1}{2}\pi t.$$

Tuto posloupnost dosadíme do dané rovnice. Poněvadž

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi(t+2) = \cos\tfrac{1}{2}\pi t\cos\pi - \sin\tfrac{1}{2}\pi t\sin\pi = -\cos\tfrac{1}{2}\pi t,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\pi(t+2) = \sin\tfrac{1}{2}\pi t\cos\pi + \cos\tfrac{1}{2}\pi t\sin\pi = -\sin\tfrac{1}{2}\pi t,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x(t+2)+x(t) = {}&-A\cos\tfrac{1}{2}\pi t - B\sin\tfrac{1}{2}\pi t - C(t+2)\cos\tfrac{1}{2}\pi t - D(t+2)\sin\tfrac{1}{2}\pi t- \\ &- E(t^2+4t+4)\cos\tfrac{1}{2}\pi t - F(t^2+4t+4)\sin\tfrac{1}{2}\pi t+ \\ &+ A\cos\tfrac{1}{2}\pi t + B\sin\tfrac{1}{2}\pi t + Ct\cos\tfrac{1}{2}\pi t + Dt\sin\tfrac{1}{2}\pi t + Et^2\cos\tfrac{1}{2}\pi t + Ft^2\sin\tfrac{1}{2}\pi t = \\ &= -(4Et+2C+4E)\cos\tfrac{1}{2}\pi t - (4Ft+2D+4F)\sin\tfrac{1}{2}\pi t. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostáváme $-4E = 1$, $2C+4E = 0$, $4F = 0$, $2D+4F = 0$, tedy $C = \frac{1}{2}$, $E = -\frac{1}{4}$, $D = F = 0$ a koeficienty A, B zůstávají neurčené. Obecné řešení dané rovnice je dáno výrazem

$$x(t) = A\cos\tfrac{1}{2}\pi t + B\sin\tfrac{1}{2}\pi t + \tfrac{1}{2}t\cos\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}t^2\cos\tfrac{1}{2}\pi = \left(A + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}t^2\right)\cos\tfrac{1}{2}\pi t + B\sin\tfrac{1}{2}\pi t,$$

kde A, B jsou konstanty. ■

Pro nehomogenní lineární diferenční rovnice tvaru (2.45) s pravou stranou ve tvaru polynomu můžeme zformulovat ještě jednodušší pravidlo pro hledání řešení: Nechť m je stupeň polynomu na pravé straně rovnice (2.45) a n je násobnost charakteristického kořene $\lambda = 1$ přidružené homogenní rovnice (samozřejmě, že může být $n = 0$, pokud charakteristická rovnice nemá kořen 1). Pak řešení nehomogenní rovnice je tvaru polynomu stupně $n + m$.

2.3.5 Cauchyho-Eulerova rovnice

Cauchyho-Eulerova rovnice druhého řádu je tvaru

$$t(t+1)x(t+2) + \alpha_1 t x(t+1) + \alpha_0 x(t) = b(t), \tag{2.51}$$

kde $\alpha_0 \neq 0$. Aby se skutečně jednalo o lineární rovnici druhého řádu, uvažujeme ji na oboru $t > 0$. Rešení rovnice (2.51) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = \frac{y(t)}{(t-1)!} \tag{2.52}$$

kde y je zatím neurčená posloupnost. Při této substituci je

$$x(t+1) = \frac{y(t+1)}{t!} = \frac{1}{t}\frac{y(t+1)}{(t-1)!}, \qquad x(t+2) = \frac{y(t+2)}{(t+1)!} = \frac{1}{(t+1)t}\frac{y(t+2)}{(t-1)!}.$$

Po dosazení tohoto vyjádření do rovnice (2.51) dostaneme lineární diferenční rovnici

$$y(t+2) + \alpha_1 y(t+1) + \alpha_0 y(t) = (t-1)!\, b(t)$$

pro neznámou posloupnost y, což je lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty na levé straně.

Příklad: Najdeme obecné řešení rovnice

$$t(t+1)x(t+2) - x(t) = 1.$$

Substituce

$$x(t) = \frac{y(t)}{(t-1)!}$$

ji převádí na rovnici

$$y(t+2) - y(t) = (t-1)!.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ má dva reálné různé kořeny $\lambda_{1,j} = \pm 1$. Podle Tvrzení 5 je partikulární řešení nehomogenní rovnice tvaru

$$y_N(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t-1}(j-1)!\left(1-(-1)^{t-j-1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{t-2} j!\left(1-(-1)^{t-j}\right),$$

takže obecné řešení transformované rovnice je

$$y(t) = A + (-1)^t B + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{t-2} j!\left(1-(-1)^{t-j}\right).$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení dané rovnice ve tvaru

$$x(t) = \frac{A+(-1)^t B}{(t-1)!} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{t-2}\frac{1-(-1)^{t-j}}{(t-1)(t-2)\cdots(j+1)}.$$

■

S pomocí faktoriálové posloupnost (viz str. 7) zapíšeme Cauchyho-Eulerovu rovnici druhého řádu v kratším tvaru

$$(t+1)^{(2)}x(t+2) + \alpha_1 t^{(1)}x(t+1) + \alpha_0 x(t) = b(t).$$

Cauchyho-Eulerova rovnice k-tého řádu je rovnice tvaru

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j (t+j-1)^{(j)}x(t+j) = b(t); \tag{2.53}$$

přitom $\alpha_k\alpha_0 \neq 0$ a $t > 0$. Opět použijeme substituci (2.52). V tomto případě je

$$x(t+j) = \frac{y(t+j)}{(t+j-1)!}$$

a tedy

$$(t+j-1)^{(j)}x(t+j) = \frac{(t+j-1)!}{(t+j-1-j)!}\,\frac{y(t+j)}{(t+j-1)!} = \frac{y(t+j)}{(t-1)!}.$$

Substituce (2.52) převádí rovnici (2.53) na lineární rovnici k-tého řádu s konstantními koeficienty na levé straně

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(t+j) = (t-1)!\,b(t).$$

2.4 Cvičení

V úlohách 1–6 najděte řešení dané rovnice s počáteční podmínkou $x(0) = 1$.

1. $x(t+1) = (t+1)x(t)$
2. $x(t+1) = 3^t x(t)$
3. $x(t+1) = \mathrm{e}^{2t}x(t)$
4. $x(t+1) = \frac{1}{2}x(t) + 2$
5. $x(t+1) = x(t) + \mathrm{e}^t$
6. $x(t+1) = \dfrac{t}{t+1}x(t) + 4$

7. Nechť je na konci každého období do banky ukládána částka \$ 200 a banka platí každé období úrok 0,8%. Jaká je uložená částka po n obdobích.

8. Dluh \$ 12 000 má být amortizována splátkami \$ 380 na konci každého měsíce, plus jedna závěrečná splátka menší. Úrok 12% p.a. je připisován každý měsíc. Určete čas splácení (v měsících) a závěrečnou splátku.

9. Úvěr \$ 80 000 má být splacen pravidelnými měsíčními splátkami. Úroková sazba je 10% p.a. Jaká je měsíční splátka, aby byl dluh splacen do 30 měsíců.

10. Hypotéka na 30 let má úrokovou sazbu 8% p.a. Jste schopni splácet \$ 1 000 měsíčně. Kolik si můžete půjčit?

11. Pokud organismus žije, je v jeho tkáních zastoupení radioaktivního uhlíku ^{14}C stejné jako v atmosféře. Po uhynutí organismu se radioaktivní uhlík rozkládá s poločasem rozpadu 5 700 let. Ve vzorku je ^{14}C zastoupen ze 70% ve srovnání s atmosférou. Jak je vzorek starý?

12. Slon se dožije průměrně 65 let. Jedna samice má mládě jednou za 4 roky, poměr samců a samic mezi novorozenými slůňaty je 1 : 1. Kolik zvířat je nutné každý rok odstřelit, aby na území, jehož úživnost je několik tisíc slonů žilo trvale 250 slonic a 50 slonů?

V úlohách 13–24 najděte obecné řešení dané rovnice.

13. $x(t+2) - 16x(t) = 0$

14. $x(t+2) + 16x(t) = 0$

15. $\Delta^3 x(t) = 0$

16. $\left(\sigma^2 + 2\right)^2 x(t) = 0$

17. $(\sigma - 3)^2 \left(\sigma^2 + 4\right) x(t) = 0$

18. $x(t+2) + 8x(t+1) + 12x(t) = \mathrm{e}^t$

19. $x(t+2) - x(t+1) - 6x(t) = 5 \cdot 3^t$

20. $x(t+2) + x(t+1) - 6x(t) = 5 \cdot 3^t$

21. $x(t+2) + x(t+1) - 12x(t) = t \cdot 2^t$

22. $x(t+2) + 4x(t) = 8 \cdot 2^t \cos \frac{1}{2}\pi t$

23. $x(t+2) - 5x(t+1) + 6x(t) = t + 1$

24. $x(t+2) - 5x(t+1) + 4x(t) = 4^t - t^2$

25. Najděte řešení počáteční úlohy $x(t+3) - 7x(t+2) + 16x(t+1) - 12x(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $x(2) = 1$.

26. Napište lineární diferenční rovnici druhého řádu, jejímž řešením je posloupnost $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 1, 3, 7, 19, 47, ...

V úlohách 27–30 najděte řešení daného počátečního problému.

27. $\begin{aligned} x(t+1) &= -x(t) + y(t), \\ y(t+1) &= \phantom{-x(t) + {}} 2y(t), \end{aligned} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

28. $\boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

29. $\boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

30. $\boldsymbol{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix}.$

Výsledky:

1. $t!$
2. $3^{\frac{t(t-1)}{2}}$
3. $\mathrm{e}^{t(t-1)}$
4. $4 - \dfrac{3}{2^t}$
5. $1 + \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e} - 1}$
6. $x(t) = \begin{cases} c, & t = 0 \\ 2(t+1), & t \geq 1 \end{cases}$
7. Uložená částka $x(t)$ v t-tém období je řešením počáteční úlohy $x(t+1) = 1{,}008x(t) + 200$, $x(0) = 0$, tedy $x(n) = 25\,000\big(1{,}008^n - 1\big)$.
8. Dluh $x(t)$ v t-ém měsíci je řešením počáteční úlohy $x(t+1) = \sqrt[12]{1{,}12}\,x(t) - 380$, $x(0) = 12\,000$. Závěrečná splátka $x(37) = 268{,}99$.
9. Nesplacený úvěr $x(t)$ v t-ém měsíci je řešením počáteční úlohy $x(t+1) = \sqrt[12]{1{,}1}\,x(t) - b$, $x(0) = 80\,000$. Měsíční splátka $b = 3\,008{,}9 \doteq 3\,010$.

10. Nesplacená hypotéka $x(t)$ v t-ém měsíci je řešením počáteční úlohy $x(t+1) = \sqrt[12]{1{,}08}\, x(t) - 1\,000$, $x(360) = 0$. Hypotéka $x(0) = 136\,283{,}5$.
11. $\frac{5\,700}{\ln 2} \ln \frac{100}{70} \doteq 2933$
12. $\frac{1\,425}{52} \doteq 27{,}4$ samic a $\frac{1\,585}{52} \doteq 30,5$ samců, tj. něco mezi 27 a 28 slonicemi a 30 a 31 slony každý rok.

13. $4^t\big(A + (-1)^t B\big)$
14. $4^t\left(A\cos\frac{1}{2}\pi t + B\sin\frac{1}{2}\pi t\right)$
15. $A + Bt + Ct^2$
16. $\sqrt{2^t}\left((A + Bt)\cos\frac{1}{2}\pi t + (C + Dt)\sin\frac{1}{2}\pi t\right)$
17. $3^t(A + Bt) + 2^t\left(C\cos\frac{1}{2}\pi t + D\sin\frac{1}{2}\pi t\right)$
18. $(-2)^t\,(A + 3^t B) + \dfrac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}+2)(\mathrm{e}+6)}$
19. $3^{t-1}(A + t) + (-2)^t B$
20. $2^t A + (-3)^t B + \frac{5}{2}3^{t-1}$
21. $3^t A + (-4)^t B - \frac{1}{6}\left(t + \frac{5}{3}\right)2^t$
22. $2^t\left(A\sin\frac{1}{2}\pi t + (B - t)\cos\frac{1}{2}\pi t\right)$
23. $3^t A + 2^t B + \frac{1}{2}t + \frac{5}{4}$
24. $A + \left(B + \frac{1}{12}t\right)4^t + \frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{18}t^2 + \frac{7}{54}t$

25. $(3 + 2t)2^t - 3^{t+1}$
26. $x(t+2) - x(t+1) - 4x(t) = 0$
27. $x(t) = \frac{1}{3}\left(2^{t+1} - (-1)^t\right),\ y(t) = 2^{t+1}$
28. $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 - 2^{t+1} \\ 2 - 2^t \\ -2 + 2^{t+1} \end{pmatrix}$
29. $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} (t+2)2^{t-1} - t \\ 2^t - 1 \end{pmatrix}$
30. $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = 4^t \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + (\eta_0 + 2\zeta_0)\, t\, 4^{t-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kapitola 3

Další explicitně řešitelné rovnice

V prvních třech částech této kapitoly uvedeme některé typy nelineárních diferenčních rovnic, u nichž je známa substituce převádějící je na rovnice lineární. V poslední části ukážeme speciální rovnice, které byly získány volbou goniometrických nebo hyperbolických funkcí na místě transformující funkce. Řešení těchto rovnic bude užitečné pro nalezení explicitního řešení logistické rovnice

$$x(t+1) = rx(t)\big(1 - x(t)\big). \tag{3.1}$$

pro několik speciálních hodnot parametru r.

3.1 Riccatiho a Bernoulliova rovnice

Riccatiho diferenční rovnice je tvaru

$$p(t)x(t+1)x(t) + x(t+1) - \big(1 + q(t)\big)x(t) = r(t), \tag{3.2}$$

kde p je nenulová regresivní posloupnost. Rovnici můžeme přepsat ve tvaru rekurentní formule

$$x(t+1) = \frac{\big(1 + q(t)\big)x(t) + r(t)}{1 + p(t)x(t)} \tag{3.3}$$

nebo explicitní diferenční rovnice prvního typu

$$\Delta x = \frac{-p(t)x^2 + q(t)x + r(t)}{1 + p(t)x}.$$

S využitím operátorů posunu a diference můžeme rovnici (3.2) přepsat do tvaru

$$pxx^\sigma + x + \Delta x - (1 + q)x = r$$

a z něho vyjádřit diferenci hledané posloupnosti

$$\Delta x = -pxx^\sigma + qx + r.$$

Tato rovnice je diskrétní analogií Riccatiho diferenciální rovnice $x' = -px^2 + qx + r$.

Riccatiho diferenční rovnici řešíme pomocí substituce

$$x(t) = \frac{1}{p(t)} \frac{\Delta y(t)}{y(t)} = \frac{y(t+1) - y(t)}{p(t)y(t)}. \tag{3.4}$$

Dosadíme do rekurentní formule (3.3) a postupně upravujeme:

$$\begin{aligned}
\frac{y(t+2)-y(t+1)}{p(t+1)y(t+1)} &= \frac{\big(1+q(t)\big)\dfrac{y(t+1)-y(t)}{p(t)y(t)}+r(t)}{1+\dfrac{y(t+1)-y(t)}{y(t)}}\\
\frac{y(t+2)-y(t+1)}{p(t+1)y(t+1)} &= \frac{\big(1+q(t)\big)\big(y(t+1)-y(t)\big)+r(t)p(t)y(t)}{p(t)y(t+1)}\\
y(t+2)-y(t+1) &= \frac{p(t+1)}{p(t)}\big(1+q(t)\big)y(t+1)-\frac{p(t+1)}{p(t)}\left(1+q(t)-r(t)p(t)\right)y(t).
\end{aligned}$$

Odtud vidíme, že posloupnost y je řešením lineární homogenní diferenční rovnice druhého řádu

$$y(t+2)-\left(1+\frac{p(t+1)}{p(t)}\big(1+q(t)\big)\right)y(t+1)+\left(\frac{p(t+1)}{p(t)}\left(1+q(t)\right)-r(t)p(t+1)\right)y(t)=0,$$

kterou můžeme také zapsat stručněji pomocí operátorů posunu a diference

$$\Delta^2 y+\left(1-\frac{p^\sigma}{p}(1+q)\right)\Delta y-p^\sigma r y=0.$$

Tvrzení 6. Riccatiho diferenční rovnice (3.2) pro neznámou posloupnost x se substitucí (3.4) transformuje na lineární homogenní rovnici druhého řádu pro neznámou posloupnost y.

Příklad:

$$x(t+1)=\frac{2x(t)+3}{3x(t)+2},\qquad x(0)=x_0$$

Zavedeme substituci

$$x(t)=\frac{\Delta y(t)}{\frac{3}{2}y(t)}=\frac{2}{3}\frac{y(t+1)}{y(t)}-\frac{2}{3},$$

dosadíme do dané rovnice a postupně ji upravíme

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\frac{y(t+2)}{y(t+1)}-\frac{2}{3} &= \frac{\frac{4}{3}\dfrac{y(t+1)}{y(t)}-\frac{4}{3}+3}{2\dfrac{y(t+1)}{y(t)}-2+2},\\
4\frac{y(t+2)-y(t+1)}{y(t+1)} &= \frac{4y(t+1)+5y(t)}{y(t+1)}.
\end{aligned}$$

Daná rovnice se tedy transformuje na lineární homogenní rovnici druhého řádu

$$4y(t+2)-8y(t+1)-5y(t)=0.$$

Její charakteristická rovnice $4\lambda^2-8\lambda-5=0$ má dva reálné různé kořeny

$$\lambda_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+80}}{8}=\begin{cases}\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Obecné řešení lineární diferenční rovnice tedy je $y(t) = A\left(\frac{5}{2}\right)^t + B\left(-\frac{1}{2}\right)^t$.

Označme $y_0 = y(0)$. Pro počáteční hodnoty dále platí $x_0 = \frac{2}{3}\frac{y(1)}{y(0)} - \frac{2}{3}$, a z toho vypočítáme $y(1) = \frac{1}{2}(3x_0 + 2)y_0$.

Z těchto podmínek dostaneme systém (algebraických) rovnic pro konstanty A, B,

$$y_0 = y(0) = A + B, \qquad \frac{3x_0 + 2}{2}y_0 = y(1) = \frac{5}{2}A - \frac{1}{2}B,$$

tj.

$$\begin{aligned} A + B &= y_0 \\ 5A - B &= (3x_0 + 2)y_0. \end{aligned}$$

Z něho vypočítáme $A = \frac{1}{2}y_0(1 + x_0)$, $B = \frac{1}{2}y_0(1 - x_0)$. Řešení úlohy pro lineární rovnici je

$$y(t) = \frac{y_0}{2^{t+1}}\left((1 + x_0)5^t + (1 - x_0)(-1)^t\right).$$

Zpětnou substitucí tedy dostaneme řešení zadané úlohy ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{3}\left(\frac{y(t+1)}{y(t)} - 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{(1 + x_0)5^{t+1} + (1 - x_0)(-1)^{t+1}}{(1 + x_0)5^t + (1 - x_0)(-1)^t} - 1\right) = \\ &= \frac{(1 + x_0)5^t - (1 - x_0)(-1)^t}{(1 + x_0)5^t + (1 - x_0)(-1)^t} = \frac{1 + x_0}{1 + x_0 + (1 - x_0)\left(-\frac{1}{5}\right)^t} - \frac{1 - x_0}{1 - x_0 + (1 + x_0)(-5)^t}. \end{aligned}$$

■

Pokud $r \equiv 0$, tj. na pravé straně rovnice (3.2) je nula, můžeme použít jednodušší substituci. V tomto případě položíme

$$x(t) = \frac{1}{z(t)}, \tag{3.5}$$

dosadíme do rovnice (3.2) a vynásobíme výrazem $z(t)z(t+1)$. Dostaneme

$$p(t) + z(t) - \big(1 + q(t)\big)z(t+1) = 0.$$

Je-li přitom posloupnost q regresivní, upravíme tuto rovnici na tvar lineární diferenční rovnice prvního řádu

$$z(t+1) = \frac{1}{1 + q(t)}z(t) + \frac{p(t)}{1 + q(t)} \quad \text{nebo} \quad \Delta z = -\frac{q(t)}{1 + q(t)}z + \frac{p(t)}{1 + q(t)}.$$

Tato rovnice má podle Tvrzení 1 řešení

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \frac{1}{1 + q(i)} + \sum_{i=t_0}^{t-1} \frac{p(i)}{1 + q(i)} \prod_{j=i+1}^{t-1} \frac{1}{1 + q(j)} = \\ &= \left(z_0 + \sum_{i=t_0}^{t-1} p(i) \prod_{j=t_0}^{i-1} (1 + q(j))\right) \prod_{i=t_0}^{t-1} \frac{1}{1 + q(i)}, \end{aligned}$$

kde $z_0 = z(t_0) = x(t_0)^{-1}$. Platí tedy:

Tvrzení 7. Je-li $r \equiv 0$, pak má Riccatiho rovnice řešení

$$x(t) = \frac{x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} \big(1+q(i)\big)}{1 + x_0 \sum_{i=t_0}^{t-1} p(i) \prod_{j=t_0}^{i-1} \big(1+q(j)\big)}.$$

Rovnice (3.2) s $r \equiv 0$ a s regresivní posloupností q se v literatuře objevuje v rozmanitých tvarech. Ukážeme některé z nich. Rovnici v takovém případě můžeme přepsat na tvar

$$\frac{p(t)}{1+q(t)} + \frac{1}{1+q(t)}\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(t+1)} = 0$$

a při označení

$$a(t) = \frac{1}{1+q(t)}, \quad b(t) = \frac{p(t)}{1+q(t)}$$

dostaneme

$$\frac{1}{x(t+1)} - \frac{1}{x(t)} = \big(a(t)-1\big)\frac{1}{x(t)} + b(t),$$

neboli

$$\Delta\frac{1}{x} = \big(a(t)-1\big)\frac{1}{x} + b(t) \tag{3.6}$$

případně

$$\Delta x^{1-2} = \big(a(t)-1\big)x^{1-2} + b(t). \tag{3.7}$$

S pomocí operátoru posunu můžeme rovnici (3.6) přepsat ve tvaru

$$\frac{1}{x^\sigma} - \frac{1}{x} = (a-1)\frac{1}{x} + b.$$

Vynásobením výrazem xx^σ dostaneme rovnici ve tvaru

$$x - x^\sigma = (a-1)x^\sigma + bxx^\sigma.$$

Z ní můžeme vyjádřit

$$\Delta x = (1-a-bx)x^\sigma = (1-a)\left(1 - \frac{b}{1-a}x\right)x^\sigma$$

nebo

$$x^\sigma = \frac{x}{a+bx}. \tag{3.8}$$

Poslední rovnici vynásobíme jmenovatelem pravé strany a upravíme na tvar

$$x^\sigma = \frac{x}{a}\left(1 - bx^\sigma\right),$$

ze kterého dostaneme jiné vyjádření diference hledané posloupnosti

$$\Delta x = x\left(\frac{1}{a} - 1 - \frac{b}{a}x^\sigma\right) = \frac{1-a}{a}x\left(1 - \frac{b}{1-a}x^\sigma\right).$$

Bernoulliova diferenční rovnice je tvaru

$$\Delta x^{1-\alpha} = \big(a(t) - 1\big)x^{1-\alpha} + b(t), \tag{3.9}$$

kde $\alpha \neq 1$ je nějaké reálné číslo. Bernoulliovu diferenční rovnici můžeme také vyjádřit ve tvaru rekurentní formule

$$x(t+1) = \big(a(t)x(t)^{1-\alpha} + b(t)\big)^{1/(1-\alpha)}.$$

Porovnáním s rovnicí (3.7) vidíme, že Riccatiho rovnice (3.2) s $r \equiv 0$ je speciálním případem Bernoulliovy rovnice (3.9) s parametrem $\alpha = 2$.

Tvar Bernoulliovy rovnice bezprostředně ukazuje, že substituce

$$x(t)^{1-\alpha} = z(t), \quad \text{tj.} \quad x(t) = z(t)^{1/(1-\alpha)} \tag{3.10}$$

transformuje Bernoulliovu diferenční rovnici (3.9) na lineární nehomogenní rovnici prvního řádu

$$\Delta z = \big(a(t) - 1\big)z + b(t), \quad \text{tj.} \quad z(t+1) = a(t)z(t) + b(t). \tag{3.11}$$

Tvrzení 8. Bernoulliova diferenční rovnice (3.9) pro neznámou posloupnost x se substitucí (3.10) transformuje na lineární nehomogenní rovnici prvního řádu (3.11) pro neznámou posloupnost z.

Příklad: Bevertonovu-Holtovu rovnici

$$x(t+1) = x(t)\frac{rK}{K + (r-1)x(t)} \tag{3.12}$$

modelující vývoj velikosti populace v prostředí s omezenými zdroji můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t+1) = x(t)\frac{r}{1 + \frac{r-1}{K}x(t)}.$$

Jedná se o rovnici (3.8), tj. rovnici, která je současně Riccatiho i Bernoulliova. Můžeme ji tedy vyřešit substitucí (3.5). Tuto substituci nyní odvodíme intuitivně, z úvahy o modelovaném ději.

Budeme hledat řešení nenulové, tj. chceme modelovat nevyhynulou populaci. V tom případě můžeme napsat rovnost převrácených hodnot obou stran rovnice (3.12)

$$\frac{1}{x(t+1)} = \frac{1}{r}\frac{1}{x(t)} + \frac{r-1}{rK}.$$

Nyní pro zjednodušení označíme z posloupnost převrácených hodnot posloupnosti x. Podle předchozí rovnosti vidíme, že posloupnost z splňuje rekurentní formuli

$$z(t+1) = \frac{1}{r}z(t) + \frac{r-1}{rK}.$$

To je lineární rekurentní formule prvního řádu s konstantními koeficienty. Proto podle 2. důsledku Tvrzení 1 můžeme obecný člen posloupnosti z vyjádřit ve tvaru

$$z(t) = z(t_0)\left(\frac{1}{r}\right)^{t-t_0} + \frac{r-1}{rK}\frac{r^{-(t-t_0)} - 1}{1-r}r = \frac{Kz(t_0) + r^{t-t_0} - 1}{Kr^{t-t_0}},$$

přitom $z(t_0) = 1/x(t_0)$. Můžeme tedy napsat obecný člen řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice s počáteční hodnotou $x(t_0) = x_0$ jako převrácenou hodnotu posloupnosti z, tj.

$$x(t) = \frac{Kr^{t-t_0}x_0}{K + (r^{t-t_0} - 1)\,x_0} = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)r^{-(t-t_0)}}. \tag{3.13}$$

Snadno ověříme, že touto formulí je skutečně zadáno řešení počáteční úlohy pro Bevertonovu-Holtovu rovnici s počáteční hodnotou $x(t_0) = x_0$. Navíc takto zadaná posloupnost je v případě $x_0 = 0$ konstantní nulová, $x \equiv 0$; vyjadřuje tedy také řešení úlohy s počáteční hodnotou $x(t_0) = 0$.

Nyní můžeme snadno vyšetřit kvalitativní vlastnosti řešení Bevertonovy-Holtovy rovnice:

- Pro $r = 1$ nebo $x_0 = 0$ je řešení $x \equiv x_0$.
- Pokud $r > 1$, pak $\lim\limits_{t\to\infty} r^{-(t-t_0)} = 0$, takže pro každou počáteční podmínku $x_0 \neq 0$ řešení x splňuje
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)r^{-(t-t_0)}} = K.$$
- Pokud $r \in (0,1)$, pak $\lim\limits_{t\to\infty} r^{-(t-t_0)} = \infty$, takže pro každou počáteční podmínku $x_0 \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)r^{-(t-t_0)}} = 0.$$

Tyto výsledky dobře odpovídají ekologické intuici: pokud je vnitřní koeficient růstu r větší než 1, tj. pokud v neomezeném prostředí má populace porodnost větší než úmrtnost, pak se její velikost ustálí na kapacitě prostředí; pokud je úmrtnost větší než porodnost, populace vymře. ■

3.2 Homogenní rovnice

Homogenní diferenční rovnice prvního řádu je rovnice tvaru

$$f\left(t, \frac{x(t+1)}{x(t)}\right) = 0, \tag{3.14}$$

kde f je funkce, která není konstantní ve druhé proměnné. Povšimněme si, že lineární homogenní rovnici $x(t+1) = q(t)x(t)$ můžeme přepsat jako

$$\frac{x(t+1)}{x(t)} - q(t) = 0,$$

takže je skutečně speciálním případem rovnice (3.14); slovo „homogenní“ je použito oprávněně.

Substituce
$$y(t) = \frac{x(t+1)}{x(t)} \tag{3.15}$$

převede rovnici (3.14) na rovnici
$$f\big(t, y(t)\big) = 0,$$

ze které vyjádříme $y(t) = g(t)$ a řešení dané rovnice (3.14) hledáme jako řešení lineární homogenní rovnice $x(t+1) = g(t)x(t)$.

Pokud hledáme kladná řešení rovnice (3.14), můžeme použít substituce

$$z(t) = \ln x(t),$$

která převádí danou rovnici na implicitní diferenční rovnici

$$f\big(t, \Delta z(t)\big) = 0.$$

Homogenní diferenční rovnice k-tého řádu je rovnice tvaru

$$F\left(t, \frac{x(t+k)}{x(t+k-1)}, \frac{x(t+k-1)}{x(t+k-2)}, \dots, \frac{x(t+1)}{x(t)}\right) = 0,$$

kde F je funkce, která není konstantní ve druhé a poslední proměnné. Tuto rovnici převede substituce (3.15) na diferenční rovnici $(k-1)$-ního řádu druhého typu

$$F\big(t, y(t+k-1), y(t+k-2), \dots, y(t)\big) = 0.$$

Příklad: Najdeme řešení homogenní rovnice druhého řádu

$$x(t+1) = \frac{x(t-1)x(t)}{x(t-1)+x(t)}.$$

Rovnici vynásobíme jmenovatelem zlomku na pravé straně a vydělíme výrazem $x(t)x(t-1)$. Dostaneme

$$\left(1 + \frac{x(t)}{x(t-1)}\right)\frac{x(t+1)}{x(t)} = 1.$$

Substituce (3.15) převede tuto rovnici na tvar

$$\big(1 + y(t-1)\big)y(t) = 1,$$

který je ekvivalentní s $\big(1 + y(t)\big)y(t+1) = 1$, neboli

$$y(t+1)y(t) + y(t+1) = 1.$$

To je Riccatiho rovnice. Proto zavedeme novou posloupnost z substitucí

$$y(t) = \frac{z(t+1) - z(t)}{z(t)}.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\frac{z(t+2) - z(t+1)}{z(t+1)}\left(\frac{z(t+1) - z(t)}{z(t)} + 1\right) = 1,$$

$$z(t+2) - z(t+1) - z(t) = 0,$$

což je lineární homogenní rovnice druhého řádu. ∎

3.2.1 Implicitní rovnice $x(t+1)^2 + a(t)x(t+1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0$

Tato rovnice má očividně řešení $x \equiv 0$. Budeme hledat také řešení nenulová. Rovnici vydělíme výrazem $x(t)^2$ a tím ji převedeme na tvar rovnice homogenní

$$\left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2 + a(t)\frac{x(t+1)}{x(t)} + b(t) = 0.$$

Pokud posloupnosti a, b splňují relaci $a(t)^2 \geq 4b(t)$ pro všechny indexy, položíme

$$p(t) = \frac{1}{2}\left(-a(t) + \sqrt{a(t)^2 - 4b(t)}\right) \quad \text{a} \quad q(t) = \frac{1}{2}\left(-a(t) - \sqrt{a(t)^2 - 4b(t)}\right).$$

a pravou stranu rovnice přepíšeme jako součin dvou výrazů

$$\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - p(t)\right)\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - q(t)\right) = 0.$$

Odtud vidíme, že řešení každé z lineárních homogenních diferenčních rovnic prvního řádu

$$x_1(t+1) = p(t)x_1(t) \quad \text{a} \quad x_2(t+1) = q(t)x_2(t)$$

je také řešením původní rovnice. Tato řešení jsou

$$x_1(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} p(i) \quad \text{a} \quad x_2(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{t-1} q(i).$$

Tato dvě řešení lze kombinovat. Řešení může až do nějakého indexu, řekněma τ, splývat s řešením x_1 a od tohoto indexu splývat s řešením x_2, které však v indexu τ splňuje počáteční podmínku $x_2(\tau) = x_1(\tau)$, tedy

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{\tau-1} p(i) \prod_{i=\tau}^{t-1} q(i).$$

Obecně: nechť $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ryze rostoucí posloupnost celých čísel taková, že $\tau_1 \geq t_0$. Pak posloupnost

$$x(t) = x_0 \prod_{i=t_0}^{\tau_1-1} p(i) \prod_{i=\tau_1}^{\tau_2-1} q(i) \prod_{i=\tau_2}^{\tau_3-1} p(i) \prod_{i=\tau_3}^{\tau_4-1} q(i) \cdots \prod_{i=\tau_{k-1}}^{\tau_k-1} p(i) \prod_{i=\tau_k}^{t-1} q(i)$$

je řešením dané implicitní rovnice; přitom $k = \max\{j : \tau_j < t\}$. Povšimněme si dále, že nulové řešení je v tomto vyjádření zahrnuto pro $x_0 = 0$. Pokud $a(t)^2 = 4b(t)$ pro všechny indexy t, pak $p = q = -\frac{1}{2}a$ a všechna řešení splývají, $x(t) = x_0(-\frac{1}{2})^{t-t_0} \prod\limits_{i=t_0}^{t-1} a(i)$.

Tvrzení 9. Počáteční úloha pro implicitní rovnici tvaru

$$x(t+1)^2 + a(t)x(t+1)x(t) + b(t)x(t)^2 = 0, \qquad x(t_0) = x_0$$

je pro $x_0 = 0$ nebo $a^2 \equiv 4b$ jednoznačně řešitelná; je-li $x_0 \neq 0$ a existuje index $t_1 \geq t_0$, že $a(t_1)^2 > 4b(t_1)$ a pro všechny indexy $t \geq t_0$ je $a(t) \geq 4b(t)$ pak má úloha řešení, které není určeno jednoznačně; pokud $a(t)^2 < 4b(t)$ aspoň v jednom index, pak úloha nemá (reálné) řešení, které by bylo definované na celém průniku definičních oborů posloupností a a b.

Příklad: Najdeme všechna řešení rovnice v implicitním tvaru

$$x(t+1)^2 - 3x(t)x(t+1) + 2x(t)^2 = 0.$$

Rovnici postupně upravíme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2 - 3\frac{x(t+1)}{x(t)} + 2 &= 0, \\ \left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - 2\right)\left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Dostáváme tak dvě homogenní lineární rovnice $x(t+1) = 2x(t)$ a $x(t+1) = x(t)$. Daná rovnice má tedy dvě „základní“ řešení, konkrétně

$$x(t) = x_0 2^{t-t_0} \quad \text{a} \quad x(t) = x_0,$$

kde $x_0 = x(t_0)$. Tato řešení splývají pro $x_0 = 0$. ■

3.3 Logaritmicky lineární rovnice

Jedná se o rovnici

$$x(t+k)^{r_k(t)} x(t+k-1)^{r_{k-1}(t)} \cdots x(t+1)^{r_1(t)} x(t)^{r_0(t)} = b(t);$$

přitom $r_0, r_1, \dots, r_k$ jsou posloupnosti takové, že $r_0(t) \neq 0 \neq r_k(t)$ pro všechna t z definičního oboru. Substitucí

$$x(t) = \mathrm{e}^{z(t)} \tag{3.16}$$

tj. $z(t) = \ln x(t)$ převedeme uvažovanou rovnici na tvar

$$\mathrm{e}^{r_k(t)z(t+k) + r_{k-1}(t)z(t+k-1) + \cdots + r_1(t)z(t+1) + r_0(t)z(t)} = b(t),$$

a dále zlogaritmováním na lineární rovnici k-tého řádu

$$z(t+k) + \frac{r_{k-1}(t)}{r_k(t)} z(t+k-1) + \cdots + \frac{r_1(t)}{r_k(t)} z(t+1) + \frac{r_0(t)}{r_k(t)} z(t) = \frac{\ln b(t)}{r_k(t)}.$$

Povšimněme si, že z transformačního vztahu (3.16) plyne, že řešení původní rovnice musí být kladné. Uvedený postup tedy můžeme použít pouze v případě, že počáteční hodnoty hledané posloupnosti splňují podmínky

$$x(t_0) = x_0 > 0,\ x(t_0+1) = x_1 > 0.\ \dots,\ x(t_0+k-1) = x_{k-1} > 0.$$

Příklad:

$$x(t+2) = \left(\frac{x(t+1)}{x(t)}\right)^2.$$

Rovnici přepíšeme ve tvaru

$$x(t+2)x(t+1)^{-2}x(t)^2 = 1$$

a zavedeme substituci $z(t) = \ln x(t)$. Dostaneme lineární homogenní rovnici druhého řádu

$$z(t+2) - 2z(t+1) + 2z(t) = 0.$$

Její charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 2 =$ má komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm \mathrm{i}.$$

Modul a argument charakteristických kořenů jsou

$$|\lambda| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \arg\lambda = \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi.$$

To znamená, že obecné řešení lineární rovnice je

$$z(t) = \sqrt{2}^{\,t}\left(A\cos\frac{\pi t}{4} + B\sin\frac{\pi t}{4}\right)$$

a obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) = \exp\left\{\sqrt{2}^{\,t}\left(A\cos\frac{\pi t}{4} + B\sin\frac{\pi t}{4}\right)\right\}.$$

■

3.4 Rovnice řešitelné speciálními substitucemi

3.4.1 Goniometrické a hyperbolické substituce

Ukážeme několik speciálních rovnic, u kterých lze najít explicitní řešení pomocí goniometrické nebo hyperbolické substituce. U všech těchto rovnic budeme uvažovat také počáteční podmínku

$$x(t_0) = x_0. \tag{3.17}$$

Uvedené rovnice byly získány pomocí známých vztahů pro goniometrické nebo hyperbolické funkce násobného argumentu. Je z nich zřejmé, jak lze odvozovat další explicitně řešitelné rovnice. Navíc téměř libovolnou transformací hledané posloupnosti lze z uvedených rovnic získat další rovnice, které jsou opět explicitně řešitelné. Tuto skutečnost ukážeme na příkladech

Rovnice $x(t+1) = 2x(t)^2 - 1$

Řešení uvažované úlohy je pro libovolné $t \geq t_0$ určeno jednoznačně, neboť se jedná o rekurentní formuli prvního řádu s počáteční podmínkou. Přitom je na pravé straně rovnosti výraz definovaný pro jakoukoliv hodnotu $x(t)$.

Z rovnice a z počáteční podmínky (3.17) plyne, že hodnota řešení $x(t_0-1)$ musí splňovat rovnici $x_0 = 2\,[x(t_0-1)]^2 - 1$. Tato algebraická rovnice pro neznámou $x(t_0-1)$ nemá reálné řešení, pokud $x_0 < -1$, a má dvě různá reálná řešení, pokud $x_0 > -1$. Obecně tedy úloha není jednoznačně řešitelná pro $t < t_0$. Proto budeme řešení hledat pouze pro $t \geq t_0$.

Pokud počáteční hodnota splňuje nerovnost $|x_0| \leq 1$, položíme $x(t) = \cos y(t)$. S využitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 \quad \text{a} \quad \cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$$

dostaneme

$$\cos y(t+1) = x(t+1) = 2x(t)^2 - 1 = 2\big(\cos y(t)\big)^2 - 1 = \big(\cos y(t)\big)^2 - \big(\sin y(t)\big)^2 = \cos 2y(t).$$

To znamená, že $y(t+1)$ je řešením goniometrické rovnice

$$\cos y(t+1) = \cos 2y(t),$$

a tedy

$$y(t+1) = \pm 2y(t) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Každá z tohoto spočetného systému lineárních nehomogenních diferenčních rovnic prvního řádu má podle 2. důsledku Tvrzení 1 řešení tvaru

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2k\pi \frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

kde $y_0 = y(t_0)$, tj. $\cos y_0 = x_0$, $y_0 = \arccos x_0$. Druhý sčítanec na pravé straně rovnosti můžeme upravit na tvar

$$2k\pi \frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1} = 2k\pi \sum_{i=0}^{t-t_0-1} (\pm 2)^i.$$

Součet celých čísel je celé číslo a to znamená, že druhý sčítanec je sudým násobkem π, tj.

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2l\pi$$

pro nějaké $l \in \mathbb{Z}$. Zpětnou substitucí a úpravou s využitím součtového vzorce

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) = \cos\left(y_0(\pm 2)^{t-t_0} + 2l\pi\right) = \cos\left(y_0(\pm 2)^{t-t_0}\right)\cos 2l\pi - \sin\left(y_0(\pm 2)^{t-t_0}\right)\sin 2l\pi = \\ = \cos\left((\pm 1)^{t-t_0} 2^{t-t_0} y_0\right) = \cos\left(2^{t-t_0} y_0\right), \end{aligned}$$

neboť cosinus je sudá funkce. Řešení úlohy

$$x(t+1) = 2x(t)^2 - 1, \quad x(t_0) = x_0 \in [-1, 1] \tag{3.18}$$

je tedy tvaru

$$x(t) = \cos\left(2^{t-t_0} \arccos x_0\right).$$

Pokud je $|x_0| > 1$, položíme $x(t) = \cosh y(t)$. S využitím známého vztahu pro hyperbolický cosinus[1]

$$\cosh 2\alpha = 2(\cosh\alpha)^2 - 1$$

dostaneme

$$\cosh y(t+1) = x(t+1) = 2x(t)^2 - 1 = 2\big(\cosh y(t)\big)^2 - 1 = \cosh 2y(t).$$

Hodnota $y(t+1)$ je tedy řešením rovnice $\cosh y(t+1) = \cosh 2y(t)$. Poněvadž hyperbolický cosinus je sudá funkce, která je ryze monotonní na každém z intervalů $(-\infty, 0]$ a $[0, \infty)$, platí

$$y(t+1) = \pm 2y(t),$$

[1] $\cosh 2\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)^2 - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha})\right)^2 - 1 = 2(\cosh\alpha)^2 - 1$

což jsou dvě rekurentní formule pro geometrickou posloupnost, jedna má kvocient 2, druhá -2. Posloupnost tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} = (\pm 1)^{t-t_0} 2^{t-t_0} y_0,$$

kde $y_0 = y(t_0)$, tj. $\cosh y_0 = x_0$,

$$y_0 = \operatorname{argcosh} x_0 = \ln\left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right).$$

Poněvadž hyperbolický cosinus je sudá funkce, dostaneme řešení úlohy s počáteční hodnotou $x_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ve tvaru

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t = t_0, \\ \cosh\left(2^{t-t_0} \ln\left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right)\right), & t > t_0. \end{cases}$$

Příklad:

$$x(t+1) = 2x(t)\big(2x(t) - 1\big), \quad x(0) = \tfrac{1}{8}$$

Nejprve upravíme pravou stranu rovnice tak, aby byla tvaru $f(2X^2 - 1)$ pro nějakou funkci f a nějaký výraz X závisející na $x(t)$; použijeme doplnění na úplný čtverec:

$$4x(t)^2 - 2x(t) = \left(2x(t) - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\left(2\left(2x(t) - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1\right) + \tfrac{1}{4}.$$

Odtud vidíme, že daná diferenční rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$2x(t+1) - \tfrac{1}{2} = 2\left(2x(t) - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1.$$

Můžeme tedy použít substituci $y(t) = 2x(t) - \frac{1}{2}$, která převádí danou úlohu na počáteční úlohu ve tvaru

$$y(t+1) = 2y(t)^2 - 1, \quad y(0) = -\tfrac{1}{4},$$

která má řešení

$$y(t) = \cos\left(2^t \arccos\left(-\tfrac{1}{4}\right)\right) = \cos\left(2^t\left(\pi - \arccos\tfrac{1}{4}\right)\right) = \begin{cases} -\tfrac{1}{4}, & t = 0 \\ \cos\left(2^t \arccos\tfrac{1}{4}\right), & t > 0. \end{cases}$$

Řešení dané úlohy je tedy pro $t > 0$ dáno výrazem

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\left(2^t \arccos\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cos\left(2^t \arccos\tfrac{1}{4}\right).$$

■

Rovnice $x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1 \pm x(t)^2}$

Řešení uvažované úlohy je pro $t \geq t_0$ určeno jednoznačně, neboť se jedná o rekurentní formuli prvního řádu s počáteční podmínkou a odmocninu považujeme v reálném oboru za jednoznačnou funkci. Řešení ovšem v případě znaménka „$-$“ pod odmocninou nemusí být definováno pro každé $t \geq t_0$; je-li totiž v takovém případě $|x(t)| > 1$, pak není $x(t+1)$ definováno.

Z rovnice a z počáteční podmínky plyne, že pro hodnotu $x(t_0 - 1)$ řešení by mělo platit

$$x_0 = 2x(t_0 - 1)\sqrt{1 \pm x(t_0 - 1)^2},$$

nebo po snadné úpravě

$$\pm 4\,[x(t_0-1)]^4 + 4\,[x(t_0-1)]^2 - x_0^2 = 0,$$

takže by mělo platit

$$x(t_0-1) = \sqrt{\frac{-4 \pm \sqrt{16 \mp 16x_0^2}}{\pm 8}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 \pm x_0^2} \mp 1\right)};$$

hodnota $x(t_0-1)$ tedy není určena jednoznačně. Z tohoto důvodu má smysl uvažovat řešení pouze pro $t \geq t_0$.

Pokud je pod odmocninou na pravé straně rovnice znaménko „+“, tedy pokud je rovnice tvaru

$$x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1+x(t)^2}, \tag{3.19}$$

zavedeme substituci $x(t) = \sinh y(t)$ a využijeme známých vlastností hyperbolických funkcí

$$\sinh 2\alpha = 2\sinh\alpha\cosh\alpha, \quad (\cosh\alpha)^2 - (\sinh\alpha)^2 = 1, \quad \cosh\alpha > 0.$$

Pak je

$$\begin{aligned}\sinh y(t+1) = x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1+x(t)^2} = 2\sinh y(t)\sqrt{1+\left(\sinh y(t)\right)^2} = \\ = 2\sinh y(t)\cosh y(t) = \sinh 2y(t).\end{aligned}$$

Poněvadž hyperbolický sinus je prostá funkce, implicitní diferenční rovnice

$$\sinh y(t+1) = \sinh y(t)$$

je ekvivalentní s explicitní rovnicí $y(t+1) = 2y(t)$ a její řešení je tvaru

$$y(t) = 2^{t-t_0} y_0,$$

kde $y_0 = y(t_0)$, tj. $x_0 = \sinh y_0$, $y_0 = \operatorname{argsinh} x_0 = \ln\left(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\right)$.

Zpětnou substitucí dostaneme řešení úlohy (3.19), (3.17) pro $t \geq t_0$ ve tvaru

$$x(t) = \sinh\left(2^{t-t_0}\operatorname{argsinh} x_0\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x_0 + \sqrt{1+x_0^2}\right)^{2^{t-t_0}} - \left(x_0 + \sqrt{1+x_0^2}\right)^{-2^{t-t_0}}\right). \tag{3.20}$$

Rovnice se znaménkem „$-$“ pod odmocninou na pravé straně, tedy rovnice

$$x(t+1) = 2x(t)\sqrt{1-x(t)^2} \tag{3.21}$$

může mít řešení pouze pro počáteční podmínku $x_0 \in [-1,1]$, pro $|x| > 0$ není pravá strana rovnice definována. Navíc pro všechny hodnoty řešení musí platit $|x(t)| \leq 1$. Pokud je $x_0 = 0$, bude řešením úlohy (3.21), (3.17) konstantní posloupnost $x \equiv 0$.

Dále si můžeme všimnout, že pro řešení úlohy platí

$$x(t+1)x(t) = 2x(t)^2\sqrt{1-x(t)^2} \geq 0,$$

neboť odmocninu v reálném oboru chápeme jako nezápornou funkci. To znamená, že řešení rovnice nemění znaménko, tj. $\operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn} x_0$ pro všechna $t \geq t_0$.

Toto pozorování umožňuje zavést substituci

$$x(t) = |\sin y(t)| \operatorname{sgn} x_0. \tag{3.22}$$

Využijeme známých vlastností goniometrických funkcí

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha, \quad (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

a pro $x_0 \neq 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} |\sin y(t+1)| = 2|\sin y(t)|\sqrt{1 - \big(\sin y(t)\big)^2} = 2|\sin y(t)| \cdot |\cos y(t)| = \\ = |2 \sin y(t) \cos y(t)| = |\sin 2y(t)|. \end{aligned}$$

Řešíme tedy goniometrickou rovnici s absolutní hodnotou $|\sin y(t+1)| = |\sin y(t)|$ pro neznámou $y(t+1)$. Řešení této rovnice může být řešením některé ze dvou goniometrických rovnic

$$\sin y(t+1) = \sin 2y(t), \quad \sin y(t+1) = -\sin 2y(t)$$

pro neznámou $y(t+1)$. První z těchto rovnic má dvě řešení

$$y(t+1) = 2y(t) + 2k\pi, \quad y(t+1) = -2y(t) + (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

druhá má také dvě řešení

$$y(t+1) = -2y(t) + 2k\pi, \quad y(t+1) = 2y(t) + (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

To znamená, že posloupnost y splňuje některou z nekonečného systému lineárních rekurentních formulí prvního řádu

$$y(t+1) = \pm 2y(t) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

nebo ekvivalentně lineárních diferenčních rovnic $\Delta y = (\pm 2 - 1)y + k\pi$. Podle 2. důsledku Tvrzení 1 je řešení těchto rovnic tvaru

$$y(t) = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + k\pi \frac{(\pm 2)^{t-t_0} - 1}{\pm 2 - 1} = y_0(\pm 2)^{t-t_0} + k\pi \sum_{i=0}^{t-t_0-1} (\pm 2)^i,$$

kde $y_0 = y(t_0) = \arcsin x_0$. Sumu na pravé straně rovnosti lze vyjádřit jako

$$\sum_{i=0}^{t-t_0-1} (\pm 2)^i = \begin{cases} 0, & t = t_0, \\ 1 \pm 2 + 4 \pm \cdots + (\pm 2)^{t-t_0-1}, & t > t_0, \end{cases}$$

což znamená, že pro $t > t_0$ je rovna lichému celému číslu. Proto pro $t > t_0$ platí

$$y(t) = (\pm 2)^{t-t_0} y_0 + (2l+1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

a tedy také

$$\begin{aligned} x(t) &= |\sin y(t)| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= \left|\sin\big((\pm 2)^{t-t_0} y_0\big) \cos\big((2l+1)\pi\big) + \cos\big((\pm 2)^{t-t_0} y_0\big) \sin\big((2l+1)\pi\big)\right| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= \left|-(\mp 1)^{t-t_0} \sin\big(2^{t-t_0} y_0\big) + 0\right| \operatorname{sgn} x_0 = \left|(\pm 1)^{t-t_0} \sin\big(2^{t-t_0} y_0\big)\right| \operatorname{sgn} x_0 = \\ &= \left|\sin\big(2^{t-t_0} \arcsin x_0\big)\right| \operatorname{sgn} x_0. \end{aligned}$$

Dostáváme tak výsledek, že řešení počáteční úlohy (3.21), (3.17) s $x_0 \in [-1,1]$ je pro $t \geq t_0$ dáno formulí

$$x(t) = \left|\sin\left(2^{t-t_0} \arcsin x_0\right)\right| \operatorname{sgn} x_0; \tag{3.23}$$

toto řešení nemění znaménko a pro libovolné $t \geq t_0$ splňuje nerovnost $|x(t)| \leq 1$.
Příklad:

$$x(t+1) = \frac{x(t)^2}{4\big(x(t)+1\big)}, \quad x(0) = -3$$

Zavedeme substituci $x(t) = -\dfrac{1}{y(t)^2}$. Pak

$$\frac{1}{y(t+1)^2} = -x(t+1) = -\frac{x(t)^2}{4\big(x(t)+1\big)} = \frac{-1}{4y(t)^4\left(-\dfrac{1}{y(t)^2}+1\right)} = \frac{1}{4y(t)^2\big(1-y(t)^2\big)}.$$

Tedy $y(t+1)^2 = 4y(t)^2\left(1-y(t)^2\right)$, neboli

$$y(t+1) = 2y(t)\sqrt{1-y(t)^2}.$$

Řešení této rovnice s počáteční podmínkou $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ je podle předchozího výsledku dáno výrazem $y(t) = \left|\sin\left(2^t \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right|$. Řešení dané úlohy tedy je

$$x(t) = -\left(\frac{1}{\sin\left(2^t \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}\right)^2.$$

■

Rovnice $x(t+1) = \dfrac{2x(t)}{1-x(t)^2}$**,** $x(t+1) = \dfrac{x(t)^2-1}{2x(t)}$

Opět má smysl řešit počáteční úlohu pouze pro $t \geq t_0$.

V případě první rovnice zavedeme substituci $x(t) = \operatorname{tg} y(t)$ a využijeme vzorec pro tangens dvojnásobného argumentu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-(\operatorname{tg}\alpha)^2}.$$

Pak je

$$\operatorname{tg} y(t+1) = x(t+1) = \frac{2x(t)}{1-x(t)^2} = \frac{2\operatorname{tg} y(t)}{1-\big(\operatorname{tg} y(t)\big)^2} = \operatorname{tg} 2y(t).$$

Řešíme tedy goniometrickou rovnici $\operatorname{tg} y(t+1) = \operatorname{tg} 2y(t)$ pro neznámou $y(t+1)$. Dostaneme

$$y(t+1) = 2y(t) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tato lineární nehomogenní rovnice prvního řádu má řešení

$$y(t) = y_0 2^{t-t_0} + k\pi\left(2^{t-t_0} - 1\right),$$

kde $y_0 = y(0) = \operatorname{arctg} x_0$. Zpětnou substitucí dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0 + (2^{t-t_0}-1)k\pi\right) = \\ &= \frac{\operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0\right) + \operatorname{tg}\left((2^{t-t_0}-1)k\pi\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0\right) \operatorname{tg}\left((2^{t-t_0}-1)k\pi\right)} = \operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0\right). \end{aligned}$$

Řešení počáteční úlohy

$$x(t+1) = \frac{2x(t)}{1-x(t)^2}, \quad x(t_0) = x_0$$

je dáno výrazem

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(2^{t-t_0} \operatorname{arctg} x_0\right).$$

Druhou rovnici řešíme analogicky, použijeme substituci $x(t) = \operatorname{cotg} y(t)$.

Příklad:

$$x(t+1) = 2\frac{x(t)-1}{x(t)\big(2-x(t)\big)} + 1, \quad x(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Rovnici postupně upravujeme

$$\begin{aligned} 1 - x(t+1) &= 2\frac{1-x(t)}{x(t)\big(2-x(t)\big)}, \\ 1 - x(t+1) &= 2\frac{1-x(t)}{\Big(1-\big(1-x(t)\big)\Big)\Big(1+\big(1-x(t)\big)\Big)}, \\ 1 - x(t+1) &= 2\frac{1-x(t)}{1-\big(1-x(t)\big)^2}. \end{aligned}$$

Tento zápis rovnice ukazuje, že substituce $y(t) = 1 - x(t)$ rovnici transformuje na uvažovaný tvar. Řešení úlohy je tedy dáno relací

$$1 - x(t) = \operatorname{tg}\left(2^t \operatorname{arctg}(1-x_0)\right) = \operatorname{tg}\left(2^{t-1}\frac{\pi}{3}\right),$$

neboť $1 - x_0 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$. Řešení dané úlohy tedy je

$$x(t) = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{2^{t-1}}{3}\pi\right).$$

■

3.4.2 Logistická rovnice

Logistická diferenční rovnice je rovnice tvaru

$$x(t+1) = ax(t)\big(1-x(t)\big), \quad \text{nebo} \quad \Delta x = x(a-1-ax),$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Rekurentní vztah pro hledanou posloupnost x ukazuje, že logistická rovnice s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ má jednoznačné řešení pro $t \geq t_0$. Z rekurentního vztahu však obecně nelze jednoznačně vyjádřit hodnotu $x(t)$ v závislosti na $x(t+1)$. Z rovnice

$$ax(t)^2 - ax(t) + x(t+1) = 0$$

totiž vychází

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4x(t+1)}{a}}\right).$$

Odtud plyne, že logistická rovnice s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ má reálné řešení pro nějaké indexy $t < t_0$ pouze v případě, že $x_0 \leq \frac{1}{4}a$. Toto řešení však obecně není vyjádřeno jednoznačně. Jedinou výjimkou je případ $a = 2$, $x_0 = \frac{1}{2}$; pak je konstantní posloupnost $x \equiv \frac{1}{2}$ jednoznačným řešením počáteční úlohy definovaným na celé množině $\mathbb{Z}$. V případě $x_0 = \frac{1}{4}a$, $a \neq 2$ totiž dostaneme $x(t_0 - 1) = \frac{1}{2} \neq x_0$ a hodnota $x(t_0 - 2)$ již není určena jednoznačně.

Z vyjádření diference hledané posloupnosti x bezprostředně plyne, že konstantní posloupnosti

$$x \equiv 0 \quad \text{a } x \equiv 1 - \frac{1}{a} \tag{3.24}$$

jsou řešeními logistické rovnice definovanými na celé množině $\mathbb{Z}$. Tyto posloupnosti ovšem obecně nelze považovat za řešení logistické rovnice s počáteční hodnotou $x_0 = 0$ nebo $x_0 = 1 - 1/a$.

Počáteční úlohu pro logistickou rovnici vyřešíme pouze ve třech speciálních případech.

Případ $a = 2$: Budeme řešit počáteční úlohu

$$x(t+1) = 2x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.25}$$

která je ekvivalentní s úlohou

$$\Delta x = x(1 - 2x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Nejprve zavedeme substituci

$$y(t) = 1 - 2x(t), \quad \text{tj.} \quad x(t) = \frac{1}{2}\big(1 - y(t)\big). \tag{3.26}$$

Po dosazení a úpravách postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(1 - y(t+1)\big) &= \big(1 - y(t)\big)\left(1 - \frac{1}{2}\big(1 - y(t)\big)\right) \\
\frac{1}{2}\big(1 - y(t+1)\big) &= \frac{1}{2}\left(1 - y(t)^2\right) \\
y(t+1) &= y(t)^2 \\
y(t+1)y(t)^{-2} &= 1.
\end{aligned}$$

To je logaritmicky lineární rovnice. Jejím logaritmováním dostaneme

$$\ln y(t+1) - 2\ln y(t) = 0,$$

což je lineární homogenní rovnice $z(t+1) = 2z(t)$ pro posloupnost

$$z(t) = \ln y(t). \tag{3.27}$$

To znamená, že $z(t) = z_0 2^{t-t_0}$, kde $z_0 = \ln y(t_0) = \ln\big(1 - 2x(t_0)\big)$. Odtud dostaneme

$$y(t) = \mathrm{e}^{z(t)} = \exp\left(2^{t-t_0}\ln(1 - 2x_0)\right) = (1 - 2x_0)^{2^{t-t_0}}.$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení úlohy ve tvaru

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 - (1-2x_0)^{2^{t-t_0}}\right). \tag{3.28}$$

Při řešení úlohy jsme mlčky předpokládali, že výraz $\ln(1-2x_0)$ je definován, tedy že $x_0 < \frac{1}{2}$. Výraz na pravé straně rovnosti (3.28) je však definován pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$. Platí totiž

$$(1-2x_0)^{2^{t-t_0}} = \left(|1-2x_0|\operatorname{sgn}(1-2x_0)\right)^{2^{t-t_0}} = \begin{cases} 1-2x_0, & t = t_0, \\ \exp\left(2^{t-t_0}\ln|1-2x_0|\right), & t \neq t_0. \end{cases}$$

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že rovností (3.28) je skutečně definováno řešení úlohy (3.25) pro libovolnou počáteční hodnotu.

Postup hledání tvaru (3.28) řešení počáteční úlohy (3.25) pomocí substitucí (3.26) a (3.27) můžeme popsat ve zhuštěné formě: substitucí

$$1 - 2x(t) = \exp z(t)$$

najdeme řešení úlohy (3.25) ve tvaru

$$1 - 2x(t) = \exp\left(2^{t-t_0}\ln(1-2x_0)\right).$$

Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (3.25). Pro $x_0 \in (0,1)$ je $|1-2x_0| < 1$, takže řešení úlohy s takovými počátečními hodnotami splňuje

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(1-2x_0)^{2^{t-t_0}} = \tfrac{1}{2}.$$

Pro $x_0 \in \{0,1\}$ a $t > t_0$ je $(1-2x_0)^{2^{t-t_0}} = 1$, neboť číslo 2^{t-t_0} je sudé. Proto řešení úlohy (3.25) s počáteční podmínkou $x_0 \in \{0,1\}$ splňuje rovnost $x(t) = 0$ pro každé $t > t_0$.

Pro $x_0 > 1$ nebo $x_0 < 0$ je $|1-2x_0| > 1$ a proto $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty$.

Pro $x_0 = \frac{1}{2}$ je řešení úlohy (3.25) rovno $x \equiv \frac{1}{2}$ v souladu s (3.24). Toto řešení je definováno na celé množině $\mathbb{Z}$, jak již bylo předesláno.

Případ $a = 4$: Nejprve budeme hledat nezáporné řešení počáteční úlohy

$$x(t+1) = 4x(t)\big(1-x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.29}$$

To znamená, že budeme předpokládat, že $x_0 \in [0,1]$ a zavedeme substituci

$$x(t) = y(t)^2, \quad \text{tj. } y(t) = \sqrt{x(t)}. \tag{3.30}$$

Po dosazení do rekurentní formule v (3.29) dostaneme

$$y(t+1)^2 = 4y(t)^2\left(1-y(t)^2\right) = \left(2y(t)\sqrt{1-y(t)^2}\right)^2,$$

tedy

$$y(t+1) = 2y(t)\sqrt{1-y(t)^2}.$$

Počáteční podmínka bude $y(t_0) = \sqrt{x_0} \geq 0$. Jedná se tedy o rovnici tvaru (3.21) s nezápornou počáteční hodnotou, kterou řešíme substitucí

$$y(t) = |\sin z(t)|. \tag{3.31}$$

Podle (3.23) dostaneme řešení ve tvaru

$$y(t) = \left|\sin\left(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0}\right)\right|.$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení $x(t) = y(t)^2$ úlohy (3.29) vyjádřené formulí

$$x(t) = \left[\sin\left(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0}\right)\right]^2. \tag{3.32}$$

Přímým výpočtem můžeme ověřit, že tato posloupnost je skutečně řešením úlohy (3.29).

Postup hledání řešení tvaru (3.32) počáteční úlohy (3.29) s $x_0 \in [0,1]$ pomocí substitucí (3.30) a (3.31) můžeme opět zformulovat ve zhuštěné podobě: Substitucí

$$\sqrt{x(t)} = |\sin z(t)|$$

najdeme řešení úlohy (3.29) s $x_0 \in [0,1]$ ve tvaru

$$\sqrt{x(t)} = \left|\sin\left(2^{t-t_0} \arcsin\sqrt{x_0}\right)\right|.$$

Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (3.29) *s* $x_0 \in [0,1]$.

Nejprve ukážeme, že logistická rovnice s parametrem $a = 4$ má periodická řešení libovolné periody. Buď tedy n libovolné přirozené číslo a položíme

$$x_0 = \left(\sin\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)^2.$$

Dosazením do (3.32) dostaneme

$$x(t_0+n) = \left[\sin\left(2^n \arcsin\sqrt{\left(\sin\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)^2}\right)\right]^2 = \left[\sin\left(2^n\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)\right]^2 =$$
$$= \left[\sin\left((2^n+1-1)\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)\right]^2 = \left[\sin\left(2^{n-1}\pi - \frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)\right]^2 = \left(-\sin\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)^2 = x_0.$$

Pro $n = 1$ je

$$\left(\sin\frac{2^{n-1}}{2^n+1}\pi\right)^2 = \left(\sin\tfrac{1}{3}\pi\right)^2 = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}$$

v souladu s (3.24).

V případě rovnice (3.25) libovolné řešení s počáteční hodnotou $x_0 \in (0,1)$ konvergovalo ke konstantnímu nenulovému řešení. Rovnice (3.29) tuto vlastnost nemá, periodická řešení samozřejmě nekonvergují. Ovšem existují taková řešení, která ke $\frac{3}{4}$ konvergují. Uvažme řešení s počáteční hodnotou

$$x_0 = \left(\sin\frac{1}{3\cdot 2^n}\pi\right)^2$$

a buď $k \in \mathbb{N}_0$ libovolné. Pak platí

$$x(t_0+k) = \left[\sin\left(2^k \frac{1}{3\cdot 2^n}\pi\right)\right]^2 = \begin{cases} \frac{3}{4}, & k \geq n, \\ \left[\sin\left(\frac{1}{3\cdot 2^{n-k}}\pi\right)\right]^2 \neq \frac{3}{4}, & k < n. \end{cases}$$

Toto řešení tedy konverguje ke $\frac{3}{4}$ a to tak, že po n krocích této hodnoty dosáhne a zůstane konstantní.

Počáteční úloha pro logistickou rovnici s parametrem $a = 4$ má také řešení, které je nenulové pouze pro konečně mnoho indexů, tj. řešení, které „po konečně mnoha krocích vymizí“. Buď opět $n \in \mathbb{N}$ libovolné číslo a položme

$$x_0 = \left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)^2.$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$x(t_0+k) = \left[\sin\left(2^k\frac{\pi}{2^n}\right)\right]^2 = \left[\sin\left(2^{k-n}\pi\right)\right]^2.$$

To znamená, že $x(t_0+k) = 0$ pro $k \geq 0$ a $x(t_0+k) > 0$ pro $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Nyní hledejme řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou x_0 splňující nerovnost $x_0 > 1$ nebo $x_0 < 0$, tj. $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$.

Nejprve si všimněme, že pro $x_0 > 1$ je $x(t_0+1) = 4x_0(1-x_0) < 0$. Dále pro $x(t) < 0$ je také

$$x(t+1) = 4x(t)\big(1 - x(t)\big) = -4|x(t)|\big(1 + |x(t)|\big) < 0,$$

což znamená, že pokud v nějakém t_1 je řešení úlohy (3.29) záporné, pak je záporné pro každé $t \geq t_1$. Celkem tak dostáváme, že pro počáteční hodnotu x_0 splňující nerovnost $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$, řešení úlohy (3.29) splňuje nerovnost $x(t) < 0$ pro všechna $t \geq t_0+1$. Budeme tedy řešit úlohu

$$x(t+1) = 4x(t)\big(1 - x(t)\big), \quad x(t_0+1) = x_1 < 0. \tag{3.33}$$

Poněvadž řešení této úlohy je záporné, můžeme použít substituci

$$x(t) = -y(t)^2, \quad \text{tj.} \quad |y(t)| = \sqrt{-x(t)}. \tag{3.34}$$

Dosazením do rovnice v (3.33) dostaneme

$$y(t+1)^2 = -x(t+1) = -4x(t)\big(1 - x(t)\big) = 4y(t)^2\big(1 + y(t)^2\big),$$

neboli

$$|y(t+1)|^2 = 2|y(t)|\sqrt{1 + |y(t)|^2}.$$

To je diferenční rovnice tvaru (3.19) pro posloupnost $|y|$. Příslušná počáteční podmínka je $y(t_0+1)| = \sqrt{-x_1}$. Tuto úlohu řešíme substitucí $|y(t)| = \sinh z(t)$ a podle (3.20) dostaneme její řešení ve tvaru

$$|y(t)| = \sinh\left(2^{t-t_0-1}\operatorname{argsinh}|y(t_0+1)|\right) = \sinh\left(2^{t-t_0-1}\operatorname{argsinh}\sqrt{-x_1}\right).$$

Zpětnou substitucí (3.34) napíšeme řešení úlohy (3.33) ve tvaru

$$x(t) = -\left[\sinh\left(2^{t-t_0-1}\operatorname{argsinh}\sqrt{-x_1}\right)\right]^2. \tag{3.35}$$

Tento výsledek můžeme ještě upravit. Nejprve využijeme skutečnosti, že $-x_1 = 4x_0(x_0-1)$ a proto

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh}\sqrt{-x_1} = \operatorname{argsinh}\sqrt{4x_0^2-4x_0} = \ln\left(\sqrt{4x_0^2-4x_0}+\sqrt{4x_0^2-4x_0+1}\right) = \\ = \ln\left(\sqrt{(2x_0-1)^2-1}+\sqrt{(2x_0-1)^2}\right) = \ln\left(|1-2x_0|+\sqrt{(2x_0-1)^2-1}\right) = \\ = \operatorname{argcosh}|1-2x_0|;\end{aligned}$$

dále využijeme vzorec pro hyperbolický sinus polovičního argumentu

$$\left(\sinh\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\cosh\alpha - 1}{2}$$

a po dosazení dostaneme

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\left(\cosh\left(2^{t-t_0}\operatorname{argcosh}|1-2x_0|\right)-1\right).$$

Odtud vyjádříme

$$1-2x(t) = \cosh\left(2^{t-t_0}\operatorname{argcosh}|1-2x_0|\right). \tag{3.36}$$

Řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou x_0, splňující nerovnost $\left|x_0-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ jsme pro $t > t_0$ dostali v implicitním tvaru (3.36). Již snadno ověříme, že rovností

$$|1-2x(t)| = \cosh\left(2^{t-t_0}\operatorname{argcosh}|1-2x_0|\right) \tag{3.37}$$

je dáno řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou splňující $\left|x_0-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ pro každé $t \geq t_0$.

Přímým výpočtem můžeme také ukázat, že substitucí

$$|1-2x(t)| = \cosh z(t)$$

dostaneme řešení úlohy (3.29) s počáteční hodnotou x_0 splňující nerovnost $\left|x_0-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ ve tvaru (3.37).

Kvalitativní vlastnosti řešení úlohy (3.29) *s počáteční hodnotou* x_0 *splňující nerovnost* $\left|x_0-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$. Z vyjádření řešení ve tvaru (3.35) vidíme, že pro libovolné řešení x úlohy platí

$$\lim_{t\to\infty} = -\infty$$

a posloupnost x je ryze klesající.

Případ $a = -2$: Budeme řešit počáteční úlohu

$$x(t+1) = -2x(t)\big(1-x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.38}$$

Nejprve zavedeme substituci

$$y(t) = x(t) - \tfrac{1}{2}, \text{ tj. } x(t) = y(t) + \tfrac{1}{2}. \tag{3.39}$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned}y(t+1) = x(t+1) - \tfrac{1}{2} = -2x(t)\big(1-x(t)\big) - \tfrac{1}{2} = -2\left(y(t)+\tfrac{1}{2}\right)\left(1-y(t)-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} = \\ = -2\left(y(t)+\tfrac{1}{2}\right)\left(-y(t)+\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} = 2\left(y(t)^2-\tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{2} = 2y(t)^2 - 1.\end{aligned}$$

Posloupnost y je tedy řešením počáteční úlohy

$$y(t+1) = 2y(t)^2 - 1, \quad y(t_0) = x_0 - \tfrac{1}{2}.$$

To je první z rovnic řešitelná goniometrickou nebo hyperbolickou substitucí, viz 3.4.1. Řešení rovnice hledáme pro různé počáteční hodnoty různými substitucemi.

Nechť nejprve $y(t_0) = x_0 - \frac{1}{2} \in [-1, 1]$, tj. $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Substitucí

$$y(t) = \cos z(t) \tag{3.40}$$

dostaneme řešení ve tvaru $y(t) = \cos\left(2^{t-t_0} \arccos y_0\right)$. Zpětnou substitucí dostaneme řešení původní úlohy

$$x(t) = \tfrac{1}{2} + \cos\left(2^{t-t_0} \arccos\left(x_0 - \tfrac{1}{2}\right)\right).$$

Pokud $|y(t_0)| = \left|x_0 - \frac{1}{2}\right| > 1$, tj. $x_0 < -\frac{1}{2}$ nebo $x_0 > \frac{3}{2}$, použijeme substituci

$$y(t) = \cosh z(t) \tag{3.41}$$

a dostaneme řešení ve tvaru

$$x(t) = \tfrac{1}{2} + \cosh\left(2^{t-t_0} \ln\left(|x_0 - \tfrac{1}{2}| + \sqrt{\left(x_0 - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 1}\right)\right).$$

Řešení logistické rovnice s parametrem $a = -2$ pomocí substitucí (3.39) a (3.40) nebo (3.41) můžeme opět shrnout:

Řešení úlohy (3.38) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ najdeme substitucí

$$x(t) - \tfrac{1}{2} = \cos z(t)$$

ve tvaru

$$x(t) - \tfrac{1}{2} = \cos\left(2^{t-t_0} \arccos\left(x_0 - \tfrac{1}{2}\right)\right);$$

řešení úlohy (3.38) s počáteční podmínkou $|x_0 - \frac{1}{2}| > 1$ najdeme substitucí

$$x(t) - \tfrac{1}{2} = \cosh z(t)$$

ve tvaru

$$x(t) - \tfrac{1}{2} = \cosh\left(2^{t-t_0} \operatorname{argcosh}\left(x_0 - \tfrac{1}{2}\right)\right).$$

„Zobecňující“ poznámka: Logistickou rovnici

$$x(t+1) = ax(t)\big(1 - x(t)\big)$$

lze pro některé hodnoty parametru a a některé počáteční hodnoty x_0 řešit substitucí

$$f\big(x(t)\big) = \varphi\big(z(t)\big),$$

kterou dostaneme řešení logistické rovnice v implicitním tvaru

$$f\big(x(t)\big) = \varphi\Big(2^{t-t_0}\varphi^{-1}\big(f(x_0)\big)\Big).$$

Hodnoty parametru a a počáteční hodnoty x_0, pro které jsme tímto postupem našli řešení logistické rovnice jsou shrnuty v tabulce 3.1.

parametr	počáteční hodnota	$f(\xi)$	$\varphi(\zeta)$
$a=2$	$x_0 \in \mathbb{R}$	$1-2\xi$	e^{ζ}
$a=4$	$x_0 \in [0,1]$	$\sqrt{\xi}$	$\lvert\sin\zeta\rvert$
$a=4$	$x_0>1$ nebo $x_0<0$	$\lvert 1-2\xi\rvert$	$\cosh\zeta$
$a=-2$	$x_0 \in [-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$	$\xi-\frac{1}{2}$	$\cos\zeta$
$a=-2$	$x_0<-\frac{1}{2}$ nebo $x_0>\frac{3}{2}$	$\xi-\frac{1}{2}$	$\cosh\zeta$

Tabulka 3.1: Hodnoty parametru a počáteční podmínky, pro které je řešení diskrétní logistické rovnice $x(t+1)=ax(t)\big(1-x(t)\big)$ s počáteční podmínkou $x(t_0)=x_0$ implicitně dáno rovností $f\big(x(t)\big)=\varphi\Big(2^{t-t_0}\varphi^{-1}\big(f(x_0)\big)\Big)$.

3.5 Cvičení

V úlohách 1–6 najděte obecné řešení rovnice.

1. $x(t+1)^2-(2+t)x(t+1)x(t)-2tx(t)^2=0$
2. $x(t+1)x(t)-x(t+1)+x(t)=0$
3. $x(t+1)x(t)-\frac{2}{3}x(t+1)+\frac{1}{6}x(t)=\frac{5}{18}$
4. $x(t+1)=x(t)^2$
5. $x(t+1)=2x(t)\sqrt{1-x(t)^2}$
6. $x(t+1)=\frac{1}{2}\left(x(t)-\dfrac{a}{x(t)}\right)$, $a>0$

V úlohách 7–10 najděte řešení rovnice s počáteční podmínkou $x(0)=x_0$.

7. $x(t+1)^2-2x(t+1)x(t)-3x(t)^2=0$
8. $x(t+1)=5-\dfrac{6}{x(t)}$
9. $x(t+1)=\dfrac{x(t)+a}{x(t)+1}$, $a>0$
10. $x(t+1)=\dfrac{2-x(t)^2}{2\big(1-x(t)\big)}$

11. Řešte počáteční úlohu $x(t+2)=\dfrac{x(t+1)^3}{x(t)^2}$, $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$.

12. Ukažte, že k libovolnému kladnému přirozenému číslu n existuje hodnota $x_0=x_0(n)$ taková, že řešení úlohy

$$x(t+1)=2x(t)\big(x(t)-1\big),\quad x(0)=x_0$$

má periodu n.

Výsledky:

1. $2^t c$, $x(t_0)(-1)^{t-t_0} \prod_{i=t_0}^{t-1} i$,
2. $\dfrac{1}{c-t}$,
3. $\dfrac{5-2c(-6)^t}{6\big(1+c(-6)^t\big)}$, $-\frac{1}{3}$
4. c^{2^t}
5. $\sin 2^t c$
6. $\sqrt{a}\,\operatorname{cotg} 2^t c$
7. „základní řešení“ $x_0 3^t$, $x_0(-1)^t$
8. $\dfrac{3x_0-6}{x_0-2+(x_0+3)\left(\frac{2}{3}\right)^t} + \dfrac{2x_0+6}{x_0+3+(x_0-2)\left(\frac{3}{2}\right)^t}$
9. $\sqrt{a}\,\dfrac{(x_0+\sqrt{a})\,(1+\sqrt{a})^t + (x_0-\sqrt{a})\,(1-\sqrt{a})^t}{(x_0+\sqrt{a})\,(1+\sqrt{a})^t - (x_0-\sqrt{a})\,(1-\sqrt{a})^t}$
10. $1-\operatorname{cotg}\left(2^t \operatorname{arccotg}(1-x_0)\right)$
11. $x_0\left(\dfrac{x_1}{x_0}\right)^{2^t-1}$
12. Například $x_0 = \frac{1}{2} + \cos\dfrac{2\pi}{2^n-1}$