

CVIČENÍ 1

Vlastnosti posloupností

1. Rozhodněte, zda je ohraničená posloupnost, jejíž obecný člen $a(t)$ je tvaru:

a) $1 - \left(\cos \frac{\pi}{t}\right)^t$, b) $\frac{t^t}{t!}$, c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$.

2. Rozhodněte, zda je na množině \mathbb{N} monotónní posloupnost, jejíž obecný člen $a(t)$ je tvaru:

a) $\frac{t^2 + 1}{t + 1}$, b) $\frac{2^t}{t!}$, c) $t - \log t$.

3. Dokažte, že následující posloupnosti jsou konvergentní.

a) $\frac{(t!)^2}{(2t)!}$, b) $\sum_{i=0}^t \frac{1}{t+i}$, c) $\sum_{i=0}^t \frac{1}{i!}$.

4. Vypočítejte limity posloupností:

a) $\frac{2t^2 - t + 3}{3t^2 + t - 5}$, b) $\frac{t^4 + t - 1}{t^3 + t - 1}$, c) $\frac{\sum_{i=0}^k b_i t^i}{\sum_{i=0}^m c_i t^i}$, $b_k \neq c_m \neq 0$,

d) $\sqrt[t]{3^{2t+1}}$, e) $\sqrt{t+1} - \sqrt{t}$, f) $\frac{\sqrt[3]{t^2}}{t+1}$,

g) $\frac{t - (-1)^t}{t}$, h) $\frac{3^t + (-2)^t}{3^{t+1} + (-2)^{t+1}}$, i) $\frac{t!}{t^t}$,

j) $\sqrt[t]{t!}$, k) $\frac{\alpha^t}{t!}$.

5. Najděte všechny hromadné body posloupnosti:

a) $(-1)^{t+1} \left(2 + \frac{3}{t}\right)$, b) $1 + \frac{1}{t+1} \cos \frac{\pi}{2}t$, c) $\frac{1}{2}((a+b) + (-1)^t(a-b))$,

d) $\left(\cos \frac{2\pi}{3}t\right)^t$, e) $\left(-1 - \frac{1}{t}\right)^t + \sin \frac{\pi}{4}t$, f) $\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (-1)^{i-1}i$.

6. Najděte extrémní hodnotu posloupnosti na intervalu $[1, \infty)$:

a) $a(t) = \frac{t^2}{2^t}$, b) $a(t) = t^2 - 9t - 10$, c) $a(t) = \prod_{i=1}^t \frac{i+9}{2i-1}$.

Výsledky:

1. a) je, $0 \leq a(t) \leq 2$ b) není c) není
2. a) ryze rostoucí b) klesající c) ryze rostoucí
3. a) klesající, zdola ohraničená nulou b) klesající, zdola ohraničená nulou c) Tylorův rozvoj e^1

4. a) $\frac{2}{3}$ b) ∞ c) $\begin{cases} 0 & k < m \\ b_k/c_m & k = m \\ \infty & k > m, b_k c_m > 0 \\ -\infty & k > m, b_k c_m < 0 \end{cases}$
d) 9 e) 0
g) 1 h) $\frac{1}{3}$ f) 0
j) ∞ k) 0 i) 0

5. a) $\{-2; 2\}$ b) $\{0; 1; 2\}$ c) $\{a; b\}$
d) $\{0; 1\}$ e) $\{e; e \pm 1; -e \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ f) $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

6. a) $a_{max} = a(3) = \frac{9}{8}$ b) $a_{min} = a(4) = a(5) = -30$ c) $a_{max} = a(9) = a(10) = 512$