M8230

Cvičení 2

Antidiference, sumace

Vzorce:

Operace s posloupnostmi:

1) Posunutí $a(t)$ (*shift operator*): $a^\sigma(t) = a(t+1)$

2) Diference $a(t)$: $\Delta a(t) = a(t+1) - a(t)$

3) Sumace $a(t)$: $\sum_{t_0} a(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i)$

4) Antidiference $a(t)$ je posloupnost $A(t)$: $\Delta A(t) = a(t)$

Vztahy:

$$\Delta \sum_{t_0} a(t) = \Delta \sum_{i=t_0}^{t-1} a(i) = a(t)$$

$$\sum_{t_0} \Delta a(t) = \sum_{i=t_0}^{t-1} \Delta a(i) = a(t) - a(t_0) = [a(i)]_{t_0}^{t} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{t_0} a(t) = A(t) - A(t_0)$$

$$\sum_{t_0} a(t)\Delta b(t) = [a(i)b(i)]_{t_0}^{t} - \sum_{t_0} b(t+1)\Delta a(t) \qquad \text{(Sumace „per partes“)}$$

Antidiference a sumace elementárních posloupností:

	posloupnost $a(t)$	diference $\Delta a(t)$	antidiference $A(t)$
1.	$a(t) = 1$	0	t
2.	$a(t) = t$	1	$\frac{1}{2}t(t-1)$
3.	$a(t) = \alpha^t,\ \alpha \neq 1$	$(\alpha-1)\alpha^t$	$\dfrac{\alpha^t}{\alpha-1}$
4.	$a(t) = t^{(r)} = \prod_{j=t-r+1}^{t} j,\ t \geq 0$	$rt^{(r-1)}$	$\dfrac{t^{(r+1)}}{r+1},\ r \neq -1$
5.	$a(t) = \cos(\alpha t + \beta),\ \alpha \not\equiv 0, \bmod 2\pi$	$-2\sin\frac{1}{2}\alpha \sin(\alpha t + \beta + \frac{1}{2}\alpha)$	$\dfrac{\sin(\alpha t + \beta - \frac{1}{2}\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$
6.	$a(t) = \sin(\alpha t + \beta),\ \alpha \not\equiv 0, \bmod 2\pi$	$2\sin\frac{1}{2}\alpha \cos(\alpha t + \beta + \frac{1}{2}\alpha)$	$-\dfrac{\cos(\alpha t + \beta - \frac{1}{2}\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$

Příklady:

1. Najděte antidiferenci zadané posloupnosti (na množině $[0,\infty)$):

a) $a(t) = t\alpha^t, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

b) $a(t) = t(-1)^t$,

c) $a(t) = t^{(2)}3^t$,

d) $a(t) = t^2\alpha^t, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

$\boxed{2.}$ Najděte řešení dané počáteční úlohy:

a) $\Delta x(t) = t2^t, \quad x(0) = 0,$

b) $\Delta x(t) = t^2 2^t, \quad x(0) = 6,$

c) $\Delta x(t) = \dfrac{1}{t(t+1)}, \quad x(1) = 0,$

d) $\Delta x(t) = (-1)^{\frac{1}{2}t(t-1)}, \quad x(0) = 0,$

e) $\Delta x(t) = t3^{-t}, \quad x(0) = 0,$

f) $\Delta x(t) = t^3, \quad x(1) = 1.$

$\boxed{3.}$ Najděte řešení rovnice $(t+1)x(t+1) = tx(t)$ a určete interval, na kterém je definováno.

Výsledky:

1. a) $\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(t\alpha^{t-1} - \frac{\alpha^t}{\alpha-1}\right)$ b) $\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})(-1)^{t+1}$

   c) $\frac{3^t}{2}(t^2 - 4t + \frac{9}{2})$ d) $\frac{\alpha^t}{\alpha-1}(t^2 - \frac{2\alpha t+\alpha}{\alpha-1} + \frac{2\alpha^2}{(\alpha-1)^2})$

2. a) $t2^t - 2^{t+1} + 2$ b) $\left(t^2 - 4t + 6\right)2^t$

   c) $\dfrac{t-1}{t}$ d) $1 - \cos\frac{\pi}{2}t$

   e) $-\frac{t}{2}3^{1-t} - \frac{3}{4}(3^{-t} - 1)$ f) $1 + \frac{t^2(t-1)^2}{4}$

3. $x(t) = \begin{cases} C/t, & t \in (-\infty, -1] \text{ nebo } t \in [1, \infty) \\ 0, & t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$ C je libovolná konstanta, $t \in \mathbb{Z}$.